Sur le problème de la dérivée oblique II

Kazuaki Taira

Résumé. — Poursuivant l'étude du problème de la dérviée oblique entreprise dans [10], on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions avec perte d'**une** dérivée par rapport au cas coercif; on généralise aussi le Théorème 1 de [10].

0. Introduction

Dans cet article, on considère comme dans [10] le problème de la dérviée oblique pour le laplacien avec un paramètre réel λ, satisfaisant au **principe du maximum** et on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions avec perte d'**une** dérviée par rapport au cas coercif dans le cadre des espaces de Sobolev, généralisant aussi le Théorème 1 de [10]. Les résultats obtenus sont résumés au paragraphe suivant.

Dans la démonstration, comme précédemment, on ramène l'étude du problème de la dérivée oblique à celle d'un opérateur pseudo-différentiel $T(\lambda)$ du premier ordre à paramètre réel λ, sur le bord; puis, en calculant **explicitement** le symbole de $T(\lambda)$ et en introduisant une variante d'une méthode de Agmon-Nirenberg, on peut utiliser le Théorème 3.1 de Melin [7] pour donner des conditions suffisantes et le Théorème 5.9 de Hörmander [5] pour donner une condition nécessaire.

Je tiens à remercier B. Helffer dont les conseils m'ont permis de simplifier la démonstration de certains résultats.

Le plan de cet article est le suivant:

1. Énoncé des résultats

Soit Ω un domaine borné d'un espace euclidien $\mathbf{R}^n$, $\bar{\Omega}$ étant une variété compacte à bord Γ de classe C^∞, de dimension n.

On considère comme dans [10] le problème de la dérviée oblique suivant: Pour deux fonctions f et φ définies dans Ω et sur Γ respectivement, trouver une fonction u dans Ω telle que

$$(*)\qquad \begin{cases} (\lambda+\Delta)u=f & \text{dans} \quad \Omega, \\ \mathscr{B}u=a\dfrac{\partial u}{\partial \nu}+\alpha u+bu|_{\Gamma}=\varphi & \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Ici λ est un nombre réel, Δ est le laplacien sur Ω, a et b sont des fonctions à valeurs réelles et C^∞ sur Γ, ν est la normale unitaire extérieure à Γ, et α est un champ de vecteurs sur Γ.

On poursuit l'étude du problème de l'existence et l'unicité des solutions de $(*)$ dans le cadre des espaces de Sobolev comme dans [10]. Rappelons que, dans le cas coercif, i.e., dans le cas où $a(x)\neq 0$ sur Γ, on uitilise pour démontrer des théorèmes d'**unicité** des solutions du problème $(*)$ la formule de Green (cf. [6]) ou bien le principe du maximum positif au bord (cf. [1]). Mais, dans le cas non-coercif, i.e., dans le cas où a s'annule en des points de Γ, on ne peut pas en général utiliser la formule de Green. (Notons que, s'il existe un champ de vecteurs γ sur Γ tel que $\alpha=a\gamma$ sur Γ, on peut utiliser la formule de Green comme dans la démonstration du Théorème 7.4 de [9].) Dans cet article, on utilisera donc le principe du maximum positif au bord.

Supposons que la condition aux limites $\mathscr{B}$ satisfait au **principe du maximum positif au bord** (cf. [1]):

$$\text{(PMB)}\qquad u\in C^1(\bar{\Omega}),\ x'\in\Gamma \quad \text{et} \quad u(x')=\sup_{x\in\Omega} u(x)\geqq 0 \\ \Rightarrow \mathscr{B}u(x')\geqq 0.$$

D'après le Théorème X de Bony—Courrège—Priouret [1], on voit que la propriété (PMB) est satisfaite si et seulement si

$$\text{(H.1)}\qquad a(x)\geqq 0 \quad \text{et} \quad b(x)\geqq 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Notons que l'hypothèse (H.1) correspond aux hypothèses (A.1) et (B.0) dans [10].

On obtient d'abord le:

Théorème 0. (cf. [6]) *Soit* $s\geqq 2$. *On suppose:*

$$\text{(H.1)}\qquad a(x)\geqq 0 \ \textit{et}\ b(x)\geqq 0 \ \textit{sur}\ \Gamma.$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

i) *Il existe un* $\lambda<0$ *tel que le problème* $(*)$ *admette une solution unique u dans* $H^s(\Omega)$ *pour toutes* $f\in H^{s-2}(\Omega)$ *et* $\varphi\in H^{s-3/2}(\Gamma)$.

ii) *Pour tout* $\lambda<0$, *le problème* $(*)$ *admet une solution unique u dans* $H^s(\Omega)$ *pour toutes* $f\in H^{s-2}(\Omega)$ *et* $\varphi\in H^{s-3/2}(\Gamma)$.

iii) *L'hypothèse* (A.0) *est satisfaite:*

$$\text{(A.0)} \qquad a(x)>0 \quad sur \quad \Gamma.$$

Ici $H^s(\Omega)$ (resp. $H^s(\Gamma)$) désigne l'espace de Sobolev sur Ω (resp. Γ) d'ordre s.

On étudie donc des conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème $(*)$ admette une solution unique u dans $H^{s-1}(\Omega)$ pour toutes $f\in H^{s-2}(\Omega)$ et $\varphi\in H^{s-3/2}(\Gamma)$ avec perte d'**une** dérviée par rapport au Théorème 0.

Soit $(x,\xi)=(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1})$ des coordonnées locales du fibré cotangent $T^*\Gamma$ à Γ, $(g_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n-1}$ la métrique riemannienne de Γ induite par la métrique naturelle de $\mathbf{R}^n$ et $(g^{ij}(x))$ la matrice inverse de $(g_{ij}(x))$. Pour $f,g\in C^\infty(T^*\Gamma)$, on désigne par $\{f,g\}$ le crochet de Poisson de f et g:

$$\{f,g\}=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}-\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial\xi_j}\right).$$

En utilisant le Théorème 3.1 de Melin [7], on peut donner des conditions suffisantes.

