Semi-groupes de moments sur $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{C}^p$

Henri Buchwalter

On sait, par la monographie de Fuglede [6], que le problème des moments réels multidimensionnel sur $\mathbf{R}^p$ n'a pas reçu de réponse positive satisfaisante autre que le critère général de Haviland [7] rappelé ci-dessous. Il en est évidemment de même du problème des moments complexes sur $\mathbf{C}^p$. Toutefois rien n'empêche de considérer le problème des semi-groupes correspondant, déjà résolu pour le cas de la dimension réelle un dans [8] et [4], et pour le cas d'un convexe compact de $\mathbf{R}^p$ dans [2].

Nous offrons ici une solution complète du problème à la fois sur l'espace $\mathbf{R}^p$ et sur l'espace $\mathbf{C}^p$, intéressante par le fait que la caractérisation donnée n'est pas aussi simple qu'on pouvait l'espérer par l'examen attentif des cas précédemment évoqués. En particulier il semble impossible de l'exprimer par un nombre fini de conditions faisant intervenir les monômes élémentaires X_k dans le cas réel et $Z_k = X_k + iY_k$ dans le cas complexe. De plus, dans le cas complexe, on voit apparaître l'existence de formes hermitiennes 2-homogènes d'un genre nouveau, qui ne sont pas de type positif, mais qui remplacent les formes quadratiques positives habituelles de la théorie.

Fixons donc l'entier $p \geqq 1$ et l'espace $\mathbf{R}[X] = \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_p]$ des polynômes à p indéterminées. On rappelle qu'une suite $\alpha = (\alpha_n)$, $n = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbf{N}^p$, est une suite de moments sur $\mathbf{R}^p$ lorsqu'il existe une mesure positive μ sur $\mathbf{R}^p$ telle que

$$\alpha_n = \int t^n \, d\mu(t) = \int t_1^{n_1} \ldots t_p^{n_p} \, d\mu(t_1, \ldots, t_p)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^p$. Pour exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que α soit une suite de moments, il faut rappeler rapidement que l'espace $\mathbf{R}[X]$ opère sur l'espace S de toutes les suites α selon

$$(1) \qquad (P\alpha)_n = \textstyle\sum_k u_k \alpha_{n+k} \quad \text{si} \quad P = \sum u_k X^k$$

ce qui permet de définir la forme bilinéaire canonique

$$(2) \qquad \langle \alpha, P \rangle = (P\alpha)_0 = \textstyle\sum u_k \alpha_k \quad \text{si} \quad P = \sum u_k X^k$$

qui met évidemment en dualité l'espace $\mathbf{R}[X]$ identifié à la somme directe $\mathbf{R}^{(\mathbf{N}^p)}$ et l'espace S identifié au produit $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^p}$. Si P et Q sont deux polynômes on a alors de façon évidente les formules:

$$\left\{\begin{array}{l} P(Q\alpha) = (PQ)\alpha = Q(P\alpha) \\ \langle P\alpha, Q\rangle = \langle Q\alpha, P\rangle = \langle \alpha, PQ\rangle = (PQ\alpha)_0. \end{array}\right. \tag{3}$$

Ceci étant dit le critère suivant est classique et se démontre par le théorème de Hahn—Banach. Pour l'écrire désignons par $\mathfrak{M}$ l'espace des suites de moments.

Théorème 1 (Haviland [7]). *Pour qu'une suite $\alpha \in S$ soit élément de $\mathfrak{M}$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\langle \alpha, R\rangle \geqq 0$$

pour tout polynôme $R \geqq 0$ sur $\mathbf{R}^p$.

Il suit facilement de là, ou directement de la définition, que si $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}$ la suite produit $\alpha\beta = (\alpha_n \beta_n)$ est encore élément de $\mathfrak{M}$, de même que la suite $\exp(t\alpha) = (e^{t\alpha_n})$, $t \geqq 0$. Le problème des semi-groupes sur $\mathbf{R}^p$ consiste à caractériser toutes les suites α telles que l'on ait $\exp(t\alpha) \in \mathfrak{M}$ pour tout $t \geqq 0$, ce qui revient à dire que α engendre un semi-groupe de moments sur $\mathbf{R}^p$ par exponentiation positive.

La difficulté de la question est liée d'une part au fait que la mesure μ représentant α n'est pas unique, et d'autre part que la caractérisation du théorème 1 est distincte, dès que $p \geqq 2$, de la condition que la suite α soit de type positif, condition qui se traduirait par l'inégalité $\langle \alpha, P^2\rangle \geqq 0$ pour tout polynôme P, la différence provenant de l'existence dans $\mathbf{R}[X]$ de polynômes $R \geqq 0$ qui ne sont pas des sommes de carrés. Pour ces questions, et celles annexes, on pourra consulter le livre de Berg, Christensen et Ressel [1], dans son chapitre 6 en particulier.

Donnons immédiatement une condition nécessaire.

Proposition 1. *Soit* $\exp(t\alpha)$, $t \geqq 0$, *un semi-groupe de moments sur $\mathbf{R}^p$. On a alors*

$$\langle \alpha, R\rangle \geqq 0$$

pour tout polynôme $R \geqq 0$ sur $\mathbf{R}^p$ tel que $R(1) = 0$.

