Ensembles de zéros et d'interpolation à la frontière de domaines strictement pseudoconvexes

Jacques Chaumat et Anne-Marie Chollet

Preliminaires

Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^n$ à frontière régulière ∂D et soit $A^\infty(D)$ la classe des fonctions holomorphes dans D et indéfiniment dérivables dans $\bar{D}$.

Un sous-ensemble compact E de ∂D est un ensemble de zéros pour $A^\infty(D)$ s'il existe une fonction de $A^\infty(D)$ s'annulant seulement sur E; c'est un ensemble d'interpolation à l'ordre infini pour $A^\infty(D)$ si, pour toute fonction f de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$ telle que $\bar{\partial} f$ s'annule à l'ordre infini sur E, il existe une fonction F de $A^\infty(D)$ telle que $f-F$ s'annule à l'ordre infini sur E.

Ces ensembles ont été largement étudiés. Dans le cas du disque unité Δ du plan complexe on connaît une caractérisation des ensembles de zéros de $A^\infty(\Delta)$ [14], [17], [19]. Ce sont les ensembles introduits par L. Carleson [3]. Ils satisfont à la condition dite de Carleson

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{d(e^{i\theta}, E)}\, d\theta < \infty$$

qui s'exprime encore sous la forme $\int_0^1 \tilde{N}_\varepsilon(E)\, d\varepsilon < \infty$ où $\tilde{N}_\varepsilon(E)$ désigne le nombre minimum d'intervalles de rayon ε dont la réunion recouvre E. Toujours dans le cas particulier du disque Δ, on a une description complète des ensembles d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(\Delta)$ [1], [2].

Dans $\mathbf{C}^n$, $n \geqq 2$, on ne connaît pas de caractérisation de ces ensembles. On trouve dans [7] et [8] une condition suffisante pour qu'un sous-ensemble E du bord d'un domaine D strictement pseudoconvexe soit un ensemble de zéros pour $A^\infty(D)$. On améliore ici ce résultat en prouvant que la condition de Carleson

$$\int_0^1 \tilde{N}_\varepsilon(E)\, d\varepsilon < \infty,$$

où $\tilde{N}_\varepsilon(E)$ est le nombre minimum de „boules" de rayon ε dont la réunion recouvre E, est suffisante pour que E soit un zéro pour $A^\infty(D)$ (Théorème 9). La preuve en est particulièrement simple et utilise des recouvrements de E par des „boules" de rayon 2^{-k}, $k \geqq 0$. La condition de Carleson n'impose pas à l'ensemble de propriétés géométriques particulières. Il peut être „éparpillé" sur ∂D.

Dans des articles antérieurs [4], [5], [11], [15], différents auteurs s'intéressent aux sous-variétés de ∂D dont l'espace tangent en chaque point est situé dans l'espace tangent complexe à ∂D et montrent que tout sous-ensemble compact d'une telle variété est un ensemble de zéros et auäsi un ensemble d'interpolation à l'ordre infini pour $A^\infty(D)$.

On étudie plus particulièrement ici les sous-variétés Γ de ∂D dont l'espace tangent en chaque point n'est pas situé dans l'espace tangent complexe à ∂D. Lorsque Γ est une courbe, on montre (Théorème 11) que la condition de Carleson est nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble compact E de Γ soit un ensemble de zéros pour $A^\infty(D)$ et on caractérise (Théorème 21) les sous-ensembles compacts de Γ qui sont des ensembles d'interpolation pour $A^\infty(D)$. Les conditions obtenues étendent de manière naturelle celles que l'on connaît dans le cas du disque unité de $\mathbf{C}$. Lorsque Γ est une sous-variété totalement réelle de ∂D de dimension supérieure à 1, transverse à l'espace tangent complexe, on n'obtient alors que des conditions suffisantes.