Théorème 1. *Soit* $s\geqq[n/2]+4$. *On suppose:*

$$\text{(H.1)} \qquad a(x)\geqq 0 \quad et \quad b(x)\geqq 0 \quad sur \quad \Gamma.$$

$$\text{(B.1)} \qquad b(x)>0 \quad sur \quad \Gamma_0=\{x\in\Gamma;\ a(x)=0\}.$$

$(\mathrm{C})_s$ *En tout point* $x\in\Gamma_0$,

$$b(x)-\frac{1}{2}\operatorname{div}\alpha(x)+\frac{1}{2}(s-3/2)\{|\xi|^2,\alpha^k(x)\xi_k\}>0$$

pour tout $\xi\in T_x^*\Gamma$ *avec* $0\leqq|\xi|\leqq 1$. *Ici* $\operatorname{div}\alpha$ *est la divergence de* α *par rapport à la métrique* $(g_{ij}(x))$ *de* Γ, $|\xi|=\sqrt{g^{ij}(x)\xi_i\xi_j}$ *et* $\alpha^k(1\leqq k\leqq n-1)$ *est une composante de* α.

Alors, pour tout $\lambda<0$, *le problème* $(*)$ *admet une solution unique u dans* $H^{s-1}(\Omega)$ *pour toutes* $f\in H^{s-2}(\Omega)$ *et* $\varphi\in H^{s-3/2}(\Gamma)$.

Remarque 1.1. Si l'hypothèse (C.1) dans le Théorème 1 de [10]:

(C.1) α s'annule au **second** ordre sur Γ_0

est satisfaite, alors l'hypothèse $(\mathrm{C})_s$ se réduit à l'hypothèse (B.1); donc le Théorème 1 ci-dessus généralise le Théorème 1 de [10].

Remarque 1.2. En raisonnant comme dans la démonstration du Théorème 1 ci-dessus, on peut démontrer que les conclusions des Théorèmes 2 et 3 et des Corollaires 1 et 2 de [9] subsistent sans l'hypothèse (B)″ de [9].

De plus, en utilisant le Théorème 5.9 de Hörmander [5], on peut donner une condition nécessaire et suffisante.

Théorème 2. *Soit* $s \geqq 2$. *On suppose:*

(H.1) $$a(x) \geqq 0 \quad et \quad b(x) \geqq 0 \quad sur\ \Gamma.$$

(H.2) *Il existe une constante* $C_0 > 0$ *telle que*

(1.1) $$|\alpha^k(x)\xi_k| \leqq C_0 a(x)|\xi| \quad sur \quad T^*\Gamma.$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

i) *Il existe un* $\lambda < 0$ *tel que le problème* $(*)$ *admette une solution unique u dans* $H^{s-1}(\Omega)$ *pour toutes* $f \in H^{s-2}(\Omega)$ *et* $\varphi \in H^{s-3/2}(\Gamma)$.

ii) *Pour tout* $\lambda < 0$, *le problème* $(*)$ *admet une solution unique u dans* $H^{s-1}(\Omega)$ *pour toutes* $f \in H^{s-2}(\Omega)$ *et* $\varphi \in H^{s-3/2}(\Gamma)$.

iii) *L'hypothèse* (B.1) *est satisfaite:*

(B.1) $$b(x) > 0 \quad sur \quad \Gamma_0 = \{x \in \Gamma;\ a(x) = 0\}.$$

2. Symbole de $T(\lambda)$

En utilisant le noyau de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et le noyau de Green $\mathscr{G}(\lambda)$ ($\lambda \leqq 0$) comme dans [10], on ramène l'étude du problème $(*)$ à celle de l'opérateur pseudo-différentiel $T(\lambda) \equiv \mathscr{B}\mathscr{P}(\lambda)$:

$$\varphi \to \mathscr{B}\mathscr{P}(\lambda)\varphi = a\frac{\partial}{\partial \nu}(\mathscr{P}(\lambda)\varphi)\big|_\Gamma + \alpha\varphi + b\varphi$$

du premier ordre à paramètre réel λ, sur le bord Γ (cf. [10], Prop. 2.3).

Pour calculer le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel $T(\lambda)$ du premier ordre sur Γ, on aura besoin du

Lemme 2.1. *Soit* $\lambda \leqq 0$. *Posons:*

$$\Pi(\lambda)\varphi = \frac{\partial}{\partial \nu}(\mathscr{P}(\lambda)\varphi)\big|_\Gamma.$$

On a alors $\Pi(\lambda) = \Pi(\lambda)^*$, *où* $\Pi(\lambda)^*$ *est l'adjoint formel de* $\Pi(\lambda)$.

Ce résultat est une conséquence immédiate de la formule de Green.

En utilisant un résultat de Fujiwara—Uchiyama [3] et le Lemme 2.1, on peut calculer le symbole de $\Pi(\lambda)$:

Lemme 2.2. *Soit $\lambda\leqq 0$. Le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel $\Pi(\lambda)$ est donné par:*

$$p_1(x,\xi,\lambda)+p_0(x,\xi,\lambda)+\textit{des termes d'ordre}\leqq -1$$

$$\equiv \sqrt{|\xi|^2-\lambda}+\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\omega_x(\hat{\xi},\hat{\xi})}{|\xi|^2-\lambda}-(n-1)M(x)\Big)$$

$$+\sqrt{-1}\Big(\sqrt{\varrho(x)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\sqrt{|\xi|^2-\lambda})\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{1}{\sqrt{\varrho(x)}}\Big)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial\xi_j}(\sqrt{|\xi|^2-\lambda})\Big)\Big]+\textit{des termes d'ordre}\leqq -1\ \textit{dépendant de}\ \lambda.$$

Ici $\omega_x(\ ,\ )$ (resp. $M(x)$) désigne la deuxième forme fondamentale (resp. la courbure moyenne) en un point x de l'hypersurface $\Gamma\subset\mathbf{R}^n$, $\hat{\xi}=(g^{1j}(x)\xi_j, g^{2j}(x)\xi_j,\dots,g^{n-1j}(x)\xi_j)$ et $\varrho(x)=(\text{dét}\,(g^{ij}(x)))^{1/2}$.

Démonstration. D'après un résultat de [3], on voit que le symbole de $\Pi(\lambda)$ est:

$$\sqrt{|\xi|^2-\lambda}+\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\omega_x(\hat{\xi},\hat{\xi})}{|\xi|^2-\lambda}-(n-1)M(x)\Big)+\sqrt{-1}\,r_0(x,\xi,\lambda)\Big] \tag{2.1}$$

$$+\text{des termes d'ordre}\leqq -1\ \text{dépendant de}\ \lambda,$$

où $r_0(x,\xi,\lambda)$ est un terme réel d'ordre zéro dépendant de λ.