Preuve. Il suffit d'écrire

$$\langle \exp t\alpha, R\rangle \geqq 0 \quad \text{et} \quad \langle 1, R\rangle = R(1) = 0$$

ce qui donne

$$\left\langle \frac{1}{t}(\exp t\alpha - 1), R\right\rangle \geqq 0$$

pour $t > 0$. Le passage à la limite $t \downarrow 0$ démontre l'inégalité cherchée. $\square$

Avant d'examiner une réciproque, il faut présenter quelques préliminaires.

1. Préliminaires

Pour simplifier l'écriture raisonnons ici en fixant l'origine 0 plutôt que le point $\mathbf{1}$. Il suffira ensuite pour l'application de remplacer la variable $X=(X_k)$ par $X-\mathbf{1}=(X_k-1)$. Désignons par $\mathscr{P}_0^+$ le cône convexe des polynômes $R\geqq 0$ sur $\mathbf{R}^p$ et tels que $R(0)=0$, et posons $\mathscr{P}_0=\mathscr{P}_0^+-\mathscr{P}_0^+$. On a déjà la caractérisation suivante:

Lemme 1. *Pour que* $R\in\mathscr{P}_0$ *il faut et il suffit que l'on ait* $R(0)=0$ *et* $\dfrac{\partial R}{\partial X_k}(0)=0$ *pour tout* $k=1,2,\dots,p$.

Preuve. La condition est nécessaire car un polynôme $R\in\mathscr{P}_0^+$ ne peut avoir ni terme constant, ni termes du premier degré. Réciproquement si R vérifie la condition, on peut le développer sous la forme

$$R=\sum\nolimits_{k,l} X_k X_l A_{k,l}$$

avec $A_{k,l}\in\mathbf{R}[X]$. Mais pour $k\neq l$

$$X_k X_l=\left(\frac{X_k+X_l}{2}\right)^2-\left(\frac{X_k-X_l}{2}\right)^2$$

de sorte qu'en décomposant $A_{k,l}$ en différence $B_{k,l}-C_{k,l}$ de deux polynômes positifs ou nuls sur $\mathbf{R}^p$, ce qui est loisible, on voit apparaître une décomposition $R=S-T$ avec $S, T\in\mathscr{P}_0^+$. □

Pour exprimer le lemme 2 il convient d'utiliser les coordonnées sphériques en posant $r=(X_1^2+\dots+X_p^2)^{1/2}$ et $X=r\omega$, où ω décrit la sphère unité Σ de $\mathbf{R}^p$.

Lemme 2. *Pour tout* $R\in\mathscr{P}_0$ *on a, avec* $x=r\omega$, ω *fixé*

$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{R(x)}{r^2}=Q(\omega)=\frac{1}{2}\sum\nolimits_{k,l}\frac{\partial^2 R}{\partial X_k\partial X_l}(0)\,\omega_k\omega_l$$

où le passage à la limite se fait uniformément par rapport à $\omega\in\Sigma$.

Preuve. Il suffit de décomposer R en parties homogènes pour voir que $R(x)=r^2Q(\omega)+O(r^3)$, où le terme $O(r^3)$ se majore uniformément en ω. □

Introduisons maintenant l'espace de fonctions continues sur $\mathbf{R}^p$, noté $\mathscr{C}_0$ et défini par les conditions:

$$\text{(4)}\qquad\begin{cases}\text{a) } f \text{ est continue et il existe } R\in\mathscr{P}_0^+ \text{ tel que } |f|\leqq R\\[1ex] \text{b) On a } \lim\limits_{r\downarrow 0}\dfrac{f(r\omega)}{r^2}=g(\omega),\ \omega \text{ fixé, uniformément en } \omega\in\Sigma.\end{cases}$$

On associe ainsi à chaque $f \in \mathscr{C}_0$ une fonction g continue sur la sphère Σ. Bien entendu $\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{C}_0$ et si $f=R$ alors $g=Q$ d'après le lemme 2. De plus, en désignant par $\mathscr{K}_0$ l'espace $\mathscr{K}(\mathbf{R}^p \setminus \{0\})$ des fonctions continues à support compact contenu dans $\mathbf{R}^p \setminus \{0\}$, on voit que $\mathscr{K}_0 \subset \mathscr{C}_0$ et que $g=0$ si $f \in \mathscr{K}_0$.

Cela étant on a:

Proposition 2. *Toute forme linéaire positive L_0 sur $\mathscr{P}_0$ se prolonge en une forme linéaire positive L sur $\mathscr{C}_0$.*

Preuve. Elle est classique. Il suffit d'introduire sur $\mathscr{C}_0$ la fonctionnelle

$$q(f) = \inf \{L_0(R),\ f \leqq R,\ R \in \mathscr{P}_0\}$$

et de vérifier que q est sous-linéaire et telle que $q(R)=L_0(R)$ pour $R \in \mathscr{P}_0$. D'après Hahn—Banach il existe une forme linéaire L sur $\mathscr{C}_0$, prolongeant L_0, et telle que $L(f) \leqq q(f)$. Alors L est positive car si $f \leqq 0$ on a $L(f) \leqq q(f) \leqq 0$. □

Pour aller plus loin il faut expliciter, en termes de mesures, toutes les formes linéaires positives L sur $\mathscr{C}_0$.