Ce travail est divisé en trois parties. On prouve tout d'abord, lorsque Γ est une courbe sur ∂D transverse à l'espace tangent complexe, la nécessité des conditions caractéristiques des théorèmes 11 et 21. On établit, dans ce cadre, un résultat qui présente un intérêt indépendant: si f est holomorphe dans D, continue dans $\bar{D}$ et si f ne s'annule pas dans D, alors $\log |f(z)|$ est localement intégrable le long de Γ. On peut remarquer qu'alors l'hypothèse de stricte pseudoconvexité du domaine n'intervient pas. Dans une deuxième partie, on montre que la condition de Carleson est suffisante pour qu'un sous-ensemble compact de ∂D soit un zéro pour $A^\infty(D)$ et on applique ce résultat aux situations particulières des sous-variétés Γ étudiées. La dernière partie est consacrée à l'interpolation; elle est suivie d'une remarque concernant la dimension de Hausdorff des ensembles considérés ici et d'un appendice qui contient tous les lemmes techniques, propres aux espaces de nature homogène, utilisés dans les preuves.

Une partie de ces résultats a fait l'objet d'une note [6].

1.

Dans tout ce qui suit D désigne un domaine borné de $\mathbf{C}^n$ à frontière ∂D de classe C^∞. D est donc défini par la donnée d'une fonction r de classe C^∞ dans un voisinage de $\bar{D}$, l'adhérence de D, telle que

(i) $D=\{z\in\mathbf{C}^n;\ r(z)<0\}$,

(ii) $\operatorname{grad} r\neq 0$ sur ∂D.

D sera dit strictement pseudoconvexe si, de plus, r est strictement plurisousharmonique dans un voisinage de ∂D, c'est-à-dire, si l'on a

(iii) $\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial\bar z_k}(z)w_j\bar w_k>0$, pour tout $w\neq 0$ de $\mathbf{C}^n$ et tout z de ∂D.

On dit alors que r est une fonction définissant D. Si β est un réel, on note $D_\beta=\{z;\ r(z)<\beta\}$ avec $D_0=D$. Il existe $\beta_0>0$ tel que, pour tout β, $|\beta|<\beta_0$, D_β soit un domaine borné, à frontière de classe C^∞, défini par $r-\beta$, $V=\bigcup_{|\beta|<\beta_0}\partial D_\beta$ soit un ouvert contenant ∂D et, enfin, pour tout z de V, il existe un unique $\beta(z)$, $|\beta(z)|<\beta_0$ pour lequel z appartienne à $\partial D_{\beta(z)}$.

Soit z un point de $\mathbf{C}^n$, on désigne par J la structure presque complexe de $T_z(\mathbf{C}^n)$ l'espace tangent en z à $\mathbf{C}^n$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Soit M une sous-variété de $\mathbf{C}^n$ et $T_z(M)$ son espace tangent en z; M est dite totalement réelle si, en tout point z de M, on a $T_z(M)\cap JT_z(M)=\{0\}$.

Pour tout z de V, on note $T_z^c(\partial D_{\beta(z)})$ l'espace tangent complexe en z à $\partial D_{\beta(z)}$; c'est, par définition, le sous espace complexe maximal de $T_z(\partial D_{\beta(z)})$ l'espace tangent en z à $\partial D_{\beta(z)}$.

Pour tout z de V, on note $\nu(z)$ le vecteur unitaire de la normale en z à $\partial D_{\beta(z)}$ orienté vers l'extérieur; on a alors la décomposition orthogonale complexe

$$T_z(\mathbf{C}^n)=\mathbf{C}[\nu(z)]\oplus T_z^c(\partial D_{\beta(z)})$$

et la décomposition orthogonale réelle

$$T_z(\partial D_{\beta(z)})=\mathbf{R}[i\nu(z)]\oplus T_z^c(\partial D_{\beta(z)}).$$

Pour tout z de V, on note Π_z la projection orthogonale complexe sur $\mathbf{C}[\nu(z)]$.

Pour tout couple (z,w) de $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n$, on note $|z-w|$ la distance euclidienne de z à w.

Soit χ une fonction de classe C^∞ sur $]-\infty,0]$, positive, vérifiant $\chi(t)=1$ pour $-\beta_0/2\leqq t\leqq 0$ et $\chi(t)=0$ pour $t\leqq-\beta_0$.