On va calculer $r_0(x,\xi,\lambda)$. Soit (U,χ) une carte locale de Γ. On a alors pour toutes $\varphi,\psi\in C_0^\infty(U)$:

$$(\varphi,\Pi(\lambda)^*\psi)_{L^2(\Gamma)}=(\Pi(\lambda)\varphi,\psi)_{L^2(\Gamma)}$$

$$=\int_{R^{n-1}}\Pi(\lambda)\varphi(\chi^{-1}(x))\cdot\overline{\psi(\chi^{-1}(x))}\varrho(x)\,dx$$

$$=\int_{R^{n-1}}\varphi(\chi^{-1}(x))\cdot\overline{\Pi_0(\lambda)^*(\psi(\chi^{-1}(x))\varrho(x))}\,dx$$

$$=\int_{R^{n-1}}\varphi(\chi^{-1}(x))\cdot\overline{\Big(\frac{1}{\varrho(x)}\Pi_0(\lambda)^*\varrho(x)\Big)\psi(\chi^{-1}(x))}\varrho(x)\,dx,$$

où $\Pi_0(\lambda)^*$ est l'adjoint formel de $\Pi(\lambda)$ dans $L^2(\mathbf{R}^{n-1})$.

En utilisant les formules (2.11) et (2.14) de Hörmander [4], on déduit de (2.1) que le symbole de $\Pi(\lambda)^*$ est:

$$\sqrt{|\xi|^2-\lambda}+\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\omega_x(\hat{\xi},\hat{\xi})}{|\xi|^2-\lambda}-(n-1)M(x)\Big) \tag{2.2}$$

$$-\sqrt{-1}\Big(r_0(x,\xi,\lambda)+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial\xi_j}(\sqrt{|\xi|^2-\lambda})$$

$$+\frac{1}{\varrho(x)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\sqrt{|\xi|^2-\lambda})\frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho(x))\Big)\Big]$$

$$+\text{des termes d'ordre}\leqq -1\ \text{dépendant de}\ \lambda.$$

Puisque $\Pi(\lambda)=\Pi(\lambda)^*$ d'après le Lemme 2.1, on obtient d'après (2.1) et (2.2) que

$$r_0(x, \xi, \lambda) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho(x)} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\sqrt{|\xi|^2-\lambda}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho(x)) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} \left(\sqrt{|\xi|^2-\lambda}\right)\right).$$

c. q. f. d.

D'après le Lemme 2.2, on obtient le

Lemme 2.3. *Soit* $\lambda \leqq 0$. *Le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel* $T(\lambda)= a\Pi(\lambda)+\alpha+b$ *est donné par:*

$$\text{(2.3)} \quad t_1(x, \xi, \lambda)+t_0(x, \xi, \lambda) + \textit{des termes d'ordre} \leqq -1 \textit{ dépendant de } \lambda$$
$$\equiv \left[a(x) p_1(x, \xi, \lambda)+\sqrt{-1}\,\alpha^k \xi_k\right] + \left[b(x)+a(x) p_0(x, \xi, \lambda)\right]$$
$$+ \textit{des termes d'ordre} \leqq -1 \textit{ dépendant de } \lambda.$$

3. Comportement de $T(\lambda)$

On va étudier le comportement de l'opérateur pseudo-différentiel $T(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$, en utilisant une variante d'une méthode de Agmon—Nirenberg comme dans [10].

Soit $S=\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ le cercle unité, $y \in S$. En utilisant le noyau de Poisson $\tilde{\mathscr{P}}$ du problème:

$$\begin{cases} \left(\Delta+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{w}=0 & \text{dans} \quad \Omega\times S, \\ \tilde{w}|_{\Gamma\times S}=\tilde{\varphi} & \text{sur} \quad \Gamma\times S, \end{cases}$$

on peut introduire l'opérateur pseudo-différentiel $\tilde{T}\equiv\mathscr{B}\tilde{\mathscr{P}}$:

$$\tilde{\varphi} \to \mathscr{B}\tilde{\mathscr{P}}\tilde{\varphi} = a\frac{\partial}{\partial v}(\tilde{\mathscr{P}}\tilde{\varphi})|_{\Gamma\times S}+\alpha\tilde{\varphi}+b\tilde{\varphi}$$

du premier ordre sur $\Gamma\times S$.

D'après un résultat de Fujiwara—Uchiyama [3], en raisonnant comme au paragraphe 2, on obtient le

Lemme 3.1. *Soit* $(x, \xi, y, \eta)=(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, y, \eta)$ *des coordonnées locales du fibré cotangent* $T^*\Gamma\times T^*S=T^*(\Gamma\times S)$. *Le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel* $\tilde{T}$ *sur* $\Gamma\times S$ *est donné par:*

$$\tilde{t}_1(x, \xi, y, \eta)+\tilde{t}_0(x, \xi, y, \eta)+\textit{des termes d'ordre} \leqq -1 \tag{3.1}$$

$$\equiv \left[a(x)\sqrt{|\xi|^2+\eta^2}+\sqrt{-1}\,\alpha^k\xi_k\right]+\left[b(x)+\frac{1}{2}a(x)\left(\frac{\omega_x(\xi, \xi)}{|\xi|^2+\eta^2}-(n-1)M(x)\right)\right.$$

$$+\sqrt{-1}\,a(x)\left(\sqrt{\varrho(x)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\sqrt{|\xi|^2+\eta^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho(x)}}\right)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial\xi_j}\left(\sqrt{|\xi|^2+\eta^2}\right)\right)\right]+\textit{des termes d'ordre} \leqq -1.$$

