Étude dans un cadre hilbertien des algèbres de Beurling munies d'un poids radial à croissance rapide

P. Tchamitchian

Soit $\omega\colon \mathbf{R}^n \to [0, +\infty[$ un poids, et A_ω l'espace de Hilbert $\mathcal{F}^{-1}L^2(\mathbf{R}^n, \omega(x)\,dx)$, $\mathcal{F}$ désignant la transformée de Fourier. Quand $\omega(x)=(1+|x|^2)^s$, A_ω est l'espace de Sobolev bien connu $H^s(\mathbf{R}^n)$. Nous nous proposons ici d'étudier le cas où ω est à croissance rapide (c'est-à-dire $\lim_{|x|\to\infty} |x|^{-k}\omega(x)=+\infty$ quel que soit k), en comparant A_ω aux espaces de Sobolev.

D'emblée, trois différences essentielles apparaissent. La première est que l'espace A_ω, quand ω vérifie la condition

$$\frac{\operatorname{Log}\omega(x)}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \notin L^1(\mathbf{R}^n),$$

est quasi-analytique ou analytique, et donc en particulier ne contient aucune fonction à support compact. La comparaison avec les espaces de Sobolev perd alors toute signification, et la plupart des problèmes que nous nous poserons n'ont plus de pertinence. Nous nous limitions donc au cas non quasi-analytique, supposant que

$$\frac{\operatorname{Log}\omega(x)}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

Cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante pour assurer l'existence de fonctions à supports compacts dans A_ω (voir Beurling et Malliavin [1]). Nous imposerons plus tard d'autres conditions à ω (partie 1).

La seconde différence très importante entre A_ω et les espaces de Sobolev est que les dilatations (par un coefficient de module >1) sont interdites quand le poids ω est à croissance rapide. Ce point sera précisé dans la deuxième partie.

Enfin, alors que la norme dans H^s peut s'exprimer directement, sans passer par la transformée de Fourier, il n'en est a priori rien dans notre situation. Mais nous verrons dans la troisième partie comment dépasser cet a priori, quand le poids ω est suffisamment régulier. Cela nous permettra, dans les parties 4, 5 et 6, de donner un théorème de trace et de caractériser les multiplicateurs et les fonctions qui opérent sur A_ω, quand A_ω est une algèbre de Banach.

La première partie reprend des résultats de [5], mais sous une forme plus courte et plus conceptuelle, qui m'a été suggérée par Yngve Domar.

Cet article a été rédigé dans l'ambiance extraordinairement agréable et propice au travail du département de mathématiques de l'université d'Uppsala, dont je voudrais ici remercier tous les membres pour la qualité de leur accueil. Je pense plus particulièrement à Henrik Egnell, Matts Essén, Håkan Hedenmalm, et au professeur Y. Domar, avec qui les discussions ont été très utiles et éclairantes.

1. Résultats préliminaires sur les espaces A_ω non quasi-analytiques

Nous voulons ici obtenir l'existence dans A_ω, non seulement de fonctions à supports compacts arbitrairement petits, mais surtout de partitions de l'unité arbitrairement fines.

Le poids ω doit donc vérifier la condition de non quasi-analyticité

$$\frac{\operatorname{Log}\omega(x)}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \in L^1(\mathbf{R}^n), \tag{1}$$

mais pas uniquement. Suivant Beurling et Malliavin ([1]) afin d'obtenir des fonctions à supports compacts dans A_ω, nous supposons, écrivant $\omega = e^{2\theta}$:

$$\forall t \in \mathbf{R}^n \quad \theta_\infty(t) = \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\theta(x+t)-\theta(x)| < +\infty. \tag{2}$$

Enfin, pour obtenir l'existence de partitions de l'unité, nous renforçons (1) de la façon suivante :

$$\frac{\theta_\infty(t)}{(1+|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \in L^1(\mathbf{R}^n). \tag{3}$$

Proposition 1. *Si ω vérifie* (2) *et* (3), *alors quel que soit* $a>0$, *il existe dans* A_ω *une fonction* $\Delta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ *telle que :*

$$\Delta = 1 \quad \text{sur} \quad [-a, a]^n \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}\Delta \subset [-2a, 2a]^n, \tag{4}$$

$$\textstyle\sum_{k\in Z^n} \Delta(x-3ka) = 1. \tag{5}$$

Le résultat est démontré dans [5]. Nous proposons ici une nouvelle démonstration, plus simple, qui nous a été suggéré par. Y. Domar. Elle repose sur l'utilisation du théorème de Paley et Wiener et sur la construction d'une algèbre de Banach régulière contenant A_ω.

Commençons par le cas $n=1$. On pose $\omega_1(x)=(1+x^2)\,e^{2\theta_\infty(x)}$. Alors, $\omega_1 \geqq \omega$, de telle sorte qu'il suffit de trouver la fonction Δ voulue dans A_{ω_1}. Mais, si $p(x)=1+x^2$, on sait que

(6) $$\frac{1}{p}*\frac{1}{p}(x) \leqq \frac{6}{p(x)}.$$

D'autre part, (2) implique aisément

(7) $$\theta_\infty(x+y) \leqq \theta_\infty(x)+\theta_\infty(y).$$

Les deux inégalités montrent alors que

$$\frac{1}{\omega_1}*\frac{1}{\omega_1} \leqq \frac{6}{\omega_1}.$$

Cela implique que A_{ω_1} est une algèbre, en vertu du lemme bien connu suivant (voir par exemple [5]) :

Lemme 1. *L'espace A_ω est une algèbre dès que* $\frac{1}{\omega}*\frac{1}{\omega} \leqq \frac{C}{\omega}$.

D'après (3), $(1+x^2)^{-1}\cdot \log \omega_1(x) \in L^1(\mathbf{R})$. Le théorème de Paley et Wiener ([4], p. 16, th. XII) nous assure alors de l'existence dans A_{ω_1} de $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\operatorname{Supp} f \subset [x_0, +\infty[$, pour un certain $x_0 \in \mathbf{R}$. Et puisque A_{ω_1} est invariant par translation, nous pouvons supposer $x_0=-a/2$, $a>0$ étant fixé.

Puisque A_{ω_1} est une algèbre auto-adjointe, $g(x)=|f(x)f(a-x)|^2 \in A_{\omega_1}$. Nous pouvons imposer $\int g=1$. Soit χ la fonction caractéristique de l'intervalle $[-3a/2, 3a/2]$. Alors, $\Delta=g*\chi$ satisfait aux conditions requises.