Pour tout couple (z,w) de $\bar D\times\bar D$, on pose

$$\varrho(z,w)=\chi(\beta(z))|\Pi_z(z-w)|+\chi(\beta(w))|\Pi_w(z-w)|+|z-w|^2-r(z)-r(w). \tag{1.1}$$

ϱ est une fonction à valeurs positives vérifiant les propriétés suivantes:

a) $\varrho(z,w)=0$ si et seulement si z et w appartiennent à ∂D et $z=w$,

b) il existe une constante $K>0$ telle que l'on ait

$$\varrho(z,w)\leqq K[\varrho(z,t)+\varrho(t,w)],\quad\text{pour}\quad z,\ w \text{ et } t \text{ dans } \bar D. \tag{1.2}$$

On dit alors que ϱ définit une pseudodistance sur ∂D.

Il existe une constante $C>0$ telle que l'on ait

$$|z-w|^2\leqq\varrho(z,w)\leqq C|z-w|,\quad\text{pour tout}\quad (z,w) \text{ de } \partial D\times\bar D. \tag{1.3}$$

Si E est un sous-ensemble de ∂D, on note, pour tout z de $\bar{D}$,

$$d(z, E) = \inf_{w\in E} |z-w| \quad \text{et} \quad \varrho(z, E) = \inf_{w\in E} \varrho(z, w).$$

Dans la suite, on ne considerera de boules que pour la pseudodistance ϱ; pour tout z de ∂D et tout $r>0$, on notera $B_r(z)=B(z, r)=\{w\in\partial D;\ \varrho(z, w)<r\}$, la boule de centre z et de rayon r.

On note $H^p(D)$, $0<p<\infty$, la classe des fonctions f holomorphes dans D vérifiant

$$\|f\|_p^p = \sup_{-\beta_0<\beta<0} \int_{\partial D_\beta} |f(z)|^p \, d\sigma_\beta(z) < \infty$$

où σ_β est la mesure superficielle sur ∂D_β et $H^\infty(D)$ la classe des fonctions holomorphes et bornées dans D.

Soit k un entier positif ou nul, éventuellement $+\infty$; $A^k(D)$ est la classe des fonctions holomorphes dans D dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues dans $\bar{D}$.

Un sous ensemble fermé E de ∂D est un ensemble de zéros pour $A^\infty(D)$ s'il existe une fonction f de $A^\infty(D)$ telle que l'on ait $E=\{z\in\bar{D};\ f(z)=0\}$.

On dit qu'une fonction [resp. une forme différentielle] de classe C^∞ s'annule à l'ordre infini sur un ensemble si toutes ses dérivées [resp. toutes les dérivées de ses coefficients] s'annulent sur cet ensemble.

Un sous-ensemble fermé E de ∂D est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ si, pour toute fonction g de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$ telle que $\bar{\partial}g$ s'annule à l'ordre infini sur E, il existe une fonction f de $A^\infty(D)$ telle que $f-g$ s'annule à l'ordre infini sur E [5].

Notations. Pour simplifier la rédaction, on écrira „pour tout z dans E, $a(z)\approx b(z)$" ou encore „pour tout z dans E, $a(z)$ est équivalent à $b(z)$" pour exprimer qu'il existe des constantes c et C, strictement positives, telles que, pour tout z dans E, $ca(z)\leqq b(z)\leqq Ca(z)$. De même, la proposition „pour tout z dans E, $a(z)\ll b(z)$" signifiera qu'il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout z dans E, $a(z)\leqq Cb(z)$. Plus généralement, on pourra écrire $a(z)\ll b(z)+O(1)$ lorsqu'il existera des constantes C et C', strictement positives, telles que, pour tout z dans E, on ait $a(z)\leqq Cb(z)+C'$.