Soit $\tilde{\Lambda}=(1-\Delta'-\partial^2/\partial y^2)^{1/2}$, où Δ' est l'opérateur de Laplace—Beltrami correspondant à la métrique $(g_{ij}(x))$ de Γ. Pour tout $s\in\mathbf{R}$, le symbole de $\tilde{\Lambda}^s$ est donné par:

$$(|\xi|^2+\eta^2)^{s/2}+\sqrt{-1}\,\tilde{r}_{s-1}(x, \xi, y, \eta)+\text{des termes d'ordre} \leqq s-2, \tag{3.2}$$

où $\tilde{r}_{s-1}(x, \xi, y, \eta)$ est un terme réel d'ordre $s-1$. En effet, il suffit de remarquer que

$$(1+|\xi|^2+\eta^2)^{s/2}=(|\xi|^2+\eta^2)^{s/2}+\frac{s}{2}(|\xi|^2+\eta^2)^{s/2-1}+\dots.$$

En raisonnant comme dans la démonstration du Lemme 2.2, on déduit que le symbole de l'adjoint formel $(\tilde{\Lambda}^s)^*$ est:

$$(|\xi|^2+\eta^2)^{s/2}-\sqrt{-1}\left(\tilde{r}_{s-1}(x, \xi, y, \eta)+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial\xi_j}\left((|\xi|^2+\eta^2)^{s/2}\right)\right. \tag{3.3}$$

$$\left.-2\sqrt{\varrho(x)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left((|\xi|^2+\eta^2)^{s/2}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho(x)}}\right)\right)+\text{des termes d'ordre} \leqq s-2.$$

En utilisant le développement en fonctions propres de $(-\Delta'-\partial^2/\partial y^2)$ sur $\Gamma\times S$ comme dans la démonstration de la Proposition 4 de Fujiwara [2], on voit que, pour toutes $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\in C^\infty(\Gamma\times S)$,

$$(\tilde{\Lambda}^s\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})_{L^2(\Gamma\times S)}=(\tilde{\varphi}, \tilde{\Lambda}^s\tilde{\psi})_{L^2(\Gamma\times S)},$$

d'où $(\tilde{\Lambda}^s)^*=\tilde{\Lambda}^s$ par définition. On en déduit d'après (3.2) et (3.3) le

Lemme 3.2. *Soit* $s\in\mathbf{R}$. *Le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel* $\tilde{\Lambda}^s$ *sur* $\Gamma\times S$ *est donné par:*

$$(3.4)\qquad \tilde{l}_s(x,\xi,y,\eta)+\tilde{l}_{s-1}(x,\xi,y,\eta)+\text{des termes d'ordre} \leqq s-2$$

$$\equiv (|\xi|^2+\eta^2)^{s/2}+\sqrt{-1}\left(\sqrt{\varrho(x)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi_j}((|\xi|^2+\eta^2)^{s/2})\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho(x)}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial\xi_j}((|\xi|^2+\eta^2)^{s/2})\right)+\text{des termes d'ordre} \leqq s-2.$$

En utilisant le Théorème 3.1 de [7], on peut maintenant généraliser le Lemme 3.3 de [10].

Lemme 3.3. *Soit* $s\in\mathbf{R}$ *et* $t<s-1$. *Pour qu'il existe des constantes* $C_1>0$ *et* C_1', *dépendant de* s *et* t, *telles que, pour toute* $\tilde{\varphi}\in C^\infty(\Gamma\times S)$, *on ait:*

$$(3.5)\qquad \operatorname{Re}(\tilde{\Lambda}^{2s-3}\tilde{T}\tilde{\varphi},\tilde{\varphi})_{L^2(\Gamma\times S)} \geqq C_1|\tilde{\varphi}|^2_{H^{s-3/2}(\Gamma\times S)}-C_1'|\tilde{\varphi}|^2_{H^{t-1/2}(\Gamma\times S)},$$

il est nécessaire et suffisant que les hypothéses (A.1) *et* $(\mathrm{C})_s$ *soient satisfaites.*

Démonstration. Rappelons d'abord que l'inégalité (3.5) peut se **localiser** (cf. [2], [7]). On va donc étudier (3.5) sous la forme suivante: Soit (U,χ) (resp. $(V,\varkappa)$) une carte locale de Γ (resp. S). Etant donné un compact K (resp. L) de U (resp. V), trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des constantes $C_2>0$ et C_2', dépendant de K, L, s et t, telles que

$$\operatorname{Re}(\tilde{\Lambda}^{2s-3}\tilde{T}\tilde{\varphi},\tilde{\varphi})_{L^2(\Gamma\times S)} \geqq C_2|\tilde{\varphi}|^2_{H^{s-3/2}(\Gamma\times S)}-C_2'|\tilde{\varphi}|^2_{H^{t-1/2}(\Gamma\times S)}$$

pour toute $\tilde{\varphi}\in C_0^\infty(U\times V)$ ayant son support compact contenu dans $K\times L\subset U\times V$.

Il suffit donc de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des constantes $C_3>0$ et C_3', dépendant de $\chi(K)$, $\varkappa(L)$, s et t, telles que

$$(3.6)\qquad \operatorname{Re}\int_{\mathbf{R}^n}\left(\sqrt{\varrho(x)}\tilde{\Lambda}^{2s-3}\tilde{T}\frac{1}{\sqrt{\varrho(x)}}\right)\tilde{\psi}(x,y)\cdot\overline{\tilde{\psi}(x,y)}\,dx\,dy$$

$$\geqq C_3|\tilde{\psi}|^2_{H^{s-3/2}(\mathbf{R}^n)}-C_3'|\tilde{\psi}|^2_{H^{t-1/2}(\mathbf{R}^n)}$$

pour toute $\tilde{\psi}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ ayant son support compact contenu dans $\chi(K)\times\varkappa(L)\subset\chi(U)\times\varkappa(V)$.