Pour obtenir le même résultat en dimension n, on écrit $\Delta(x_1, \dots, x_n)=\Delta_1(x_1)\dots\Delta_n(x_n)$, Δ_i vérifiant (4) et (5) en dimension 1, et Δ_i appartenant à l'algèbre A_{ω_i}, où ω_i est un poids défini sur $\mathbf{R}$ par

$$\omega_i(y) = (1+y^2)\,e^{2\theta_\infty(ye_i)}$$

e_i étant le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

La proposition sera complètement prouvée quand on aura vérifié que Δ appartient bien à A_ω et que chaque poids ω_i vérifie (3), en dimension 1. Or, la suite d'inégalités suivantes permet de prouver que $\Delta \in A_\omega$:

$$\omega(x) = \omega\left(\textstyle\sum_1^n x_i e_i\right) \leqq e^{2\theta_\infty(\Sigma_1^n x_i e_i)} \leqq e^{\Sigma_1^n 2\theta_\infty(x_i e_i)}.$$

D'autre part, d'après (3), on a

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\operatorname{Log} \theta_\infty(xe)}{1+x^2}\,dx < +\infty$$

pour presque toutes les directions e. Grâce à (7), cette relation est en fait valable pour toutes les directions, ce qui permet de conclure la démonstration.

Nous aurons besoin, au § 5, d'un autre résultat, que nous indiquons maintenant. Il s'agit d'une relation de presque-orthogonalité.

Proposition 2. *Soit $\omega=e^{2\theta}$ vérifiant (2), et $\omega_\infty=e^{2\theta_\infty}$. Alors, pour toutes $f\in A_\omega$ et $g\in A_{\omega_\infty}$, il existe C (dépendant de g) telle que*

$$\frac{1}{C}\|f\|_{A_\omega} \leqq \Big(\int_{\mathbf{R}^n}\|f(x)g(x-t)\|_{A_\omega}^2\,dt\Big)^{1/2} \leqq C\|f\|_{A_\omega}. \tag{10}$$

La preuve repose sur le théorème de Plancherel. En effet, on a

$$\int_{\mathbf{R}^n}\|f(x)g(x-t)\|_{A_\omega}^2\,dt = \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\Big|\int_{\mathbf{R}^n} e^{-it.v}\hat{g}(v)\hat{f}(u-v)\,dv\Big|^2\omega(u)\,du\,dt,$$

et en intégrant d'abord par rapport à t, il vient

$$\int_{\mathbf{R}^n}\|f(x)g(x-t)\|_{A_\omega}^2\,dt = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|\hat{g}(v)|^2|\hat{f}(u-v)|^2\omega(u)\,du\,dv$$

qu'on majore et minore aisément avec la relation suivante, déduite de (2) :

$$\frac{1}{\omega_\infty(v)} \leqq \frac{\omega(u)}{\omega(u-v)} \leqq \omega_\infty(v).$$

Nous passons maintenant à l'étude des espaces A_ω quand ω est un poids radial, à croissance rapide, qui vérifie les conditions (2) et (3) . Les exemples que nous avons en vue sont notamment les poids de Gevrey $e^{a|x|^\alpha}$, $a>0$ et $0<\alpha<1$, et les poids $e^{(a(\mathrm{Log}|x|))^\alpha}$, $a>0$ et $\alpha>1$ (pour $|x|\geqq e$).

Nous commençons par un résultat qui précise les changements de variable autorisés dans les espaces A_ω. La démonstration permet d'introduire les techniques qui vont être systématiquement utilisées par la suite.

2. Changements de variable

Théorème 1. *Soit un poids ω radial, à croissance rapide qui vérifie (2) et (3). Soit $\varphi\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ un changement de variable préservant A_ω. Cela signifie que φ est bijective et que $f\circ\varphi$ et $f\circ\varphi^{-1}\in A_\omega$ dès que $f\in A_\omega$. Alors, φ est une isométrie affine.*

Nous allons en fait montrer que, si φ opère sur A_ω, alors, en écrivant $\varphi=(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, on a $\|\mathrm{Grad}\,\varphi_i\|_\infty\leqq 1$, pour tout i, pour la norme euclidienne.

Commençons par choisir $f\in A_\omega$ telle que $f(x)=x_i$, où $i\in\{1, \dots, n\}$, sur une boule arbitraire, ce qui est possible d'après les préliminaires; écrire $f\circ\varphi\in A_\omega$ revient à dire que chaque φ_i appartient localement à A_ω, et entraîne que $\varphi_i\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Supposons maintenant qu'en un point x_0 il existe une coordonnée de φ, disons φ_1, qui vérifie $|\mathrm{Grad}\,\varphi_1(x_0)|>1$. On se ramène immédiatement à $x_0=0$ et $\varphi(0)=0$. Il existe alors une direction u, et deux réels $k>1$ et $\varepsilon>0$ tels que $|\varphi(\lambda u)|\geqq k\lambda$ si $0\leqq\lambda\leqq\varepsilon$.

Posons $M=\sup_{|x|\leqq\varepsilon}|\varphi(x)|/|x|$, puis $a=\varepsilon/M$.

Soit $\Delta\in A_\omega$ tel que $\|\Delta\|_\infty=\Delta(0)=1$, $\partial^\alpha\Delta(0)=0$ si $|\alpha|\geqq 1$, et $\mathrm{supp}\,\Delta\subset B(0,a)$. On forme la suite de fonctions Δ_p de la façon suivante :

$$\Delta_0=\Delta, \quad \text{et} \quad \Delta_p=\Delta\circ\varrho_{p,1}\circ\varphi\circ\varrho_{p,2}\circ\varphi\circ\ldots\circ\varrho_{p,p}\circ\varphi,$$

où chaque $\varrho_{p,q}$ est une rotation satisfaisant à une condition qu'on va préciser dans un instant.

Comme ω est radial, les rotations agissent isométriquement sur A_ω, et donc $\Delta_p\in A_\omega$ pour tout p, avec

$$\|\Delta_p\|_{A_\omega}\leqq C(\varphi)^p\|\Delta\|_{A_\omega}. \tag{11}$$

Nous allons montrer que, avec un choix correct des rotations $\varrho_{p,q}$, nous avons $\partial^\alpha\Delta_p\big((ak^{-p})\,u\big)=0$ pour tout $\alpha\in\mathbf{N}^n$. Il suffit pour cela de montrer que, pour tout α

$$(\partial^\alpha\Delta)\circ\varrho_{p,1}\circ\varphi\circ\ldots\circ\varrho_{p,p}\circ\varphi\left(\frac{a}{k^p}u\right)=0. \tag{12}$$

On choisit alors $\varrho_{p,p}$ de telle sorte que $\varrho_{p,p}\circ\varphi\big((ak^{-p})u\big)$ soit dirigé suivant u, ce qu'on écrit

$$\varrho_{p,p}\circ\varphi\left(\frac{a}{k^p}u\right)=a_{p-1}u$$

(on devrait en fait écrire $a_{p,p-1}u$, mais ce détail est négligeable). D'après ce qui précède, on a $a_{p-1}\geqq ak^{1-p}$, et aussi $a_{p-1}\leqq Mak^{-p}\leqq\varepsilon$. De même, on choisit $\varrho_{p,p-1}$ de façon que

$$\varrho_{p,p-1}\circ\varphi(a_{p-1}u)=a_{p-2}u,$$

et on aura $ak^{2-p}\leqq a_{p-2}\leqq\varepsilon$. De proche en proche, on tombe sur

$$(\partial^\alpha\Delta)\circ\varrho_{p,1}\circ\varphi\circ\ldots\circ\varrho_{p,p}\circ\varphi\left(\frac{a}{k^p}u\right)=\partial^\alpha\Delta(a_0u),$$

où $a_0\geqq a$, d'où (12).