Condition necessaire d'integrabilite

2. Proposition. *Soit D un domaine borné à frontière de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$; soit γ: $]-1, 1[\to\partial D$ une courbe de classe C^∞ dont la tangente n'est située en aucun point dans l'espace tangent complexe à ∂D; soit f une fonction continue dans $\bar{D}$, holomorphe et ne s'annulant pas dans D. Alors $t\to\log|f(\gamma(t))|$ est localement intégrable sur $]-1, 1[$.*

Preuve. Il s'agit là d'un résultat local; on peut donc, sans restreindre la généralité, établir la proposition au voisinage de 0 et supposer D simplement connexe. Soit $0<a<1$, il existe une fonction $\tilde{\gamma}$ de classe C^∞ sur $Q_a=\{w\in\mathbf{C};\ w=t+iu,\ -a\leqq t\leqq a,\ -a\leqq u\leqq a\}$, à valeurs dans $\mathbf{C}^n$ et vérifiant les deux propriétés suivantes:

(2.1) $\tilde{\gamma}(t,0)=\gamma(t)$, pour tout t de $[-a,a]$,

(2.2) $\dfrac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\overline{w}}$ s'annule à l'ordre infini sur $[-a,a]\times 0$.

Quitte à réduire a, on peut supposer que $\tilde{\gamma}$ est injective et de différentielle injective sur Q_a; $\tilde{\gamma}(Q_a)$ est donc une sous-variété de $\mathbf{C}^n$, de dimension réelle 2. Si on note $\gamma'(t)$ la tangente à la courbe $\gamma(]-1,1[)$ au point $\gamma(t)$, on déduit de (2.2) que le plan tangent à $\tilde{\gamma}(Q_a)$ au point $\gamma(t)$ est $\mathbf{C}[\gamma'(t)]$. L'hypothèse faite sur la courbe γ implique alors que $\tilde{\gamma}(Q_a)$ est transverse à ∂D le long de $\gamma([-a,a])$. Quitte à réduire a, on peut donc supposer que $\tilde{\gamma}([-a,a]\times[-a,0[)$, par exemple, est inclus dans D.

Soit $\mathfrak{D}$ un ouvert simplement connexe à frontière de classe C^∞ inclus dans $]-a,a[\times]-a,0[$ et vérifiant $\partial\mathfrak{D}\cap\{[-a,a]\times 0\}=\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]\times 0$. Soit Ψ une transformation conforme du disque unité du plan complexe $\bar{\Delta}=\{\zeta\in\mathbf{C};\ |\zeta|\leqq 1\}$ sur $\bar{\mathfrak{D}}$ telle que

$$\Psi\left\{\zeta=e^{i\theta};\ -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right\}=\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]\times 0.$$

On note $\Phi=\tilde{\gamma}\circ\Psi$; on déduit des propriétés de Ψ et de $\tilde{\gamma}$ que $\Phi(\bar{\Delta})$ est un „disque presque analytique" transverse à ∂D le long de $\gamma\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]$ c'est-à-dire que l'on a

(2.3) pour tout entier $k>0$ et tout entier j, $1\leqq j\leqq n$,

$$\sup_{\zeta\in\Delta}\left[d\left(\zeta,\left\{e^{i\theta};\ -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right\}\right)\right]^{-k}\left|\frac{\partial\Phi_j}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta)\right|<\infty,$$

(2.4) pour tout ζ de Δ,

$$d\left(\zeta,\left\{e^{i\theta};\ -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right\}\right)\approx d(\Phi(\zeta),\partial D).$$

On peut, quitte à multiplier f par une constante non nulle, supposer que l'on a $\sup_{z\in D}|f(z)|<1$. Alors, D étant supposé simplement connexe, la fonction $g=\log f$ est holomorphe dans D et de partie réelle négative. Elle appartient donc à $H^p(D)$ pour tout p, $0<p<1$. (Inégalité de Kolmogorov [10]). On déduit de là, en utilisant la sous-harmonicité de $|g|^p$ et les estimations classiques du noyau de Poisson qu'il existe une constante $C(p,n)$, strictement positive, telle que, pour tout β, $0<\beta<\beta_0$, on ait

$$\sup\{|g(z)|;\ z\in D_{-\beta}\} \leqq C(p,n)\beta^{-\frac{2n-1}{p}}\|g\|_p.$$

On obtient alors qu'il existe une constante $C(p, n)$ strictement positive telle que, pour tout entier j, $1\leqq j\leqq n$, et tout β, $0<\beta<\beta_0$, on ait

$$\sup\left\{\left|\frac{\partial g}{\partial z_j}(z)\right|;\ z\in D_{-\beta}\right\} \leqq C(p,n)\beta^{-\left(\frac{2n-1}{p}+1\right)}\|g\|_p. \tag{2.5}$$