Proposition 3. *Pour toute forme linéaire positive L sur $\mathscr{C}_0$, il existe une mesure λ sur l'espace $\mathbf{R}^p \setminus \{0\}$, telle que $\int r^m \, d\lambda < +\infty$ pour tout entier $m \geqq 2$, et une mesure ν sur la sphère Σ, telles que l'on ait, pour toute $f \in \mathscr{C}_0$*

$$L(f) = \int f \, d\lambda + \int g \, d\nu$$

où $g \in C(\Sigma)$ est la fonction associée à f par (4).

Preuve. La restriction de L à $\mathscr{K}_0$ définit déjà une mesure positive λ sur $\mathbf{R}^p \setminus \{0\}$. Si (φ_n) est une suite croissante dans $\mathscr{K}_0^+$, telle que $\varphi_n \uparrow 1$ sur $\mathbf{R}^p \setminus \{0\}$, alors $|f| \varphi_n \in \mathscr{K}_0$ et

$$\int |f| \varphi_n \, d\lambda = L(|f| \varphi_n) \leqq L(|f|)$$

de sorte que, par limite monotone, on obtient

$$\int |f| \, d\lambda \leqq L(|f|) \tag{5}$$

ce qui prouve que toute $f \in \mathscr{C}_0$ est λ-intégrable, et en particulier $f=r^m$ avec $m \geqq 2$. Posons maintenant

$$M(f) = L(f) - \int f \, d\lambda \tag{6}$$

ce qui définit, d'après (5), une forme linéaire positive sur $\mathscr{C}_0$.

Remarquons maintenant classiquement que pour toute $f \in \mathscr{C}_0$ il existe une fonction $h \in \mathscr{C}_0$ telle que l'on ait $h > 0$ sur $\mathbf{R}^p \setminus \{0\}$ et $f/h \to 0$ à l'infini. Si l'on choisit $f \geqq 0$ telle que $g=0$, il est alors possible de choisir h telle que $f/h \to 0$ aussi quand $\|x\| \to 0$, et si l'on a pris la précaution de choisir la suite $\varphi_n \uparrow 1$ de façon que la suite des compacts $K_n = \{\varphi_n = 1\}$ soit croissante et exhaustive dans $\mathbf{R}^p \setminus \{0\}$, on voit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que l'on ait

$$f(1-\varphi_n) \leqq \varepsilon h$$

pour $n \geqq N$. Alors $f \leqq f\varphi_n + \varepsilon h$, d'où l'on déduit

$$L(f) \leqq \int f\varphi_n \, d\lambda + \varepsilon L(h)$$

puis $L(f) \leqq \int f \, d\lambda$. Ainsi la condition $g=0$ implique $M(f)=0$, de sorte que, pour $f \in \mathscr{C}_0$ quelconque, on obtient $M(f-r^2 g)=0$, ou encore $M(f)=M(r^2 g)$.

Mais l'application $g \to M(r^2 g)$ est évidemment une forme linéaire positive sur $C(\Sigma)$, donc définit une mesure ν sur la sphère Σ, telle que $M(f)=\int g \, d\nu$. En résumé on a bien

$$L(f) = \int f \, d\lambda + M(f) = \int f \, d\lambda + \int g \, d\nu$$

ce qui termine la preuve. □

2. Semi-groupes de moments sur $\mathbf{R}^p$

On peut maintenant énoncer le résultat général résolvant complètement le problème, le cône $\mathscr{P}_0^+$ étant évidamment associé au point **1**.

Théorème 2. *Soit* $\alpha = (\alpha_n)$, $n \in \mathbf{N}^p$, *une suite quelconque. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) La suite α *engendre un semi-groupe de moments* $\exp t\alpha$, $t \geqq 0$, *sur* $\mathbf{R}^p$.

b) Pour tout $R \in \mathscr{P}_0^+$ *on a* $\langle \alpha, R \rangle \geqq 0$.

b') Pour tout $R \in \mathscr{P}_0^+$ *on a* $R\alpha \in \mathfrak{M}$.

c) Il existe une constante $a \in \mathbf{R}$, *un vecteur* $b=(b_k) \in \mathbf{R}^p$, *une forme quadratique positive* q *sur* $\mathbf{R}^p$, *et une mesure* λ *sur* $\mathbf{R}^p \setminus \{\mathbf{1}\}$ *telle que*

$$\int \left[\textstyle\sum_k (X_k-1)^2\right](1+r^2)^m \, d\lambda < +\infty$$

pour tout entier $m \geqq 0$, *avec* $r^2 = \Sigma X_k^2$, *permettant d'exprimer* α *selon*

$$\alpha_n = a + \textstyle\sum_k b_k n_k + \frac{1}{2} q(n) + \int \left[X^n - 1 - \sum_k n_k (X_k - 1)\right] d\lambda.$$

Preuve.

$a \Rightarrow b$: c'est la proposition 1.

$b \Rightarrow b'$: car on a $R\alpha \in \mathfrak{M}$ si et seulement si $\langle R\alpha, T \rangle \geqq 0$ pour tout polynôme $T \geqq 0$. Or $\langle R\alpha, T \rangle = \langle \alpha, RT \rangle$ et $RT \in \mathscr{P}_0^+$, ce qui ramène à *b)*.

$b' \Rightarrow b$: évident puisque $\langle \alpha, R \rangle = (R\alpha)_0$.