D'autre part, on a $\Delta_p(0)=1=\|\Delta_p\|_\infty$, et $\partial^\alpha\Delta_p(0)=0$ si $|\alpha|\geqq 1$. On en déduit l'inégalité très simple suivante, où $s\in\mathbf{N}$:

$$\left\|\frac{\partial^s\Delta_p}{\partial u^s}\right\|_\infty\geqq\left(\frac{k^p}{a}\right)^s,$$

que l'on transforme ainsi :

$$\left(\frac{k^p}{a}\right)^s \leqq \int_{\mathbf{R}^n} |x|^s |\hat{\Delta}_p(x)|\, dx \tag{13}$$

$$\leqq C(n) \left(\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{\Delta}_p(x)|^2 |x|^{2s} (1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}\, dx\right)^{1/2}.$$

Posons

$$M(s) = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \frac{|x|^s (1+|x|^2)^{\frac{n+1}{4}}}{\omega(x)^{1/2}}, \quad \text{et} \quad T(|x|) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2s}}{2^s M(s)^2}.$$

Alors

$$T(|x|) \leqq 2 \frac{\omega(x)}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

d'où, d'après (13) :

$$T\left(\frac{k^p}{a}\right) \leqq C(n) \|\Delta_p\|^2_{A_\omega}.$$

L'inégalité (11) nous donne alors

$$T\left(\frac{k^p}{a}\right) \leqq C(n) \|\Delta\|^2_{A_\omega} C(\varphi)^{2p},$$

quel que soit $p \geqq 0$, ce qui est impossible puisque T est à croissance rapide. Ceci clôt la démonstration du théorème 1.

Pour obtenir d'autres résultats, nous sommes parvenus au point où nous devons mieux connaître les poids radiaux à croissance rapide, ce qui motive le prochain paragraphe.

3. Poids radiaux à croissance rapide

Dans tout ce paragraphe, nous noterons ω un poids radial à croissance rapide, et nous écrirons indifféremment $\omega(x)$, où $x \in \mathbf{R}^n$, et $\omega(r)$, où r est un réel positif. Notre but est d'écrire ω sous la forme simple d'une série, semblable à celle qui définit l'exponentielle. Naturellement, obtenir une égalité est hors de question, et même inutile.

Nous dirons que deux poids ω_1 et ω_2 sont équivalents, et nous noterons $\omega_1 \sim \omega_2$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $1/C \cdot \omega_1 \leqq \omega_2 \leqq C \cdot \omega_1$. Ce que nous voulons s'énonce alors ainsi : trouver une suite $(s_p)_{p \in \mathbf{N}}$ et des quantités $M(s_p)$ telles que

$$\omega(x) \sim \sum_0^{+\infty} \frac{|x|^{2s_p}}{M(s_p)^2}. \tag{14}$$

La motivation principale de (14) est que, dès qu'une telle écriture est vraie, une fonction f appartient à A_ω si et seulement s'il existe une suite $(\varepsilon(s_p))\in l^2$ telle que

(15) $$\|f\|_{B^{s_p}} \leqq \varepsilon(s_p) M(s_p),$$

où B^{s_p} est l'espace de Beppo—Levi $\mathscr{F}^{-1}L^2(\mathbf{R}^n, |x|^{2s_p}dx)$. Il est bien connu que $\|f\|_{B^{s_p}}$ peut s'exprimer en utilisant seulement la fonction f et ses dérivées, ce qui montre que, dès que (14) est vrai, on peut se passer de la transformée de Fourier pour écrire l'appartenance à A_ω.

Le cas le plus simple est bien sûr celui où $s_p=p$. Mais cela ne peut pas toujours être.

Un contre-exemple est donné par le poids $\omega(r)=e^{\exp[4/3(\mathrm{Log}\, r)^{3/2}]}$, si $r\geqq e$. Nous verrons que ω vérifie (14). En revanche, il n'existe pas de quantités $M(p)$ telles que

(16) $$e^{4/3(\mathrm{Log}\, r)^{3/2}} \sim \sum_0^{+\infty} \frac{r^{2p}}{M(p)^2}.$$

Car, si (16) était vrai, on aurait

$$M(p) \geqq \sup_{r\geqq e} r^p e^{-2/3(\mathrm{Log}\, r)^{3/2}} = e^{p^3/3}.$$

Or, un calcul permet de prouver que, si $r\geqq e$,

$$\sum_0^{+\infty} \frac{r^{2p}}{e^{(2/3)p^3}} \sim e^{(4/3)(\mathrm{Log}\, r)^{3/2} - 2d(\sqrt{\mathrm{Log}\, r},\, \mathrm{N})^2 \sqrt{\mathrm{Log}\, r}},$$

ce qui contredit (16).

Le contre-exemple fait sentir l'importance des quantités $\sup_r r^{2s}/\omega(r)$. Leur rôle est crucial dans des écritures du type (14).

Théorème 2. *Soit* $\theta\colon [0, +\infty[\to[0, +\infty[$ *une fonction continue et* $\omega=e^{2\theta}$. *On définit pour tout* $s\geqq 0$

(17) $$M(s) = \sup_{r\geqq 0} r^s e^{-\theta(r)}.$$

Alors, les propositions suivantes sont équivalentes:

a) $\lim_{r\to\infty} \theta(r)/\mathrm{Log}\, r=+\infty$ *et il existe une constante C telle que*

(18) $$\forall u, v \geqq 0 \,\forall \lambda\in[0, 1] \quad \omega(u^\lambda v^{1-\lambda}) \leqq C\omega(u)^\lambda \omega(v)^{1-\lambda};$$

b) *il existe* $\tilde{\omega}=e^{2\tilde{\theta}}$ *tel que* $\tilde{\theta}$ *soit de classe* C^1, $r\tilde{\theta}'(r)$ *soit croissante non bornée, et* $\omega\sim\tilde{\omega}$;

c) $\omega(r)\sim \sup_{s\geqq 0} \dfrac{r^{2s}}{M(s)^2}$;

d) *il existe une suite croissante non bornée* $(s_n)_{n\in\mathrm{N}}$, *avec* $s_0=0$, *telle que*

$$\omega(r)\sim \sup_n \frac{r^{2s_n}}{M(s_n)^2};$$

e) *il existe une suite croissante non bornée* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *avec* $s_0=0$, *telle que*

$$\omega(r)\sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{2s_n}}{M(s_n)^2}.$$

De plus, on peut prendre la même suite dans d) *et* e).

Nous allons prouver les implications dans l'ordre suivant : e)$\Rightarrow$a)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow$c)$\Leftrightarrow$d)$\Rightarrow$e). On pose $\mu(s)=\operatorname{Log} M(s)$. Si e) est vrai, alors $\theta(r)\geqq s_n \operatorname{Log} r-\mu(s_n)$ pour tout n, d'où $\lim_{r\to\infty} (\theta(r)/\operatorname{Log} r)=+\infty$. D'autre part, l'inégalité de Hölder avec les exposants $1/\lambda$ et $1/(1-\lambda)$ prouve immédiatement (18). On a donc e)$\Rightarrow$a).