Soit $0<\varepsilon<1$. On note $\bar{\Delta}_\varepsilon=\{\zeta\in\mathbf{C},\ |\zeta|\leqq\varepsilon\}$. La formule de Green conduit à

(2.6)
$$g\circ\Phi(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g\circ\Phi(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon}\,d\theta+\frac{1}{2i\pi}\iint_{\Delta_\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial z_j}(\Phi(\zeta))\frac{\partial\Phi_j}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta}.$$

On considère pour tout entier j, $1\leqq j\leqq n$, la mesure μ_j définie sur D par

$$\int_D h\,d\mu_j=\frac{1}{2i\pi}\iint_\Delta h\circ\Phi(\zeta)\frac{\partial\Phi_j}{\partial\bar\zeta}\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta}, \tag{2.7}$$

pour toute fonction h continue et à support compact dans D. On applique (2.7) à la fonction caractéristique de $D\setminus D_{-\beta}$; on remarque que, sur $D\setminus D_{-\beta_0}$, on a $d(z,\partial D)\approx\beta(z)$ et on obtient, d'après (2.3) et (2.4), pour tout entier $k\geqq 0$,

$$\sup_{0<\beta<\beta_0}\beta^{-k}|\mu_j|(D\setminus D_{-\beta})<\infty. \tag{2.8}$$

On déduit de (2.5) et de (2.8), en intégrant sur des couronnes $D_{-\beta}\setminus D_{-\beta'}$, $0<\beta<\beta'$, que, pour tout p, $0<p<1$, il existe une constante $C(p, n)$, strictement positive, telle que, pour tout entier j, $1\leqq j\leqq n$ et tout borélien B de D, on ait

$$\left|\int_B\frac{\partial g}{\partial z_j}(z)\,d\mu_j(z)\right|\leqq C(p,n)\|g\|_p.$$

Cette inégalité appliquée à $B=\Phi(\Delta_\varepsilon)$ conduit à

$$\left|\iint_{\Delta_\varepsilon}\frac{\partial g}{\partial z_j}[\Phi(\zeta)]\frac{\partial\Phi_j}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta}\right|\leqq C(p,n)\|g\|_p. \tag{2.9}$$

De (2.6), (2.9) et de la définition de g on déduit qu'il existe une constante $C>-\infty$ telle que, pour tout ε, $0<\varepsilon<1$, on ait

$$C\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g\circ\Phi(\varepsilon e^{i\theta})|\,d\theta<0. \tag{2.10}$$

La preuve de la proposition 2 s'obtient en passant à la limite dans (2.10) quand ε tend vers 1.

3. Remarques. a) *La condition "f ne s'annule pas dans D" peut être ramenée à "f ne s'annule pas dans D au voisinage de* $\gamma[-1, 1]$*" mais elle ne peut être supprimée comme le prouve dans la boule de* $\mathbf{C}^2$ *l'exemple suivant* $f(z_1, z_2)=z_2$ *le long du cercle* $\Gamma=\{(z_1, z_2);\ |z_1|=1,\ z_2=0\}$.

b) *La proposition 2 reste vraie sous l'hypothèse „f dans* $H^\infty(D)$*" à condition de remplacer* $t\to\log|f(\gamma(t))|$ *par* $t\to\log|f^*(\gamma(t))|$ *où* f^* *désigne la limite non tangentielle de f le long de la courbe. On sait que cette limite existe* [16].

c) *On peut rapprocher la proposition 2 d'un résultat obtenu indépendamment par W. C. Ramey* ([18], Théorème 7.3).