$b \Rightarrow c$: c'est le point-clé. D'après *b)* la fonctionnelle $R \to \langle \alpha, R \rangle$ est une forme linéaire positive sur l'espace $\mathscr{P}_0$ (associé ici au point **1**), donc il existe d'après la proposition 3 une mesure λ sur $\mathbf{R}^p\setminus\{\mathbf{1}\}$, ayant les propriétés de *c)*, et une mesure ν sur la sphère Σ, telles que l'on ait, pour tout $R\in\mathscr{P}_0$

$$\langle\alpha, R\rangle = \int R\,d\lambda + \int Q\,d\nu \tag{7}$$

où $Q(\omega)$ est défini par

$$Q(\omega) = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{k,l}\frac{\partial^2 R}{\partial X_k \partial X_l}(\mathbf{1})\,\omega_k\omega_l.$$

Considérons maintenant le monôme X^n. On a évidemment

$$X^n - 1 - \sum\nolimits_k n_k(X_k-1) = R\in\mathscr{P}_0$$

et la fonction Q associée est donnée par

$$Q(\omega) = \tfrac{1}{2}\left[\sum\nolimits_k n_k(n_k-1)\,\omega_k^2 + \sum\nolimits_{k\neq l} n_k n_l \omega_k \omega_l\right]$$

de sorte qu'en utilisant (7) on obtient

$$\langle\alpha, X^n - 1 - \sum\nolimits_k n_k(X_k-1)\rangle = \int R\,d\lambda - \tfrac{1}{2}\sum\nolimits_k n_k \int \omega_k^2\,d\nu + \tfrac{1}{2}\,q(n)$$

avec

$$q(n) = \sum\nolimits_{k,l}\gamma_{k,l}\,n_k n_l = \int\left(\sum\nolimits_k n_k\omega_k\right)^2 d\nu \geqq 0 \tag{8}$$

et $\gamma_{k,l} = \int \omega_k\omega_l\,d\nu$. Il reste à voir l'égalité $\alpha_n = \langle\alpha, X^n\rangle$ pour obtenir l'égalité de *c)*.

$c\Rightarrow a$: Le résultat est classique. Il suffit de remarquer, grâce aux propriétés des mesures gaussiennes, que $q/2$ engendre un semi-groupe de moments. On procède ensuite en deux temps, le premier étant celui où $\int d\lambda < +\infty$, et le second s'y ramenant par troncature et passage à la limite. □

Il convient d'ajouter au résultat obtenu des commentaires illustrant l'intérêt de la condition *b)* et le peu d'espoir que l'on peut avoir pour l'améliorer. De ce point de vue la situation est radicalement différente du cas des semi-groupes de moments sur le cube $[-1, +1]^p$, ou sur un compact convexe multiplicativement stable de $\mathbf{R}^p$, traité dans [2].

Remarque 1. Rien ne garantit l'unicité de la mesure λ et de la forme quadratique q, de sorte qu'on a un certain scrupule à appeler la formule de *c)* une formule du type Lévy—Khintchine.

Remarque 2. Si $p=1$, la décomposition de *c)* redonne celle donnée au théorème (6.2.6) de [1] ou dans [4]. Quant à la condition *b)* elle se ramène aisément à la seule condition $(X-1)^2\,\alpha\in\mathfrak{M}$ donnée déjà dans [4]. Cela tient au fait que tout polynôme $R\geqq 0$ sur $\mathbf{R}$ est une somme de deux carrés, de sorte que tout $R\in\mathscr{P}_0^+$ s'écrit $R=(X-1)^2[A^2+B^2]$ et la condition $(X-1)^2\alpha\in\mathfrak{M}$ implique bien $\langle\alpha, R\rangle\geqq 0$.

Remarque 3. Dans l'esprit de la remarque 2, on peut se demander si des conditions du type:

b$_1$) $(X_k-1)^2\alpha\in\mathfrak{M}$ pour tout $k=1, 2, ..., p$

ou

b$_2$) $[\sum_k a_k(X_k-1)]^2\alpha\in\mathfrak{M}$ pour tous $a_k\in\mathbf{R}$

ne seraient pas suffisantes pour impliquer *a).* La réponse est négative même pour la condition b$_2$), et déjà pour $p=2$, bien qu'il soit assez difficile de le voir. Partons du polynôme

$$P(X, Y) = X^2Y^2(X^2+Y^2-1)+1$$

utilisé au lemme (6.3.1) de [1], et qui n'est pas somme de carrés. Il est facile de voir que la borne inférieure de P est 26/27, obtenue pour $x^2=y^2=1/3$. De ce fait le polynôme

$$R_0(X, Y) = 27P(X/\sqrt{3}, Y/\sqrt{3})-26 = X^2Y^2(X^2+Y^2-3)+1 \tag{9}$$

est tel que $R_0(1, 1)=0$, $R_0\geqq 0$, et ce n'est pas une somme de carrés. Désignons maintenant par $J_{a,b}$ le polynôme $[a(X-1)+b(Y-1)]^2$. L'hypothèse b$_2$) signifie que l'on a $\langle\alpha, R\rangle\geqq 0$ pour tout polynôme R de la forme $R=\sum_{a,b}J_{a,b}T_{a,b}$ avec $T_{a,b}\geqq 0$. Ces polynômes R décrivent un cône convexe Γ dans l'espace $\mathbf{R}[X, Y]$, et une démonstration analogue à celles du théorème (6.3.2) et du lemme (6.3.9) de [1], montrerait que Γ est fermé quand on place sur $\mathbf{R}[X, Y]$ la topologie localement convexe la plus fine. Or on a $R_0\notin\Gamma$, car la condition $0\leqq J_{a,b}T\leqq R_0$ implique nécessairement $a=b=0$, comme on voit par les inégalités obtenues en faisant $Y=0$ d'une part et $X=0$ d'autre part. Notons aussi, mais sans démonstration, que R_0 possède la propriété supplémentaire que la condition $0\leqq Q^2T\leqq R_0$ entraîne que le polynôme Q se réduit à une constante, et si cette constante n'est pas nulle, que T est alors proportionnel à R_0. En particulier R_0 engendre une génératrice extrémale dans le cône convexe $\mathscr{P}_0^+$.