Soit alors $\omega=e^{2\theta}$ vérifiant a), et posons $f(r)=\theta(e^r)$. (18) se réécrit ainsi :

$$f(\lambda u+(1-\lambda)v) \leqq \lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)+C. \tag{19}$$

Il n'est pas difficile de voir que, grâce à $\lim_{r\to\infty} f(r)/r=+\infty$, on peut définir une fonction convexe g qui minore f, qui soit affine par morceaux là où elle n'est pas égale à f, et qui égale f sur un ensemble non borné. Alors, si $g(r)<f(r)$, on peut écrire $r=\lambda u+(1-\lambda)v$, avec $g(u)=f(u)$, $g(v)=f(v)$, et g affine sur $[u, v]$. Utilisant (19), on en déduit

$$\forall r \quad g(r) \leqq f(r) \leqq g(r)+C. \tag{20}$$

Posant alors $\tilde\theta(r)=g(\operatorname{Log} r)$, on a $\omega\sim\tilde\omega=e^{2\tilde\theta}$ et $r\tilde\theta'(r)=g'(\operatorname{Log} r)$ est bien croissante ce qui achève de prouver a)$\Rightarrow$b). Nous supposons donc maintenant (éliminant la notation $\tilde\theta$) que θ est dérivable et que $\psi(r)=r\theta'(r)$ est croissante non bornée. Alors, au moins pour r assez grand, on a $\omega(r)=\sup_{s\geqq 0} r^{2s}/M(s)^2$, le supremum étant atteint en $s=\psi(r)$, ce qui prouve c).

Posons $\varphi=\psi^{-1}$. Les lignes précédentes montrent que

$$\mu(s) = s \operatorname{Log} \varphi(s)-\theta\circ\varphi(s), \tag{21}$$

d'où la relation importante suivante :

$$\mu'(s) = \operatorname{Log} \varphi(s). \tag{22}$$

Cette relation permet de retrouver le fait, évident avec la définition de $M(s)$, que $\mu(s)$ est convexe. On normalise, pour plus de commodité, le poids ω en supposant $\theta(0)=\psi(0)=0$. Pour prouver d) et e), nous utiliserons la suite (s_n) définie ainsi :

$$\begin{cases} s_0 = 0, \\ s_1 \quad \text{est tel que} \quad \min\{\mu(s_1),\, s_1\mu'(s_1)-\mu(s_1)\} = 1, \\ \text{si } s_{n-1} \quad \text{est connu,} \quad s_n \text{ est tel que} \\ \min\{(s_n-s_{n-1})\mu'(s_n)-\mu(s_n)+\mu(s_{n-1}),\ \mu(s_n)-\mu(s_{n-1})-(s_n-s_{n-1})\mu'(s_{n-1})\} = 1 \end{cases} \tag{23}$$

(23) définit une suite croissante non bornée en vertu des observations suivantes

i) si $t \geqq 0$ est fixé, $s \to (s-t)\mu'(s)-\mu(s)$ est croissante non bornée sur $[t, +\infty[$

ii) de même, $s \to \mu(s)-(s-t)\mu'(t)$ est croissante non bornée sur $[t, +\infty[$

iii) $\mu(s_n)-\mu(s_{n-1}) \geqq 1$.

Prouvons alors d). Il suffit d'obtenir une constante C telle que

$$\omega(r) \leqq C \sup_n \frac{r^{2s_n}}{M(s_n)^2}.$$

Soit $r \geqq 0$: il existe p tel que $r \in [\varphi(s_p), \varphi(s_{p+1})]$. Par conséquent,

$$\sup_n \frac{r^{2s_n}}{M(s_n)^2} = \max\left(\frac{r^{2s_p}}{M(s_p)^2}, \frac{r^{2s_{p+1}}}{M(s_{p+1})^2}\right). \tag{24}$$

Posons $\sigma = \psi(r)$ et, pour tout s, $v(s) = s \operatorname{Log} r - \mu(s)$ (v dépend de r, qui reste fixé). Alors, d'après (21) et (22), $v(\sigma) = \theta(r)$ et $\operatorname{Log} r = \mu'(\sigma)$. Donc :

$$\begin{aligned}\theta(r)-v(s_p) &= (\sigma - s_p)\mu'(\sigma)-\mu(\sigma)+\mu(s_p)\\ &\leqq (s_{p+1}-s_p)\mu'(s_{p+1})-\mu(s_{p+1})+\mu(s_p),\end{aligned}$$

et de même

$$\theta(r)-v(s_{p+1}) \leqq \mu(s_{p+1})-\mu(s_p)-(s_{p+1}-s_p)\mu'(s_p).$$

D'après (23), on a

$$\min\{\theta(r)-v(s_p),\ \theta(r)-v(s_{p+1})\} \leqq 1,$$

ce qui prouve d), d'après (24). Il est évident que d)$\Rightarrow$c). Supposons c) vrai, et prouvons e). Nous nous ramenons au cas où $\omega(r) = \sup_s r^{2s}/M(s)^2$. Alors, $M(s) = \sup_r r^s/\sqrt{\omega(r)}$ donc $\mu(s) = \operatorname{Log} M(s)$ est convexe. Soit $\pi = (\mu')^{-1}$. Les mêmes calculs donnent, si $\omega = e^{2\theta}$:

$$\theta(r) = \operatorname{Log} r\, \pi(\operatorname{Log} r) - \mu \circ \pi(\operatorname{Log} r). \tag{25}$$

A partir de (25), on retrouve (21) et (22), et on construit la suite (s_n) vérifiant (23). Il reste à prouver que

$$T(r) = \sum_0^{+\infty} \frac{r^{2s_n}}{M(s_n)^2} \leqq C\omega(r). \tag{26}$$

Soit $r \geqq 0$ et p tel que $\psi(r) \in [s_p, s_{p+1}]$. Supposons $p \geqq 1$. On pose $v(s) = s \operatorname{Log} r - \mu(s)$. Soit $k \leqq p-1$ et $l \in \{k+1, \ldots, p\}$.

$$v(s_l)-\delta(s_{l-1}) = (s_l - s_{l-1}) \operatorname{Log} r - \mu(s_l)+\mu(s_{l-1}) \geqq 1$$

d'après (23) et le fait que $\operatorname{Log} r \geqq \mu'(s_l)$. Par conséquent, $v(s_p)-v(s_k) \geqq p-k$, d'où

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{2v(s_k)} \leqq e^{2v(s_p)} \sum_{k=0}^{p-1} e^{-2(p-k)} \leqq C\omega(r).$$

De même, si $k \geqq p+2$, on prouve $\nu(s_{p+1})-\nu(s_k) \geqq k-p-1$ d'où

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} e^{2\nu(s_k)} \leqq C\omega(r).$$

Ainsi, le théorème est-il complètement prouvé.