4. Proposition. *Soit D un domaine borné à frontière de classe* C^∞ *dans* $\mathbf{C}^n$. *Soit* γ: $[0, 1]\to\partial D$ *une courbe de classe* C^∞ *dont la tangente n'est située en aucun point dans l'espace tangent complexe à* ∂D. *Soit K un sous-ensemble compact de* $]0, 1[$. *S'il existe une fonction f continue sur* $\bar{D}$, *holomorphe dans D, telle que les conditions suivantes soient vérifiées*

a) $\gamma(K)\subset f^{-1}(0)\subset\partial D$,

b) *il existe deux constantes strictement positives C et k telles que, pour tout z et tout z′ de* $\gamma[0, 1]$ *on ait*

$$|f(z)-f(z')| \leqq C|z-z'|^k,$$

alors K vérifie la condition

$$\int_0^1 \log\frac{1}{d(t, K)}\,dt < \infty. \tag{4.1}$$

Preuve. Soit t dans $[0, 1]$ et x dans K tel que $|t-x|=d(t, K)$. On a

$$|f(\gamma(t))| = |f(\gamma(t))-f(\gamma(x))| \leqq C|\gamma(t)-\gamma(x)|^k \leqq C'|t-x|^k$$

ce qui établit la proposition 4 à partir de la proposition 2.

5. Proposition. *Soit D un domaine borné à frontière de classe* C^∞ *dans* $\mathbf{C}^n$ *et soit* γ: $[0, 1]\to\partial D$ *une courbe de classe* C^∞ *dont la tangente n'est située en aucun point dans l'espace tangent complexe à* ∂D. *Soit K un sous-ensemble compact de* $]0, 1[$ *tel que* $E=\gamma(K)$ *soit un ensemble d'interpolation à l'ordre infini pour* $A^\infty(D)$. *Alors K vérifie la condition suivante*

(5.1) *il existe deux constantes C et C′, strictement positives telles que, pour tout intervalle I de* $[0, 1]$, *on ait*

$$\frac{1}{|I|}\int_I \log\frac{1}{d(t, K)}\,dt \leqq C\log\frac{1}{|I|}+C',$$

où $|I|$ *désigne la longueur de I.*

Preuve. On remarque que ce résultat, comme celui de la proposition 2, est local. Soit donc t_0 un point de K. En suivant la preuve de la proposition 15 de [5], on vérifie qu'il existe $\varepsilon>0$ et une fonction Φ de classe C^∞ dans $\bar{\Delta}=\{\zeta\in\mathbf{C};\ |\zeta|\leqq 1\}$ à valeurs dans $\bar{D}$, holomorphe dans Δ ($\Phi(\bar{\Delta})$ est donc un disque analytique) et vérifiant les propriétés suivantes

(5.2) Φ est injective et $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(\zeta)$ ne s'annule pas dans $\bar{\Delta}$,

$$\Phi\left[\bar{\Delta}\diagdown\left\{\zeta=e^{i\theta};\ -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right\}\right]\subset D, \tag{5.3}$$

(5.4) $\Phi\left[\zeta=e^{i\theta};\ -\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right]$ est une courbe de classe C^∞ sur ∂D contenant $\gamma\big(K\cap[t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon]\big)$ et dont la tangente en chaque point x de $\gamma\big(K\cap[t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon]\big)$ est colinéaire à la tangente au point x à $\gamma([0,1])$.