Pour appliquer le Théorème 3.1 de [7] à l'opérateur pseudo-différentiel $(\sqrt{\varrho}\,\tilde{\Lambda}^{2s-3}\,\tilde{T}(1/\sqrt{\varrho}))$ d'ordre $2s-2$ dans $\mathbf{R}^n$, on va calculer son symbole. D'après

(3.1) et (3.4), en utilisant la formule (2.11) de [4], on voit que le symbole de $(\sqrt{\varrho}\,\tilde{\Lambda}^{2s-3}\,\tilde{T}(1/\sqrt{\varrho}))$ est:

$$\tilde{p}_{2s-2}(x,\xi,y,\eta)+\tilde{p}_{2s-3}(x,\xi,y,\eta)+\text{des termes d'ordre} \leqq 2s-4 \tag{3.7}$$
$$\equiv [\tilde{t}_1(x,\xi,y,\eta)\tilde{l}_{2s-3}(x,\xi,y,\eta)]+$$
$$+[\tilde{t}_0(x,\xi,y,\eta)\tilde{l}_{2s-3}(x,\xi,y,\eta)+\tilde{t}_1(x,\xi,y,\eta)\tilde{l}_{2s-4}(x,\xi,y,\eta)$$
$$-\sqrt{-1}\sqrt{\varrho(x)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\tilde{t}_1(x,\xi,y,\eta)\tilde{l}_{2s-3}(x,\xi,y,\eta))\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho(x)}}\right)$$
$$-\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\tilde{l}_{2s-3}(x,\xi,y,\eta))\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{t}_1(x,\xi,y,\eta))]$$
$$+\text{des termes d'ordre} \leqq 2s-4.$$

D'après le Théorème 3.1 de [7], on obtient d'abord que, pour établir l'inégalité (3.6), il faut que

$$\operatorname{Re}\tilde{p}_{2s-2}(x,\xi,y,\eta)=a(x)(|\xi|^2+\eta^2)^{s-1}\geqq 0$$

sur l'ensemble $\{(x,\xi,y,\eta)\in(T^*\Gamma\times T^*S)\setminus 0;\ (x,y)\in U\times V\}$, i.e., que l'hypothèse $(\mathrm{A.1})_U$ soit satisfaite:

$$(\mathrm{A.1})_U \qquad a(x)\geqq 0 \quad \text{sur} \quad U.$$

On va donc étudier l'inégalité (3.6) sous cette hypothèse $(\mathrm{A.1})_U$. Posons:

$$\tilde{\Sigma}_{U\times V}=\{(x,\xi,y,\eta)\in(T^*\Gamma\times T^*S)\setminus 0;\ (x,y)\in U\times V,$$
$$|\xi|^2+\eta^2=1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}\tilde{p}_{2s-2}(x,\xi,y,\eta)=a(x)(|\xi|^2+\eta^2)^{s-1}=0\}.$$

Puisque la fonction a s'annule au **second** ordre sur $U_0=\{x\in U;\ a(x)=0\}$ d'après l'hypothèse $(\mathrm{A.1})_U$, on déduit de (3.7) que le symbole **sous-principal** $\tilde{p}'_{2s-3}(x,\xi,y,\eta)$ de $(\sqrt{\varrho}\,\tilde{\Lambda}^{2s-3}\,\tilde{T}(1/\sqrt{\varrho}))$ sur $\tilde{\Sigma}_{U\times V}$ est donné par:

$$\tilde{p}'_{2s-3}(x,\xi,y,\eta)\equiv\tilde{p}_{2s-3}(x,\xi,y,\eta) \tag{3.8}$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial\xi_j}(\tilde{p}_{2s-2}(x,\xi,y,\eta))+\frac{\partial^2}{\partial y\partial\eta}(\tilde{p}_{2s-2}(x,\xi,y,\eta))\right)$$
$$=\frac{1}{2}(s-3/2)\{|\xi|^2,\alpha^k(x)\xi_k\}+b(x)-\frac{1}{2}\operatorname{div}\alpha(x).$$

De même, on déduit que le hessien $H_{\mathrm{Re}\,\tilde{p}_{2s-2}}(x, \xi, y, \eta)$ de $\mathrm{Re}\,\tilde{p}_{2s-2}(x, \xi, y, \eta)$ sur $\tilde{\Sigma}_{U\times V}$ est donné par:

$$H_{\mathrm{Re}\,\tilde{p}_{2s-2}}(x, \xi, y, \eta) = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{2}{c}{\left(\dfrac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1\leqq i,j\leqq n-1}} & \begin{matrix}0\\ \vdots\end{matrix} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right),$$

ce qui entraîne que

(3.9) la matrice $\tilde{J}\cdot H_{\mathrm{Re}\,\tilde{p}_{2s-2}}(x, \xi, y, \eta)$ est **nilpotente** sur $\tilde{\Sigma}_{U\times V}$, où

$$\tilde{J} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right) \quad (I_n = \text{la matrice identité d'ordre } n).$$

En appliquant le Théorème 3.1 de [7] (cf. [10], Théorème 3.4) à l'opérateur pseudo-différentiel $(\sqrt{\varrho}\,\tilde{\Lambda}^{2s-3}\tilde{T}(1/\sqrt{\varrho}))$, on obtient d'après (3.8) et (3.9) qu'on a l'inégalité (3.6) pour toute $\tilde{\psi}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ ayant son support compact contenu dans $\chi(K)\times\times\varkappa(L)\subset\chi(U)\times\varkappa(V)$ si et seulement si les hypothèses $(\mathrm{A.1})_U$ et $(C)_{sU}$ sont satisfaites:

$(\mathrm{A.1})_U$ $\qquad a(x)\geqq 0$ sur U.

$(\mathrm{C})_{sU}$ En tout point $x\in U_0=\{x\in U;\ a(x)=0\}$,

$$b(x)-\frac{1}{2}\operatorname{div}\alpha(x)+\frac{1}{2}(s-3/2)\{|\xi|^2, \alpha^k(x)\xi_k\}>0$$

pour tout $\xi\in T_x^*\Gamma$ avec $0\leqq|\xi|\leqq 1$. c. q. f. d.

En appliquant l'inégaité (3.5) à $\tilde{\varphi}=\varphi\otimes e^{ily}$ avec $\varphi\in C^\infty(\Gamma)$ et $l\in\mathbf{Z}$ et en utilisant les Lemmes 3.1 et 3.2 de [10] comme dans la démonstration de la Proposition 4.6 de [8], on déduit du Lemme 3.3 la

Proposition 3.4. *Soit $\lambda'=-l^2$ avec $l\in\mathbf{Z}$ et $s\geqq 3/2$. On suppose:*

(A.1) $\qquad a(x)\geqq 0$ *sur* Γ.