Or l'espace $\mathbf{R}[X, Y]$, dont la topologie est naturellement celle de la somme directe $\mathbf{R}^{(\mathbf{N}^2)}$, a pour dual l'espace produit $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^2}$ de toutes les suites doubles. Par conséquent, il existe une suite double α telle que l'on ait $\langle\alpha, R\rangle\geqq 0$ pour tout $R\in\Gamma$ et $\langle\alpha, R_0\rangle<0$. Cette suite α vérifie la condition b$_2$) sans vérifier la condition *b)* du théorème 2, de sorte que, dès la dimension $p=2$, la condition *b)* ne paraît pas susceptible de beaucoup d'améliorations.

Remarque 4. On peut même encore rajouter une précision. En suivant [1], désignons par $\Sigma^{(p)}$ le cône convexe des polynômes dans $\mathbf{R}[X_1, ..., X_p]$ qui sont des sommes de carrés, et par $\Sigma_0^{(p)}$ la partie de $\Sigma^{(p)}$ formée des polynômes R tels que $R(\mathbf{1})=0$. La condition

b$_3$) On a $\langle\alpha, R\rangle\geqq 0$ pour tout $R\in\Sigma_0^{(p)}$

signifie que la suite α est de type quasi-positif au sens de [4], ou encore qu'elle est conditionnellement de type positif, ou encore que $(-\alpha)$ est de type négatif au sens de [1]. Comme $\Sigma^{(p)}$ est un cône convexe fermé dans $\mathbf{R}[X]$, il en est de même de $\Sigma_0^{(p)}$ et la condition $R_0 \notin \Sigma_0^{(2)}$ prouve, de même que dans la remarque précédente, que la condition b_3) n'est pas non plus suffisante pour que la suite α engendre un semi-groupe de moments. La situation est donc analogue à celle du théorème de Haviland, pour lequel la condition que la suite α soit de type positif n'est pas suffisante, dès que $p \geqq 2$, pour qu'elle soit une suite de moments.

Remarque 5. Soit q une forme quadratique positive sur $\mathbf{R}^p$, et soit γ_q la mesure gaussienne sur $\mathbf{R}^p$ dont la fonction caractéristique est la fonction $\exp\left[-\frac{1}{2}q(x)\right]$. Le fait, déjà remarqué au lemme (2.2) de [4] pour la dimension un, que la suite $\exp\left(t\frac{q}{2}\right)$, $t \geqq 0$, est la suite des moments de la mesure μ, image de γ_q par l'application

$$h(s_1, \ldots, s_p) = e^{ts} = (e^{ts_1}, \ldots, e^{ts_p})$$

montre clairement que cette suite $\exp\left[\frac{t}{2}q(n)\right]$ est une suite de moments sur le cône positif $\mathbf{R}_+^p = \{x = (x_k),\ x_k \geqq 0\}$ de $\mathbf{R}^p$. Il suit facilement de là que la preuve du théorème 2 peut être reprise mot pour mot en remplaçant $\mathscr{P}_0^+$ par le cône convexe des polynômes R tels que $R(\mathbf{1}) = 0$ et $R \geqq 0$ sur $\mathbf{R}_+^p$ et $\mathfrak{M}$ par le cône $\mathfrak{M}_+$ des suites de moments sur $\mathbf{R}_+^p$. Bien entendu la mesure λ doit être alors portée par $\mathbf{R}_+^p \setminus \{\mathbf{1}\}$. D'où l'énoncé:

Théorème 3. *Soit $\alpha = (\alpha_n)$, $n \in \mathbf{N}^p$, une suite quelconque. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) La suite α engendre un semi-groupe $\exp t\alpha$, $t \geqq 0$, *de moments sur $\mathbf{R}_+^p$.*

b) Pour tout polynôme R, tel que $R(\mathbf{1}) = 0$ et $R \geqq 0$ sur $\mathbf{R}_+^p$, on a $\langle \alpha, R \rangle \geqq 0$.

c) Il existe une constante $a \in \mathbf{R}$, un vecteur $b = (b_k) \in \mathbf{R}^p$, une forme quadratique positive q sur $\mathbf{R}^p$, et une mesure λ sur $\mathbf{R}_+^p \setminus \{\mathbf{1}\}$ telle que

$$\int \left[\textstyle\sum_k (X_k - 1)^2\right](1 + r^2)^m \, d\lambda < +\infty$$

pour tout entier $m \geqq 0$, avec $r^2 = \Sigma X_k^2 = \|X\|^2$, permettant d'exprimer α selon

$$\alpha_n = a + \textstyle\sum_k b_k n_k + \frac{1}{2} q(n) + \int \left[X^n - 1 - \sum n_k (X_k - 1)\right] d\lambda.$$

Remarque 6. La preuve de la proposition 3 ressemble évidemment à la preuve habituellement fournie du théorème 1 de Haviland, lorsqu'on utilise la notion d'espace adapté mise en évidence par Choquet [5]. Ici tout a été repris dans le détail de façon à faire apparaître clairement le terme complémentaire dû à la mesure ν sur la sphère

Σ, terme qui conditionne la présence de la forme quadratique q dans l'énoncé *c)* du théorème 2. On remarquera d'ailleurs que ν n'intervient que par l'intermédiaire de sa matrice de covariance $[\gamma_{k,l}]$ avec

$$\gamma_{k,l} = \int_\Sigma \omega_k \omega_l \, d\nu(\omega)$$

et peut-être est-il possible d'obtenir directement q sans passer par la proposition 3.