Dans [2], Yngve Domar prouve l'implication b)⇒e) sous les mêmes hypothèses que les nôtres. Sa démonstration est en fait très peu différente de celle que nous avons proposée, et permet une compréhension géométrique de la suite (s_n). Posons $t_n = \operatorname{Log} \varphi(s_n)$, et soit (T_n) la tangente en t_n à la courbe $y=\theta(e^t)$. Avec les (T_n), on peut construire une fonction convexe affine par morceaux qui minore $\theta(e^t)$. (23) exprime alors que la distance entre cette fonction convexe et $\theta(e^t)$ est égale à 1.

Bien que la preuve précédente soit constructive, on souhaiterait donner du résultat une version plus maniable, qui permette des calculs aisés. Naturellement, cela implique de faire certaines hypothèses supplémentaires sur le poids ω, que satisferont néanmoins les exemples que nous voulons traiter.

Il ressort de la démonstration du théorème que les fonctions importantes dans cette question sont $\psi(r)=r\theta'(r)$ et $\mu'(s)=\operatorname{Log} \varphi(s)$, où $\varphi=\psi^{-1}$. En particulier, on peut voir que la répartition des (s_n) par rapport aux entiers naturels dépend de la concavité/convexité de la fonction $\operatorname{Log} \varphi$. Dans le cas où $\operatorname{Log} \varphi(s)=Cs$, c'est-à-dire quand $\theta(r)=K(\operatorname{Log} r)^2$, on peut prendre $s_n=n$. Quand $\operatorname{Log} \varphi$ est concave, on a en fait

$$\omega(r) \sim \sum_0^{+\infty} \frac{r^{2n_k}}{M(n_k)^2}, \quad n_k \in \mathbf{N}.$$

Il serait plus commode de pouvoir écrire

$$\omega(r) \sim \sum_0^{+\infty} \frac{r^{2n}}{P(n)^2},$$

où l'on pourrait déduire facilement les quantités $P(n)$ des quantités $M(n)$. A l'opposé, quand $\operatorname{Log} \varphi$ est convexe, on a

$$\omega(r) \sim \sum_0^{+\infty} \frac{r^{2s_n}}{M(s_n)^2},$$

les s_n étant non entiers pour la plupart. On souhaite alors pouvoir les décrire de façon plus explicite que par les formules (23).

Proposition 8. *On définit, pour un poids $\omega=e^{2\theta}$ tel que $\psi(r)=r\theta'(r)$ soit croissante non bornée, les fonctions $\varphi=\psi^{-1}$, $\gamma=\varphi'/\varphi$, et $M(s)=\sup_r r^s e^{-\theta(r)}$.*

a) *Supposons que γ soit décroissante, et qu'il existe une constante $c \in]0, 1[$ telle que*

(27) *pour tout s assez grand,* $\gamma\big(s+\gamma(s)^{-1/2}\big) \geqq c\gamma(s)$.

Alors, on a

(28) $$\omega(r) \sim \sum_0^{+\infty} \frac{r^{2n}}{P(n)^2}, \quad où \quad P(n) = \gamma(n)^{-1/4} M(n).$$

b) *Supposons que γ soit croissante, et qu'il existe une constante C telle que*

(29) $$pour\ tout\ s \geqq 0,\ \gamma(s+1) \leqq C\gamma(s).$$

Alors, on peut écrire

(30) $\omega(r) \sim \sum_0^{+\infty} r^{2s_n}/M(s_n)^2$, *où la suite (s_n) est égale à la suite des* $p+k\gamma(p)^{-1/2}$, $p \in \mathbf{N}$ *et* $0 \leqq k \leqq E(\gamma(p)^{-1/2})-1$.

Indiquons très brièvement la preuve de ce résultat. Dans le cas a), qui correspond à Log φ concave, on commence par prouver que, dans le théorème 2, partie e), on peut définir la suite $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ par

$$(s_{k+1}-s_k)\mu'(s_{k+1})-\mu(s_{k+1})+\mu(s_k) \sim \mathrm{Cte}$$

c'est-à-dire $\int_{s_k}^{s_{k+1}} [\mu'(s_{k+1})-\mu'(s)]\, ds \sim \mathrm{Cte}$.

On montre ensuite qu'on peut prendre $s_{k+1}=s_k+\mu''(s_k)^{-1/2}$ (remarquer que $\mu''=\gamma$). En effet :

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} [\mu'(s_{k+1})-\mu'(s)]\, ds \leqq (s_{k+1}-s_k)^2\mu''(s_k) = 1,$$

et

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} [\mu'(s_{k+1})-\mu'(s)]\, ds \geqq \frac{1}{2}(s_{k+1}-s_k)^2\mu''(s_{k+1}) \geqq \frac{c}{2}.$$

Enfin, on prouve que, pour tout r,

$$\sum_{n=s_k}^{s_{k+1}} \frac{r^{2n}}{P(n)^2} \sim \frac{r^{2s_k}}{M(s_k)^2} + \frac{r^{2s_{k+1}}}{M(s_{k+1})^2},$$

ce qui est une conséquence de

$$\sum_{n=s_k}^{s_{k+1}} \mu''(n)^{1/2} \sim \mathrm{Cte}.$$

Le cas b) est une application directe de la preuve du théorème 2, que nous laissons au lecteur.

La condition (27) est seulement une condition de régularité, très peu exigeante. En revanche, la condition (29) porte aussi sur la taille de ω, et impose $\omega(r) \geqq e^{a \operatorname{Log} r \operatorname{Log}\operatorname{Log} r}$, pout une certaine constante $a>0$.

Pour illustrer ces résultats, voici quelques exemples :

1) $\omega(r)=e^{2ar^\alpha}$, $a, \alpha>0$. Alors, ω vérifie (28), avec $P(n)=n^{1/4}(n/a\alpha e)^{n/\alpha}$.

2) $\omega(r)=e^{2a(\operatorname{Log} r)^\alpha}$ (pour $r\geqq e$), $a>0$. Il faut distinguer deux cas. En premier, si

$\alpha \geqq 2$, ω vérifie (28) avec

$$P(n) = n^{\alpha-2/4(\alpha-1)} e^{bn^{\alpha/\alpha-1}}, \quad \text{où} \quad b = \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\frac{1}{a\alpha}\right)^{1/\alpha-1}.$$

Si $1<\alpha<2$, on a seulement (30), la suite (s_n) pouvant par exemple être égale à la suite des $p+k^{(\alpha-2)/2(\alpha-1)}$, où $p \in \mathrm{N}$ et $0 \leqq k < p^{(2-\alpha)/2(\alpha-1)}$, et $M(s)=e^{bs^{\alpha/\alpha-1}}$, b étant défini comme dans le premier cas.