$(\mathrm{C})_s$ *En tout point* $x\in\Gamma_0=\{x\in\Gamma;\ a(x)=0\}$,

$$b(x)-\frac{1}{2}\operatorname{div}\alpha(x)+\frac{1}{2}(s-3/2)\{|\xi|^2, \alpha^k(x)\xi_k\}>0$$

pour tout $\xi\in T_x^*\Gamma$ *avec* $0\leqq|\xi|\leqq 1$.

Il existe alors une constante $R>0$ dépendant de s telle que, si $|\lambda'|=l^2\geqq R$, on ait:

i) *Il existe une constante* $C_4>0$ *dépendant de s telle que, pour toute* $\varphi\in H^{s-3/2}(\Gamma)$ *avec* $T(\lambda')\varphi\in H^{s-3/2}(\Gamma)$, *on ait*

$$|\varphi|^2_{H^{s-3/2}(\Gamma)}+|\lambda'|^{s-3/2}|\varphi|^2_{L^2(\Gamma)}\leqq C_4\big(|T(\lambda')\varphi|^2_{H^{s-3/2}(\Gamma)}+|\lambda'|^{s-3/2}|T(\lambda')\varphi|^2_{L^2(\Gamma)}\big).$$

ii) *Il existe une constante* $C_4^*>0$, *dépendant de* λ' *et s, telle que, pour toute* $\psi\in H^{-s+3/2}(\Gamma)$ *avec* $T(\lambda')^*\psi\in H^{-s+3/2}(\Gamma)$, *on ait*

$$|\psi|^2_{H^{-s+3/2}(\Gamma)}\leqq C_4^*|T(\lambda')^*\psi|^2_{H^{-s+3/2}(\Gamma)}.$$

Remarque 3.5 (d'après Referee). Le Lemme 3.3 (donc aussi la Proposition 3.4) peut se généraliser comme suit. Soit $\tilde{R}$ un opérateur pseudo-différentiel **elliptique** d'ordre $s-3/2$ sur $\Gamma\times S$ tel que

$$|\tilde{R}(\varphi\otimes e^{ily})|^2_{H^{s-3/2}(\Gamma\times S)}\approx|\varphi|^2_{H^{s-3/2}(\Gamma)}+l^{2s-3}|\varphi|^2_{L^2(\Gamma)}$$

pour toute $\varphi\in C^\infty(\Gamma)$ (le symbole $\approx$ désigne des normes équivalentes). En remplaçant $\tilde{\Lambda}^{2s-3}$ dans (3.5) par $\tilde{R}^*\tilde{R}$, considérons l'inégalité suivante:

$$\mathrm{Re}(\tilde{R}^*\tilde{R}\tilde{T}\tilde{\varphi},\tilde{\varphi})_{L^2(\Gamma\times S)}\geqq C|\tilde{R}\tilde{\varphi}|^2_{L^2(\Gamma\times S)}-C'|\tilde{\varphi}|^2_{H^{t-1/2}(\Gamma\times S)}\tag{3.10}$$

(ce qui aussi donnera les inégalités de la Proposition 3.4). Nous faisons d'abord la circonscripton:

$$\begin{aligned}(\tilde{R}^*\tilde{R}\tilde{T}\tilde{\varphi},\tilde{\varphi})_{L^2(\Gamma\times S)}&=(\tilde{T}\tilde{R}\tilde{\varphi},\tilde{R}\tilde{\varphi})_{L^2(\Gamma\times S)}+([\tilde{R},\tilde{T}]\tilde{R}^{-1}\tilde{R}\tilde{\varphi},\tilde{R}\tilde{\varphi})_{L^2(\Gamma\times S)}\\&=(\tilde{A}\tilde{\psi},\tilde{\psi})_{L^2(\Gamma\times S)},\end{aligned}$$

où $\tilde{\psi}=\tilde{R}\tilde{\varphi}$ et $\tilde{A}=\tilde{T}+[\tilde{R},\tilde{T}]\tilde{R}^{-1}$. Notons que $\tilde{T}+\tilde{T}^*=a\tilde{\Pi}+\tilde{\Pi}a+2b-\mathrm{div}\,\alpha$, car $\tilde{\Pi}^*=\tilde{\Pi}$ (cf. Lemme 2.1) et $\alpha+\alpha^*=-\mathrm{div}\,\alpha$. Il est facile de voir que, si $a\geqq 0$ sur Γ, alors le symbole sous-principal de $(a\tilde{\Pi}+\tilde{\Pi}a)$ s'annule quand $a=0$ et on en peut dire autant de $\widetilde{\mathrm{Trace}}$. De plus, le symbole principal $\tilde{q}$ de $\tilde{Q}=[\tilde{R},\tilde{T}]\tilde{R}^{-1}$ est égal à:

$$\tilde{q}=\{\log\tilde{r},\alpha^k\xi_k\}\quad\text{quand}\quad a=0,$$

$\tilde{r}$ désignant le symbole principal de $\tilde{R}$. Il en réulte que une condition pour avoir une constante $C>0$ dans (3.10) est donnée par:

$$b-\frac{1}{2}\mathrm{div}\,\alpha+\mathrm{Re}\,\tilde{q}>0\quad\text{quand}\quad a=0.\tag{D}$$

En choisissant $\tilde{R}=\tilde{\Lambda}^{s-3/2}$, on obtient justement la condition $(C)_s$. Notons que la condition (D) dépend de $\tilde{r}$. Par exemple, si on multiplie $\tilde{p}$ par une fonction $\exp[tG(x)]$, alors $\tilde{q}$ est remplacé par $\tilde{q}'=\{\log\tilde{r},\alpha^k\xi_k\}+t\{G,\alpha^k\xi_k\}$; par conséquent, la condition (D) est réalisée s'il y a G telle que $\{G,\alpha^k\xi_k\}>0$ ou bien $\{G,\alpha^k\xi_k\}<0$ quand $a=0$.

4. Indice de $T(\lambda)$

Soit $\lambda \leqq 0$. Pour tout $s \in \mathbf{R}$, on introduit un opérateur non-borné et **fermé** $\mathscr{T}(\lambda)$: $H^{s-3/2}(\Gamma) \to H^{s-3/2}(\Gamma)$ de la manière suivante:

a) Le domaine de définition de $\mathscr{T}(\lambda)$ est

$$\mathscr{D}(\mathscr{T}(\lambda)) = \{\varphi \in H^{s-3/2}(\Gamma);\ T(\lambda)\varphi \in H^{s-3/2}(\Gamma)\}.$$

b) $\mathscr{T}(\lambda)\varphi = T(\lambda)\varphi$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{T}(\lambda))$.