On note $K_0=\Phi^{-1}\big[\gamma\big(K\cap[t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon]\big)\big]$. Quitte à réduire ε, on peut supposer que K_0 est contenu dans $\left\{\zeta=e^{i\theta},\ -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

K_0 est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(\Delta)$. En effet, soit h une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{C}$ telle que $\bar{\partial}h$ s'annule sur K_0 à l'ordre infini. Quitte à multiplier h par une fonction bien choisie, on peut supposer que h est à support convenable dans un voisinage de K_0. Soit maintenant g définie sur la courbe $\Phi\left(\zeta=e^{i\theta},\ -\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ par $g(\Phi(\zeta))=h(\zeta)$. Une courbe étant toujours une sous-variété totalement réelle de $\mathbf{C}^n$, on peut prolonger g en une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$ à support compact vérifiant $\bar{\partial}g=0$ à l'ordre infini sur E [12]. Puisque E est d'interpolation, il existe alors une fonction f dans $A^\infty(D)$ telle que $f=g$ à l'ordre infini sur E. De là, on a $f\circ\Phi=h$ à l'ordre infini sur K_0. Puisque K_0 est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(\Delta)$, K_0 satisfait à la condition (5.1) [1]. Puisque les courbes $\Phi\left(\zeta=e^{i\theta};\ -\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\gamma[0,1]$ coïncident en tout point de $\gamma\big(K\cap[t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon]\big)$ et ont les mêmes tangentes en ces points, on en déduit que $K\cap[t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon]$ vérifie la condition (5.1).

Condition suffisante dans le cas strictement pseudoconvexe

6. Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^n$, à frontière de classe C^∞. On sait qu'il existe une fonction H, une fonction r définissant D, un voisinage V de ∂D et des constantes A, a, M, m, β, δ, strictement positives, vérifiant les propriétés suivantes:

a) H appartient à $C^\infty(V, \mathfrak{H}(D_\beta))$,

b) $\operatorname{Re} H(\zeta, z)$ est strictement positive pour tout (ζ, z) de $\partial D\times\bar{D}$, $\zeta\neq z$,

c) pour tout (ζ, z) de $\partial D\times\bar{D}$, on a

(6.1) $$-r(z)+m|\zeta-z|^2 \leqq \operatorname{Re} H(\zeta, z) \leqq M|\zeta-z|^2-r(z),$$

d) pour tout ζ de ∂D et tout entier j, $1\leqq j\leqq n$, on a

$$\frac{\partial}{\partial z_j} H(\zeta, z)|_{z=\zeta} = -\frac{\partial}{\partial z_j} r(\zeta),$$

e) sur $\{(\zeta, z)\in V\times D_\beta;\ |\zeta-z|<\delta\}$, on a

$$H(\zeta, z) = P(\zeta, z)Q(\zeta, z),$$

avec

$$P(\zeta, z) = \sum_{j=1}^n (\zeta_j-z_j)\frac{\partial}{\partial z_j} r(\zeta)+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n(\zeta_j-z_j)(\zeta_k-z_k)\frac{\partial^2}{\partial z_j\partial z_k} r(\zeta),$$

$$|Q(\zeta, z)| \approx 1, \quad Q(\zeta, \zeta) = 1$$

et $Q(\zeta, .)$ holomorphe sur $\{z;\ |z-\zeta|<\delta\}$,

f) pour tout (ζ, z) de $\partial D\times\bar{D}$, on a

(6.2) $$a|H(\zeta, z)| \leqq \varrho(\zeta, z) \leqq A|H(\zeta, z)|.$$

On pourra trouver un développement de ces résultats dans [8].

On déduit de là

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_j} P(\zeta, z)|_{\zeta=z} = \frac{\partial}{\partial z_j} r(z).$$

On a donc sur $\{(\zeta, z)\in V\times D_\beta\}$

(6.3) $$\frac{\partial}{\partial\zeta_j} H(\zeta, z)|_{\zeta=z} = \frac{\partial}{\partial z_j} r(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_j} H(\zeta, z)|_{\zeta=z} = 0.$$

7. Pour tout sous-ensemble E fermé de ∂D et pour tout $\varepsilon>0$, on désigne par $\tilde{N}_\varepsilon(E)$ le nombre minimal de boules de rayon ε dont la réunion recouvre E. On sait [Proposition 2 de l'appendice] que l'on peut recouvrir E par des boules de rayon ε dont les centres sont situés sur E, à des distances mutuelles supérieures ou égales à ε, et dont le nombre, noté $N_\varepsilon(E)$, est équivalent à $\tilde{N}_\varepsilon(E)$. On dira que ces boules forment un ε-recouvrement de E. On ne considérera dans la suite que de tels recouvrements.