Nous terminons ce paragraphe avec un résultat que nous utiliserons plus tard :

Lemme 2. *Soit* $\omega=e^{2\theta}$ *un poids tel que* $\psi(r)=r\theta'(r)$ *soit croissante non bornée et tel que* $\theta(r)-\mathrm{Log}\, r$ *soit concave. Définissant* $M(s)$ *de la façon habituelle, on pose* $a_k=M(k)/k!$. *Alors, la suite* (a_k) *est log-convexe, et il existe une constante C telle que*

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 a_{n-k}^2 \leqq C a_{n-1}^2. \tag{31}$$

Si, de plus, ω *vérifie les hypothèses* a) *de la proposition* 3, *alors on a le même résultat avec la suite des* $b_k=P(k)/k!$.

Nous allons en fait montrer que la suite $ka_k=M(k)/(k-1)!$ est log-convexe, ce qui suffit à prouver la première partie du lemme. Pour cela, il faut démontrer que la fonction $s \to M(s)/(s-1)M(s-1)$ est croissante, c'est-à-dire que

$$\mu'(s)-\mu'(s-1)-\frac{1}{1-s} \geqq 0. \tag{32}$$

Or, il existe, pour chaque s fixé, un réel $\sigma \in]0, 1[$ tel que $\mu'(s)-\mu'(s-1)=\mu''(s-\sigma)$. (32) est alors une conséquence élémentaire de la concavité de $\theta(r)-(1-\sigma)\,\mathrm{Log}\, r$.

La deuxième partie du lemme découle de la première et de l'hypothèse que Log φ est concave.

Les applications que nous présentons maintenant du théorème 2 généralisent de manière naturelle des résultats connus dans le cadre des espaces de Sobolev.

Pour alléger le texte, nous dirons que ω est du type 1 si ω vérifie les conditions a) de la proposition 3 et si la suite des $b_k=P(k)/k!$ est log-convexe et vérifie (31) ; et nous dirons que ω est du type II si ω est tel que Log φ soit convexe (c'est-à-dire γ croissante) et si la suite des $a_k=M(k)/k!$ est log-convexe et vérifie (31).

On peut voir que, quand ω est du type II, on a

$$\omega(r) \sim \sum_0^{+\infty} \frac{r^{2s_n}}{M(s_n)^2},$$

où la suite des s_n contient tous les entiers naturels.

Tous les exemples de poids que nous avons cités sont du type I ou du type II.

4. Un théorème de trace

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^n$, de frontière Γ, la normale intérieure à Γ étant notée ν. Si f est de classe C^∞ dans un voisinage de Ω, on définit la trace sur Γ de f par

$$\mathrm{Tr}\, f = \left(f|_\Gamma, \frac{\partial f}{\partial \nu}\bigg|_\Gamma, \ldots, \frac{\partial^k f}{\partial \nu^k}\bigg|_\Gamma, \ldots\right). \tag{33}$$

ω étant donné, on définit l'espace $A_\omega(\Omega)$ des restrictions à Ω des éléments de A_ω, et l'espace $A_{\omega,0}(\Omega)$ des éléments de A_ω nuls sur Ω^c. On a alors :

Théorème 3. *Si ω est un poids vérifiant les conditions* a) *du théorème* 2, *alors*

$$A_{\omega,0}(\Omega) = \{f\in A_\omega(\Omega);\ \mathrm{Tr}\,(f) = 0\}.$$

Dans cet énoncé, nous confondons dans la même notation l'élément f de A_ω et sa restriction à Ω.

Puisque $A_\omega \subset C^\infty(\mathbf{R}^n)$, il est clair que

$$A_{\omega,0}(\Omega) \subset \{f\in A_\omega(\Omega);\ \mathrm{Tr}\, f = 0\}.$$

Réciproquement, soit f telle que $\mathrm{Tr}\, f=0$. On définit $g\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ par $g(x)=f(x)\chi_\Omega(x)$, χ_Ω étant la fonction caractéristique de Ω. Alors, on a

$$\forall \alpha\in\mathbf{N}^n \quad \partial^\alpha g = (\partial^\alpha f)\chi_\Omega. \tag{34}$$

On en déduit que, si $k\in\mathbf{N}$, alors $\|g\|_{B^k} \leqq \|f\|_{B^k}$. Ensuite, par interpolation complexe, il vient

$$\forall s \geqq 0 \quad \|g\|_{B^s} \leqq \|f\|_{B^s}. \tag{35}$$

Grâce au théorème 2, on peut écrire

$$\omega(x) \sim \sum_0^{+\infty} \frac{|x|^{2s_n}}{M(s_n)^2}.$$

(35) implique immédiatement que $g\in A_\omega$, et $\|g\|_{A_\omega} \leqq C\|f\|_{A_\omega}$, où C ne dépend que du poids ω. Cela prouve le théorème 3.

5. Multiplicateurs sur les algèbres A_ω non quasi-analytiques

Nous supposons maintenant que A_ω est une algèbre de Banach non quasi-analytique. C'est le cas en particulier quand ω est un poids de Gevrey, ou quand $\omega(x)=\exp[a(\mathrm{Log}|x|)^\alpha]$, $a>0$ et $\alpha>1$ (on le voit en appliquant le lemme 1). Dans ce paragraphe, nous nous proposons de caractériser explicitement les multiplicateurs ponctuels de A_ω, quand ω est un poids à croissance rapide du type I ou II.

Il n'est pas difficile de voir que, si A_ω est une algèbre, ω vérifie (2), avec $\theta_\infty(t) \leqq \theta(t)+C$. Si A_ω est non quasi-analytique, ω vérifie donc (3) également. On en déduit alors, à l'aide des propositions 1 et 2, le lemme suivant :

Lemme 3. *$m(x)$ est un multiplicateur ponctuel de A_ω si et seulement si m appartient localement uniformément à A_ω, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $\Delta \in A_\omega$ valant 1 sur $[-1, 1]^n$ telle que $m(x)\ \Delta(x-t) \in A_\omega$ uniformément par rapport à $t \in \mathbf{R}^n$.*

Naturellement, on peut remplacer le cube unité par n'importe quel compact d'intérieur non vide. Le lemme est laissé au lecteur (la preuve se trouve dans [5]). Il permet de prouver le

Théorème 4. *Soit A_ω une algèbre non quasi-analytique.*
a) *Si ω est du type I, alors $m(x)$ est un multiplicateur de A_ω si et seulement s'il existe une suite $(\varepsilon(\alpha)) \in l^2(\mathbf{N}^n)$ telle que*

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^n \quad \sup_{t \in \mathbf{R}^n} \|\partial^\alpha m(x) \chi(x-t)\|_2 \leqq \varepsilon(\alpha) a(\alpha), \tag{36}$$

où χ est la fonction caractéristique du cube unité, et où

$$a(\alpha) = \left(\frac{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}{|\alpha|!}\right)^{1/2} P(|\alpha|), \tag{37}$$

la suite $(P(k))$ étant donnée par (28).
b) *Si ω est du type II, on écrit*

$$\omega(x) \sim \sum_0^{+\infty} \frac{|x|^{2s_k}}{M(s_k)^2},$$

et on note $s_k = n_k + \sigma_k$, où n_k est la partie entière de s_k. On pose ensuite, si $\alpha \in \mathbf{N}^n$:

$$\begin{cases} R(\alpha, 0) = \left(\dfrac{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}{|\alpha|!}\right)^{1/2} M(|\alpha|), \quad et \\[2mm] R(\alpha, \sigma) = \left(\dfrac{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}{|\alpha|!}\right)^{1/2} \dfrac{M(|\alpha|+\sigma)}{\sigma^{1/2}(1-\sigma)^{1/2}} \quad si \quad 0 < \sigma < 1. \end{cases} \tag{38}$$