3. Semi-groupes de moments complexes sur $\mathbf{C}^p$

Les suites de moments complexes sur $\mathbf{C}^p$ sont des suites doubles $\alpha=(\alpha_{m,n})$, avec $m, n \in \mathbf{N}^p$, telles qu'il existe une mesure positive μ sur $\mathbf{C}^p$ avec

$$\alpha_{m,n} = \int z^m \bar{z}^n \, d\mu(z)$$

de sorte qu'on a déjà évidemment la symétrie hermitienne $\alpha_{n,m}=\overline{\alpha_{m,n}}$. Pour caractériser les suites $\alpha=(\alpha_{m,n})$ qui engendrent un semi-groupe de moments complexes $\exp t\alpha$, $t \geqq 0$, sur $\mathbf{C}^p$, on procède de la même façon que pour le cas réel, en utilisant essentiellement la proposition 3 adaptée au cas $\mathbf{C}^p=\mathbf{R}^{2p}$, avec le point $Z=\mathbf{1}$ remplaçant le point 0. Alors le théorème 2 prend la forme suivante, curieuse principalement par la description de la forme hermitienne q qui remplace la forme quadratique de même nom:

Théorème 4. *Soit* $\alpha=(\alpha_{m,n})$, $m, n \in \mathbf{N}^p$, *une suite hermitienne quelconque. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) La suite α *engendre un semi-groupe* $\exp t\alpha$, $t \geqq 0$, *de moments complexes sur* $\mathbf{C}^p$.

b) Pour tout polynôme $R \in \mathbf{C}[Z, \bar{Z}] = \mathbf{C}[Z_1, \bar{Z}_1, \ldots, Z_p, \bar{Z}_p]$ *tel que l'on ait* $R \geqq 0$ *et* $R(\mathbf{1})=0$, *on a* $\langle \alpha, R \rangle \geqq 0$.

c) Il existe une constante $a \in \mathbf{R}$, *un vecteur* $b=(b_k) \in \mathbf{C}^p$, *une mesure* λ *sur* $\mathbf{C}^p \setminus \{\mathbf{1}\}$ *telle que*

$$\int \left[\textstyle\sum_k |Z_k - 1|^2\right](1+r^2)^m \, d\lambda < +\infty$$

pour tout entier $m \geqq 0$, *avec* $r^2 = \Sigma |Z_k|^2 = \|Z\|^2$, *et une forme hermitienne* q *sur* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$, *déterminée à partir de trois matrices réelles* $p \times p$

$$A = [\varrho_{kl}], \quad B = [\sigma_{kl}], \quad C = [\tau_{kl}]$$

telles que la matrice réelle $2p \times 2p$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$$

soit symétrique et de type positif, selon

$$q(X, Y) = \langle A(X+Y), X+Y\rangle + 2i\langle B(X+Y), X-Y\rangle - \langle C(X-Y), X-Y\rangle$$

permettant d'expliciter α par la formule suivante, du type Lévy—Khintchine:

$$\alpha_{m,n} = a + \textstyle\sum_k (b_k m_k + \bar{b}_k n_k) + \frac{1}{2} q(m, n)$$
$$+ \int \left[Z^m \bar{Z}^n - 1 - \textstyle\sum_k \left(m_k(Z_k - 1) + n_k(\bar{Z}_k - 1)\right)\right] d\lambda.$$

Preuve. On a $a \Rightarrow b$ comme à la proposition 1, en prenant garde que la forme bilinéaire $\langle \alpha, R\rangle$ s'écrit ici

$$\langle \alpha, R\rangle = \textstyle\sum_{m,n} u_{m,n} \alpha_{m,n} \quad \text{si} \quad R = \sum u_{m,n} Z^m \bar{Z}^n.$$

$b \Rightarrow c$: Comme dans la preuve du théorème 2 on part du polynôme $Z^m \bar{Z}^n$, et on écrit

$$Z^m \bar{Z}^n - 1 - \textstyle\sum_k (m_k + n_k)(X_k - 1) - i \sum_k (m_k - n_k) Y_k = R \tag{10}$$

de sorte que $R(\mathbf{1}) = 0$ et $\dfrac{\partial R}{\partial X_k}(\mathbf{1}) = \dfrac{\partial R}{\partial Y_k}(\mathbf{1}) = 0$ pour tout k. La fonction $Q(\omega)$, définie sur la sphère Σ de $\mathbf{R}^{2p}$, associée à R est alors donnée par

$$Q(\omega) = -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_k (m_k + n_k)(\xi_k^2 - \eta_k^2) \tag{11}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{k,l} [(m_k + n_k)(m_l + n_l)\xi_k \xi_l - (m_k - n_k)(m_l - n_l)\eta_k \eta_l + 2i(m_k + n_k)(m_l - n_l)\xi_k \eta_l]$$

avec $Z - \mathbf{1} = \varrho\omega$, $\varrho = \|Z - \mathbf{1}\|$, $\omega = (\omega_k) \in \Sigma$ et $\omega_k = \xi_k + i\eta_k$, comme on voit en calculant toutes les dérivées secondes de R par rapport aux X_k, X_l, Y_k, Y_l.