D'après la Proposition 3.4, en raisonnant comme au Paragraphe 4 de [10], on obtient tout d'abord la

Proposition 4.1. *Soit* $\lambda' = -l^2$ *avec* $l \in \mathbf{Z}$ *et* $s \geqq 3/2$. *On suppose:*

(A.1) $$a(x) \geqq 0 \quad sur \quad \Gamma.$$

$(\mathrm{C})_s$ *En tout point* $x \in \Gamma_0 = \{x \in \Gamma;\ a(x) = 0\}$,

$$b(x) - \frac{1}{2}\operatorname{div}\alpha(x) + \frac{1}{2}(s-3/2)\{|\xi|^2, \alpha^k\{x\}\xi_k\} > 0$$

pour tout $\xi \in T_x^*\Gamma$ *avec* $0 \leqq |\xi| \leqq 1$.

Il existe alors une constante $R > 0$ *dépendant de s telle que, si* $|\lambda'| = l^2 \geqq R$, *l'opérateur* $\mathscr{T}(\lambda')$: $H^{s-3/2}(\Gamma) \to H^{s-3/2}(\Gamma)$ *est bijectif.*

Par un argument de perturbation compacte, on va montrer que, pour tout $\lambda \leqq 0$, l'opérateur $\mathscr{T}(\lambda)$ est d'indice **zéro**. D'après le Lemme 2.2, on voit que, pour tout $\lambda \leqq 0$ **fixé**, le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel $T(\lambda)$ sur Γ est donné par:

(4.1) $$[a(x)|\xi| + \sqrt{-1}\,\alpha^k\xi_k] + \Big[b(x) + \frac{1}{2}a(x)\Big(\frac{\omega_x(\xi,\xi)}{|\xi|^2} - (n-1)M(x)\Big)$$

$$+ \sqrt{-1}\,a(x)\Big(\sqrt{\varrho(x)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi_j}(|\xi|)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{1}{\sqrt{\varrho(x)}}\Big) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial\xi_j}(|\xi|)\Big)\Big]$$

$+$des termes d'ordre $\leqq -1$ dépendant de λ,

ce qu'on obtient en développant les termes en (2.3) d'après la formule de Taylor.

On déduit de (4.1) le

Lemme 4.2. *Pour tous* $\lambda, \lambda' \leqq 0$ *fixés, il existe un opérateur pseudo-différentiel* $K(\lambda, \lambda')$ *d'ordre* -1 *sur* Γ, *dépendant de* λ *et* λ', *tel que*

$$T(\lambda) = T(\lambda') + K(\lambda, \lambda').$$

D'après le Lemme 4.2, en remarquant que l'opérateur $K(\lambda, \lambda')$: $H^{s-3/2}(\Gamma)\to H^{s-3/2}(\Gamma)$ est compact en vertu du théorème de Rellich, on voit que

$$\operatorname{Ind}\mathscr{T}(\lambda) = \operatorname{Ind}\mathscr{T}(\lambda').$$

On obtient donc d'après la Proposition 4.1 la

Proposition 4.3. *Soit* $\lambda\leqq 0$ *et* $s\geqq 3/2$. *On suppose que les hypothèses* (A.1) *et* $(\mathrm{C})_s$ *sont satisfaites. Alors, l'opérateur* $\mathscr{T}(\lambda)\colon H^{s-3/2}(\Gamma)\to H^{s-3/2}(\Gamma)$ *est d'indice zéro.*

5. Démonstration des Théorèmes 1 et 2

Démonstration du Théorème 1. En vertu de la Proposition 2.3 de [10] avec $t=s-1$, il suffit de montrer que, si les hypothèses (H.1), (B.1) et $(\mathrm{C})_s$ $(s\geqq[n/2]+4)$ sont satisfaites, l'opérateur $\mathscr{T}(\lambda)$: $H^{s-3/2}(\Gamma)\to H^{s-3/2}(\Gamma)$ est bijectif. Ceci s'obtient de la même manière que dans la démonstration du Théorème 1 de [10] en utilisant le Lemme de Sobolev, le principe du maximum de Hopf—Giraud (cf. [10], Prop. 5.1) et la Proposition 4.3.

Démonstration du Théorème 2. **1)** iii)$\to$ii): En vertu de la proposition 2.3 de [10] avec $t=s-1$, il suffit de montrer que, si les hypothèses (H.1), (H.2) et (B.1) sont satisfaites, l'opérateur $\mathscr{T}(\lambda)$: $H^{s-3/2}(\Gamma)\to H^{s-3/2}(\Gamma)$ est bijectif. Ceci se démontre de la même manière que dans la démonstration du Théorème 2 de [10], en remarquant que l'hypothèse $(\mathrm{C})_s$ se réduit à l'hypothèse (B.1) car α s'annule au second ordre sur $\Gamma_0=\{x\in\Gamma;\ a(x)=0\}$ d'après l'inégalité (1.1) et en utilisant le principe du maximum, la Proposition 4.3 et (au lieu du lemme de Sobolev) la proposition suivante:

Proposition 5.1. *Soit* $\lambda\leqq 0$. *On suppose:*

(A.1) $$a(x)\geqq 0 \quad \textit{sur} \quad \Gamma.$$

(H.2) *Il existe une constante* $C_0>0$ *telle que*

(1.1) $$|\alpha^k\xi_k|\leqq C_0 a(x)|\xi| \quad \textit{sur} \quad T^*\Gamma.$$

(B.1) $$b(x)>0 \quad \textit{sur} \quad \Gamma_0=\{x\in\Gamma;\ a(x)=0\}.$$

Pour tout $s\in\mathbf{R}$, *on a alors:*

$$u\in H^{s-1}(\Omega),\ (\lambda+\Delta)u\in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad \textit{et} \quad \mathscr{B}u\in C^\infty(\Gamma)\Rightarrow u\in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Démonstration. Comme dans la démonstration de la Proposition 6.1 de [10], il suffit de montrer la propriété