Alors, $m(x)$ est un multiplicateur de A_ω si et seulement s'il existe une suite $(\varepsilon(\alpha, \sigma_k)) \in l^2(\mathbf{N}^n \times \mathbf{N})$ telle que

$$\begin{cases} \sup\limits_{t \in \mathbf{R}^n} \|\partial^\alpha m(x) \chi(x-t)\|_2 \leqq \varepsilon(\alpha, 0) R(\alpha, 0), \quad et \\[2mm] \sup\limits_{t \in \mathbf{R}^n} \left(\displaystyle\iint \frac{|\partial^\alpha m(x+y) - \partial^\alpha m(x)|^2 \chi(x-t)}{|y|^{n+2\sigma_k}} dx\, dy\right)^{1/2} \leqq \varepsilon(\alpha, \sigma_k) R(\alpha, \sigma_k) \end{cases} \tag{39}$$

si $0 < \sigma_k < 1$ (χ est encore la fonction caractéristique du cube unité).

La démonstration est lourde, surtout dans le cas b). Celui-ci ne différant du cas a) que par des modifications non essentielles, nous ne donnons que la preuve de a).

Indiquons toutefois que le coefficient $\sigma(1-\sigma)$ qui apparaît dans (38), et peut sembler étrange, provient de la relation suivante :

$$\int |\hat{f}(u)|^2 |u|^{2\sigma} du = C(\sigma, n) \iint \frac{|f(x+y)-f(x)|^2}{|y|^{n+2\sigma}} dx\, dy,$$

où $C(\sigma, n) \sim \sigma(1-\sigma) C(n)$.

Prouvons donc a). ω étant du type I, on a

$$\omega(x) \sim \sum_0^{+\infty} \frac{|x|^{2k}}{P(k)^2}.$$

En développant $|x|^{2k} = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^k$, il vient

$$\omega(x) \sim \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \frac{x^{2\alpha}}{a(\alpha)^2}, \tag{40}$$

où $x^{2\alpha} = x_1^{2\alpha_1} \ldots x_n^{2\alpha_n}$. Le lemme 3 permet alors de conclure à la nécessité de la condition (36).

Réciproquement, supposons que $m(x)$ vérifie (36), On choisit $\Delta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ à support dans le cube unité, par exemple, et telle que

$$\|\partial^\alpha \Delta\|_\infty \leqq \frac{a(\alpha)}{(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n)}$$

(Δ existe parce que ω est non quasi-analytique). Alors, on a

$$\|\partial^\alpha m(x) \Delta(x-t)\|_2 \leqq \sum_{k+l=\alpha} C_{\alpha_1}^{k_1} \ldots C_{\alpha_n}^{k_n} \frac{a(k)}{(1+k_1)\ldots(1+k_n)} \varepsilon(l) a(l)$$

$$\leqq \left\{\sum_{k+l=\alpha} [C_{\alpha_1}^{k_1} \ldots C_{\alpha_n}^{k_n}]^2 a(k)^2 a(l)^2\right\}^{1/2} \varepsilon^*(\alpha)$$

où

$$\varepsilon^*(\alpha) = \left(\sum_{k+l=\alpha} \frac{\varepsilon(l)^2}{(1+k_1)^2 \ldots (1+k_n)^2}\right)^{1/2} \in l^2(\mathbf{N}^n).$$

D'après le lemme 3, il suffit, pour prouver le théorème, de montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\sum_{k+l=\alpha} [C_{\alpha_1}^{k_1} \ldots C_{\alpha_n}^{k_n}]^2 a(k)^2 a(l)^2 \leqq C a(\alpha)^2. \tag{41}$$

On utilise la relation

$$\sum_{k_1+\ldots+k_n=m} C_{\alpha_1}^{k_1} \ldots C_{\alpha_n}^{k_n} = C_{|\alpha|}^m,$$

ce qu'un développement de l'identité suivante fait voir tout de suite :

$$(1+t)^{\alpha_1} \ldots (1+t)^{\alpha_n} = (1+t)^{|\alpha|}.$$

On en déduit alors que (41) se ramène à

$$\sum_{m=0}^{|\alpha|} \frac{P(m)^2}{m!^2} \frac{P(|\alpha|-m)^2}{(|\alpha|-m)!^2} \leqq C \frac{P(|\alpha|)^2}{|\alpha|!^2},$$

qui nous est donné par le lemme 2.

La partie a) du théorème est donc démontrée. Comme nous l'avons annoncé, nous laissons la partie b) au lecteur intéressé.

6. Fonctions qui opèrent sur les algèbres A_ω non quasi-analytiques

Nous nous plaçons, dans ce dernier paragraphe, en dimension $n=1$. Nous dirons que $g: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ opère sur A_ω si $g \circ f \in A_\omega$ dès que f est à valeurs réelles et $f \in A_\omega$.

Si A_ω est non quasi-analytique, choisissant $f \in A_\omega$ telle que $f(x)=Cx$ sur un intervalle borné de $\mathbf{R}$, $C>0$ étant arbitraire, on voit que, si g opère sur A_ω, nécessairement $g(Cx)$ appartient localement à A_ω. Le fait que la constante C soit quelconque est évidemment crucial quand le poids ω est à croissance rapide. En fait, nous avons

Théorème 5. *Supposons que* $\omega(x)/(1+x^2)$ *soit du type* I *ou* II, *et vérifie* (1) *(condition de non quasi-analyticité). Alors une fonction* g *opère sur* A_ω *si et seulement si* $g(0)=0$, *et* $g(Cx)$ *appartient localement à* A_ω *quel que soit* $C>0$.

La preuve de ce théorème est fondée sur le lemme suivant :

Lemme 4. *Sous les hypothèses précédentes, il existe une constante* A, *dépendant de* ω, *telle que, si* $f \in A_\omega$ *est à valeurs réelles et si* $t \in \mathbf{R}^+$, *alors*

$$\|e^{itf}-1\|_{A_\omega} \leqq \omega(A\|f\|_{A_\omega} t)^{1/2}. \tag{42}$$

On peut voir, grâce au lemme 1, que les hypothèses du théorème entraînent que A_ω est une algèbre. De sorte qu'on a toujours $e^{itf}-1 \in A_\omega$, même si f est à valeurs complexes. Pour obtenir (42), le fait que f soit à valeurs réelles est donc primordial.