Comme dans la preuve du théorème 2, il existe une mesure λ sur $\mathbf{C}^p \setminus \{\mathbf{1}\}$, ayant les propriétés imposées dans *c)*, et une mesure ν sur Σ, telles que l'on ait

$$\langle \alpha, R\rangle = \int R\, d\lambda + \int Q\, d\nu \tag{12}$$

et il est clair que $\int R\, d\lambda$ prend la forme donnée dans l'énoncé. En calculant $\langle \alpha, R\rangle$ on obtient

$$\begin{cases} \alpha_{m,n} = \alpha_{0,0} + \sum_k [m_k \langle \alpha, Z_k - 1\rangle + n_k \langle \alpha, \bar{Z}_k - 1\rangle] \\ \qquad + \int R\, d\lambda - \frac{1}{2} \sum_k \left[(m_k + n_k) \int (\xi_k^2 - \eta_k^2)\, d\nu(\omega)\right] \\ \qquad + \frac{1}{2} q(m, n) \end{cases} \tag{13}$$

avec

$$\begin{cases} q(m, n) = \sum_{k,l} [\varrho_{kl}(m_k + n_k)(m_l + n_l) - \tau_{kl}(m_k - n_k)(m_l - n_l) \\ \qquad + 2i\sigma_{k,l}(m_k + n_k)(m_l - n_l)] \end{cases} \tag{14}$$

où les constantes ϱ_{kl}, τ_{kl} et σ_{kl} sont données par

$$\varrho_{kl} = \int \xi_k \xi_l\, d\nu, \quad \sigma_{kl} = \int \xi_k \eta_l\, d\nu, \quad \tau_{kl} = \int \eta_k \eta_l\, d\nu.$$

Puisque α est hermitienne on a

$$\langle \alpha, \bar{Z}_k \rangle = \overline{\langle \alpha, Z_k \rangle}$$

de sorte qu'on peut introduire le vecteur $b=(b_k)\in\mathbf{C}^p$ avec

$$b_k = \langle \alpha, Z_k-1 \rangle - \tfrac{1}{2}\int (\xi_k^2-\eta_k^2)\, dv$$

et la constante réelle $a=\alpha_{00}$. Déjà $\alpha_{m,n}$ prend la forme donnée dans l'énoncé et il ne reste plus qu'à expliciter la forme $q(m,n)$ à partir des trois matrices $A=[\varrho_{kl}]$, $B=[\sigma_{kl}]$, $C=[\tau_{kl}]$. On remarque d'ailleurs que A et C sont symétriques, et que la forme $q(m,n)$ peut se calculer pour X et Y, éléments de $\mathbf{R}^p$, selon

$$(15)\qquad \begin{cases} q(X,Y) = \langle A(X+Y), X+Y \rangle + 2i\langle B(X+Y), X-Y \rangle \\ \qquad\qquad -\langle C(X-Y), X-Y \rangle = \overline{q(Y,X)} \end{cases}$$

et la seule chose à vérifier est donc que la matrice $\Gamma=\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$ qui est réelle et symétrique, est bien de type positif. Or pour $U=(X,Y)$, on a sans difficulté

$$\langle \Gamma U, U \rangle = \int \left[\textstyle\sum_k X_k\xi_k + Y_k\eta_k\right]^2 dv(\omega) \geqq 0.$$

$c\Rightarrow a$: Utilisons la démonstration classique par troncature de la mesure λ donnée dans [4] pour le cas réel en dimension un, la seule difficulté provenant de la forme hermitienne q. Or la matrice Γ détermine sur $\mathbf{R}^{2p}$ une forme quadratique positive Q, à laquelle on peut associer une mesure gaussienne $\gamma_Q=\gamma$ sur $\mathbf{R}^{2p}$, telle que $\exp\left[-\frac{1}{2}Q\right]$ soit la fonction caractéristique de γ. On a donc, pour $U=(X,Y)$, en notant $Q(U)=Q(X,Y)$:

$$\exp\left[\tfrac{1}{2}Q(X,Y)\right] = \int e^{\langle X,u\rangle} e^{\langle Y,v\rangle}\, d\gamma(u,v)$$

et la liaison, conséquence de (15),

$$(16)\qquad q(X,Y) = Q(X+Y,\, i(X-Y))$$

donne, pour $t\geqq 0$

$$\exp\left[\frac{t}{2}\, q(m,n)\right] = \int e^{\langle m,\, t(u+iv)\rangle} e^{\langle n,\, t(u-iv)\rangle}\, d\gamma(u,v).$$

En introduisant la fonction h: $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^p\to\mathbf{C}^p$, définie par

$$h(u,v) = Z(u,v) = e^{t(u+iv)}$$

et en désignant par μ la mesure image $h(\gamma)$, on a alors

$$\exp\left[\frac{t}{2}q(m,n)\right] = \int Z^m \bar{Z}^n\, d\mu$$

ce qui termine la preuve du théorème. □

Ajoutons ici encore quelques commentaires avant de terminer.