(5.1) $$\varphi\in\mathscr{D}'(\Gamma) \quad \text{et} \quad T(\lambda)\varphi\in C^\infty(\Gamma)\Rightarrow\varphi\in C^\infty(\Gamma).$$

Ceci va se démontrer en utilisant le théorème suivant dû à Hörmander ([5], Théorème 5.9):

Théorème 5.2. *Soit P un opérateur pseudo-différentiel à support propre d'ordre m dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, de symbole principal $p_m(x, \xi)$ et de symbole sous-principal $p'_{m-1}(x, \xi)$. Supposons que l'image de p_m appartient à un cône fermé γ d'angle inférieur à π et que l'image de $-p'_{m-1}$ sur l'ensemble caractéristique appartient à un autre cône fermé γ' tel que $\gamma \cap \gamma' = \{0\}$.*

Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

i) *Pour tout compact $K \subset \Omega$ et tous s, s' réels, il existe une constante $C_{K,s,s'}$ telle que*

$$\|u\|_{H^{m-1+s}(\Omega)} \leqq C_{K,s,s'}(\|Pu\|_{H^s(\Omega)} + \|u\|_{H^{s'}(\Omega)}), \quad u \in C_0^\infty(K).$$

ii) *En tout point caractéristique (x, ξ) de P, ou bien $p'_{m-1}(x, \xi) \neq 0$, ou bien $\widetilde{\mathrm{Tr}}\, H_{p_m}(x, \xi) \neq 0$.*

De plus, P et P^* sont hypoelliptiques dans Ω.

Fin de la démonstration de la Proposition 5.1. Puisque le symbole principal $t_1(x, \xi)$ de $T(\lambda)$ est égal à:

$$t_1(x, \xi) = a(x)|\xi| + \alpha^k(x)\xi_k$$

d'après (4.1), l'hypothèse (H.2) implique que l'opérateur $T(\lambda)$ vérifie la condition du cône dans le Théorème 5.2; par conséquent l'ensemble caractéristique Σ est égal à:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{(x, \xi) \in T^*\Gamma \setminus 0;\ t_1(x, \xi) = 0\} \\ &= \{(x, \xi) \in T^*\Gamma \setminus 0;\ a(x) = 0\}. \end{aligned}$$

De plus, il résulte de (4.1) que le symbole sous-principal $t'_0(x, \xi)$ de $T(\lambda)$ sur Σ est donné par:

$$t'_0(x, \xi) = b(x),$$

car les fonctions $a(x)|\xi|$ et $\alpha^k(x)\xi_k$ s'annulent au second ordre sur Σ d'après l'inégalité (1.1). Comme par hypothèse

$$\operatorname{Re} t_1(x, \xi) = a(x)|\xi| \geqq 0 \quad \text{sur} \quad T^*\Gamma$$

et

$$-t'_0(x, \xi) = -b(x) < 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma,$$

on déduit du Théorème 5.2 que l'opérateur $T(\lambda)$ est **hypoelliptique** dans Γ. D'où la propriété (5.1). c. q. f. d.

2) ii)$\Rightarrow$i): Trivial.

3) i)$\Rightarrow$iii): D'après la Proposition 2.3 de [10] avec $t = s-1$, on voit que, si pour un $\lambda < 0$ le problème $(*)$ admet une solution unique u dans $H^{s-1}(\Omega)$ pour toutes $f \in H^{s-2}(\Omega)$ et $\varphi \in H^{s-3/2}(\Gamma)$, alors l'opérateur **fermé** $\mathscr{T}(\lambda)$: $H^{s-3/2}(\Gamma) \to H^{s-3/2}(\Gamma)$ est bijectif. D'après le Théorème du graphe fermé, on en déduit qu'il existe une constante $C_5 > 0$ telle que

$$|\varphi|_{H^{s-3/2}(\Gamma)} \leqq C_5 |T(\lambda)\varphi|_{H^{s-3/2}(\Gamma)}$$

pour toute $\varphi \in C^\infty(\Gamma) \subset \mathscr{D}(\mathscr{T}(\lambda))$.

Comme par hypothèse $b(x) \geqq 0$ sur Γ, en appliquant le Théorème 5.2 à l'opérateur pseudo-différentiel $T(\lambda)$, on déduit que, pour démontrer que $b(x) > 0$ sur $\Gamma_0 = \{x \in \Gamma;\ a(x) = 0\}$, i.e., que le symbole sous-principal $t_0'(x, \xi)$ de $T(\lambda)$ est strictement positif sur $\Sigma = \{x, \xi) \in T^*\Gamma \setminus 0;\ a(x) = 0\}$, il nous faut montrer que $\widetilde{\mathrm{Tr}}\, H_{t_1}$ est nul sur Σ. Ceci se démontre de la même manière que dans la démonstration du Lemme 3.3, car les fonctions $a(x)|\xi|$ et $\alpha^k(x)\xi_k$ s'annulent au second ordre sur Σ d'après (1.1). c. q. f. d.

Bibiographie

1. Bony, J.-M., Courrège, P., Priouret, P., Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problémes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum, *Ann. Inst. Fourier* **18** (1968), 369—521.
2. Fujiwara, D., On some homogeneous boundary value problems bounded below, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* Sec. IA, **17** (1970), 123—152.
3. Fujiwara, D., Uchiyama, K., On some dissipative boundary value problems for the Laplacian, *J. Math. Soc. Japan* **27** (1971), 625—635.
4. Hörmander, L., Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, *Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc.* Vol. **10** (1967), 138—183.
5. Hörmander, L., A class of hypoelliptic pseudo-differential operators with double characteristics, *Math. Ann.* **217** (1975), 165—188.
6. Lions, J.-L., Magenes, E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
7. Melin, A., Lower bounds for pseudo-differential operators, *Ark. för Mat.* **9** (1971), 117—140.
8. Taira, K., On some degenerate oblique derivative problems, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* Sec. IA, **23** (1976), 259—287.
9. Taira, K., On some non-coercive boundary value problems for the Laplacian, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* Sec. IA, **23** (1976), 343—367.
10. Taira, K., Sur le problème de la dérivée oblique I, *J. Math. Pures et Appl.* **57** (1978), 379—395.

Reçu Juillet 17, 1978

Kazuaki Taira
Institut de Mathématiques,
Université de Tsukuba,
300-31 Ibaraki,
Japon