Le lemme 4 permet de prouver le théorème 5 suivant une technique classique (voir par exemple Kahane [3], chapitre VI). Soit g obéissant aux conditions requises, et $f \in A_\omega$ à valeurs réelles. Puisque f est bornée, on peut supposer que $g(Cx) \in A_\omega$, où la constante C sera choisie dans un instant. Alors, puisque $g(0)=0$:

$$g \circ f = \frac{1}{2\pi} \int (e^{itf}-1)\, g(t)\, dt.$$

Il suffit alors de choisir $C > A\|f\|_{A_\omega}$ pour obtenir $g \circ f \in A_\omega$.

Il nous faut donc démontrer le lemme. Là encore, nous nous contenterons de donner la preuve quand ω est du type I, où tous les ingrédients essentiels sont réunis.

Le point de départ est la formule suivante, dite de Faa di Bruno : si f et $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$, on a

(43) $$\varphi \circ f^{(n)} = \sum_{\substack{n=n_1+\ldots+n_p \\ n_i \geqq 1, 1 \leqq p \leqq n}} C_n^{n_1, \ldots, n_p} \frac{1}{p!} f^{(n_1)} \ldots f^{(n_p)} \varphi^{(p)} \circ f,$$

où

$$C_n^{n_1, \ldots, n_p} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_p!}.$$

Le deuxième ingrédient majeur, comme d'habitude, est l'écriture

$$\frac{\omega(x)}{1+x^2} \sim \sum_0^{+\infty} \frac{x^{2n}}{P(n)^2},$$

qui montre que $f \in A_\omega$ si et seulement si $\|f^{(n)}\|_{H^1} \leqq \varepsilon(n) P(n)$ où $\varepsilon(n) \in l^2(\mathbf{N})$. L'intérêt d'exprimer l'appartenance à A_ω à l'aide des quantités $\|f^{(n)}\|_{H^1}$ vient de ce que $H^1(\mathbf{R})$ est une algèbre.

Posons, $t \in \mathbf{R}^+$ étant fixé, $F = e^{itf} - 1$. Alors, (43) implique, si $n \geqq 1$:

$$F^{(n)}(x) = \sum_{\substack{n=n_1+\ldots+n_p \\ n_i \geqq 1, 1 \leqq p \leqq n}} C_n^{n_1, \ldots, n_p} \frac{(it)^p}{p!} f^{(n_1)}(x) \ldots f^{(n_p)}(x) e^{itf(x)}.$$

$e^{itf(x)}$ est un multiplicateur de H^1, de norme inférieure à $1 + \|e^{itf} - 1\|_{H^1}$, et donc à $1 + t\|f\|_{H^1}$: c'est ici qu'on utilise le fait que f soit à valeurs réelles. Ainsi

$$\|F^{(n)}\|_{H^1} \leqq (1+t\|f\|_{H^1}) \sum_{\substack{n=n_1+\ldots+n_p \\ n_i \geqq 1, 1 \leqq p \leqq n}} C_n^{n_1, \ldots, n_p} \frac{(6t)^p}{p!} \|f\|_{H^1}^{(n_1)} \ldots \|f\|_{H^1}^{(n_p)}$$

la constante 6 provenant de (6) et du lemme 1.

On écrit maintenant $\|f^{(k)}\|_{H^1} = \varepsilon(k) P(k)$, avec $\sum_k \varepsilon(k)^2 \sim \|f\|_{A_\omega}^2$, et on pose $b(k) = P(k)/k!$. On a :

$$\|F^{(n)}\|_{H^1} \leqq (1+t\|f\|_{H^1}) \sum_{\substack{n=n_1+\ldots+n_p \\ n_i \geqq 1, 1 \leqq p \leqq n}} \frac{(6t)^p}{p!} b(n_1) \ldots b(n_p) \varepsilon(n_1) \ldots \varepsilon(n_p) \frac{P(n)}{b(n)},$$

soit

(44) $$\|F^{(n)}\|_{H^1} \leqq (1+t\|f\|_{H^1}) 6t (\varepsilon(n) P(n) + u_n).$$

Si $B > 0$ est une constante qu'on choisira plus tard, on a

$$u_n = \sum_{\substack{n=n_1+\ldots+n_p \\ n_i \geqq 1, 2 \leqq p \leqq n}} \frac{(6Bt)^{p-1}}{P(p-1)} \frac{B^{-p+1}}{p} b(p-1) b(n_1) \ldots b(n_p) \varepsilon(n_1) \ldots \varepsilon(n_p) \frac{P(n)}{b(n)},$$

d'où

$$u_n^2 \leqq \left(\sum_{p=2}^n \frac{(6Bt)^{2p-2}}{P(p-1)^2} \right) \left(\sum_{p=2}^n \frac{B^{-2p+2}}{p^2} v_{n,p}^2 \right) \frac{P(n)^2}{b(n)^2},$$

avec

$$v_{n,p} = \sum_{\substack{n=n_1+\ldots+n_p \\ n_i \geqq 1}} b(p-1) b(n_1) \ldots b(n_p) \varepsilon(n_1) \ldots \varepsilon(n_p).$$

Or, une récurrence permet, à partir du lemme 2, de prouver qu'il existe $C>0$ telle que

$$b(p-1)^2 \sum_{\substack{n=n_1+\ldots+n_p \\ n_i \geqq 1}} b(n_1)^2 \ldots b(n_p)^2 \leqq C^{2p-2} b(n)^2.$$

Par conséquent, en posant

$$\varepsilon_p(n) = \Big(\sum_{\substack{n=n_1+\ldots+n_p \\ n_i \geqq 1}} \varepsilon(n_1)^2 \ldots \varepsilon(n_p)^2\Big)^{1/2},$$

on voit que

$$v_{n,p}^2 \leqq C^{2p-2} b(n)^2 \varepsilon_p(n)^2,$$

d'où

$$u_n^2 \leqq \omega(6Bt) \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^2} \left(\frac{C}{B}\right)^{2p-2} \varepsilon_p(n)^2 P(n)^2.$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_p(n)^2 \leqq \|f\|_{A_\omega}^{2p}$, en choisissant $B=C\|f\|_{A_\omega}$, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n^2}{P(n)^2} \leqq \omega(6Bt) = \omega(6C\|f\|_{A_\omega} t).$$

Cette relation, jointe à (44), prouve le lemme, et achève de prouver le théorème.

Bibliographie

1. Beurling, A. and Malliavin, P., On Fourier transforms of measures with compact supports, *Acta Math.* **107** (1962), 291—309.
2. Domar, Y., Closed primary ideals in a class of Banach algebras, *Math. Scand.* **7** (1959), 109—125.
3. Kahane, J. P., *Séries de Fourier absolument convergentes,* Springer, Berlin etc., 1970.
4. Paley, R. E. A. C. and Wiener, N., *Fourier transforms in the complex domain,* AMS Colloquium Publications, vol. XIX, Am. Math. Soc., New York, 1934.
5. Tchamitchian, P., Généralisation des algèbres de Beurling, *Ann. Inst. Fourier* **34** (1984), 151—168.

Received March 21, 1986

Service de Mathématiques
Faculté des Sciences et Techniques
de Saint—Jérôme
Rue Henri Poincaré
F—13 397 Marseille Cedex 13
France