Remarque 7. Les matrices $A=[\varrho_{kl}]$ et $C=[\tau_{kl}]$ sont symétriques réelles et de type positif, donc associées à des formes quadratiques positives sur $\mathbf{R}^{2p}$

$$q_1(X,Y) = \langle A(X+Y), X+Y\rangle$$
$$q_3(X,Y) = \langle C(X-Y), X-Y\rangle.$$

Quant à la matrice réelle non symétrique $B=[\sigma_{kl}]$, on peut lui associer la forme réelle alternée

$$q_2(X,Y) = \langle B(X+Y), X-Y\rangle$$

telle par conséquent que $q_2(Y,X) = -q_2(X,Y)$. On exprime alors la forme hermitienne q selon

$$q = q_1 + 2iq_2 - q_3. \tag{17}$$

Par ailleurs la positivité de la matrice Γ implique l'inégalité de Cauchy—Schwarz

$$\langle BX, Y\rangle^2 \leqq \langle AX, X\rangle\langle CY, Y\rangle \tag{18}$$

qui prouve que l'une des conditions $A=0$ ou $C=0$ implique la condition $B=0$. Par (18) on a aussi

$$(q_2)^2 \leqq q_1 q_3 \tag{19}$$

de sorte que $q_1=0$ ou $q_3=0$ implique $q_2=0$.

Remarque 8. Si l'on choisit le vecteur $b=(b_k)$ dans $\mathbf{R}^p$, si la mesure λ est concentrée sur $\mathbf{R}^p\diagdown\{1\}$ et si la mesure ν est concentrée sur la sphère unité de $\mathbf{R}^p$, on a alors $\sigma_{kl}=\tau_{kl}=0$, donc $B=C=0$ et l'expression de $\alpha_{m,n}$ devient

$$\alpha_{m,n} = a + \langle m+n, b\rangle + \tfrac{1}{2}\langle A(m+n),\ m+n\rangle + \int [X^{m+n} - 1 - \textstyle\sum_k (m_k+n_k)(X_k-1)]\, d\lambda$$

ce qui nous ramène aux conditions du théorème 2, puisqu'alors $\alpha_{m,n}=\beta_{m+n}$ où $\beta=(\beta_n)$, $n\in\mathbf{N}^p$, est une suite qui engendre un semi-groupe de moments sur $\mathbf{R}^p$.

Remarque 9. En rejoignant le travail fait dans [3], on peut se demander quelles conditions on doit imposer aux éléments $b=(b_k)\in\mathbf{C}^p$, q et λ pour que la suite α engendre un semi-groupe de moments sur le disque unité D^p de $\mathbf{C}^p$, défini par les conditions $|Z_k|\leqq 1$ pour tout k. Il faut pour cela que λ soit portée par l'ensemble $D^p\diagdown\{1\}$, que b soit tel que $\operatorname{Re} b_k \leqq 0$ pour tout k, de façon que l'on ait $e^{tb}\in D^p$

pour $t \geqq 0$, et enfin que la fonction $\exp tq(m, n)$ soit bornée sur $\mathbf{N}^p \times \mathbf{N}^p$ pour tout $t \geqq 0$. Ceci implique, avec $m=n$, que $q_1=0$, donc aussi $q_2=0$ et ainsi

$$q(m, n) = -q_3(m, n) = -\langle C(m-n), m-n \rangle = -\sum_{k,l} \tau_{kl}(m_k-n_k)(m_l-n_l).$$

On retrouve ainsi, aux notations près, les résultats généraux donnés au théorème 3 de [3].

Les remarques 8 et 9 précisent donc la remarque 7 en exhibant des cas où l'on peut avoir $q_1=q_2=0$ ou $q_2=q_3=0$.

Remarque 10. Pour $p=1$, il n'y a pas de simplifications notables autres que d'écriture, la forme hermitienne q sur $\mathbf{R}^2$ est alors conditionnée par la matrice 2×2

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \varrho & \sigma \\ \sigma & \tau \end{bmatrix}$$

réelle, symétrique et de type positif, selon

$$q(X, Y) = \varrho(X+Y)^2 + 2i\sigma(X^2-Y^2) - \tau(X-Y)^2.$$

Bibliographie

1. BERG, C., CHRISTENSEN, J. P. R. et RESSEL, P., *Harmonic analysis on semigroups,* Graduate Texts in Math. **100**, Springer—Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984.
2. BUCHWALTER, H., Semi-groupes de moments sur un convexe compact de $\mathbf{R}^p$, *Math. Scand.* **54**, (1984), 159—169.
3. BUCHWALTER, H., Semi-groupes de moments complexes, *Amer. J. Math.*, à paraître.
4. BUCHWALTER, H. et CASSIER, G., Semi-groupes dans le problème des moments, *J. Funct. Anal.* **52** (1983), 129—145.
5. CHOQUET, G., Le problème des moments, *Séminaire d'initiation à l'Analyse, 1ère année* **4** (1961/62).
6. FUGLEDE, B., The multidimensional moment problem, *Expositiones Math.* **1** (1983), 47—65.
7. HAVILAND, E. K., On the moment problem for distributions in more than one dimension, *Amer. J. Math.* **57** (1935), 562—568.
8. HORN, R. A., Infinitely divisible positive definite sequences, *Trans. Amer. Math. Soc.* **136** (1969), 287—303.

Received February 15, 1984

Henri Buchwalter
Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard — LYON 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
F-69622 Villeurbanne Cedex