8. Proposition. *Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D vérifiant la condition de Carleson, à savoir,*

(8.1) $$\int_0^1 N_\varepsilon(E)\, d\varepsilon <\infty;$$

alors il existe une fonction φ holomorphe au voisinage de tout point de $\bar{D}\setminus E$, de partie réelle strictement positive dans $\bar{D}\setminus E$ qui vérifie les estimations suivantes

a) *Il existe une constante $c_1>0$ telle que, pour tout z de $\bar{D}\setminus E$,*

$$\operatorname{Re}\varphi(z) \geqq \omega[\varrho(z, E)] \log \frac{1}{c_1 \varrho(z, E)}$$

où $\omega(x)$ est une fonction de x à valeurs positives qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

b) *Pour tout multi-indice $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de longueur $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ il existe une constante $C(|\alpha|)$ telle que, pour tout z de $\bar{D}\setminus E$, on ait*

$$\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial z_1^{\alpha_1}\ldots\partial z_n^{\alpha_n}} \varphi(z)\right| = |D^\alpha \varphi(z)| \leqq C(|\alpha|)\varrho(z, E)^{-|\alpha|-1}.$$

Preuve. Puisque $N_\varepsilon(E)$ est une fonction décroissante de ε, la condition (8.1) est équivalente à la condition

(8.2) $$\sum_{k=1}^{\infty} N_{2^{-k}}(E)2 < \infty.$$

Il existe alors une suite croissante λ_k de réels positifs tendant vers $+\infty$ tels que l'on ait

(8.3) $$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k N_{2^{-k}}(E)2^{-k} < \infty.$$

Soit φ la fonction définie pour tout z dans D par

(8.4) $$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_{2^{-k}}(E)} \lambda_k \frac{2^{-k}}{2^{-k}+H(\zeta_{j,k}, z)}$$

où H est la fonction introduite dans le paragraphe 6 et où, pour chaque entier k, $(\zeta_{j,k})$, $j=1, \ldots, N_{2^{-k}}(E)$, désigne la suite des centres des boules $B_{j,k}$, $j=1, \ldots, N_{2^{-k}}(E)$, d'un 2^{-k}-recouvrement de E. Des propriétés de H on déduit que l'on a

$$|2^{-k}+H(\zeta_{j,k}, z)| \geqq |H(\zeta_{j,k}, z)| \geqq A^{-1}\varrho(z, E)$$

et donc, d'après (8.3) que φ est holomorphe au voisinage de tout point z de $\bar{D}\setminus E$ et que l'on a, en un tel point pour tout multi-indice α de longueur $|\alpha|$,

$$|D^\alpha \varphi(z)| \leqq C(|\alpha|)\varrho(z, E)^{-|\alpha|-1}.$$

Il reste donc à établir la minoration de la partie réelle de φ. Soit z un point de $\bar{D}\setminus E$ vérifiant $\varrho(z, E)<1/4$; il existe un entier $k_z>1$ tel que l'on ait

(8.5) $$2^{-k_z-1} < \varrho(z, E) \leqq 2^{-k_z}.$$

On note w_z le point de E réalisant le minimum de la pseudo-distance de z à E. Alors, pour chaque k, w_z appartient à au moins une boule du 2^{-k}-recouvrement de E. De la positivité de $\operatorname{Re} H$, on déduit que l'on peut minorer $\operatorname{Re}\varphi$ en ne gardant, pour chaque k, dans la sommation portant sur j, qu'une seule boule du 2^{-k}-recouvrement, c'-est-à-dire une des boules qui contiennent w_z et dont on désigne le centre par $\zeta_{z,k}$. On a donc

$$\operatorname{Re}\varphi(z) \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \operatorname{Re}\frac{2^{-k}}{2^{-k}+H(\zeta_{z,k}, z)}$$

et, pour tout k,

$$|H(\zeta_{z,k}, z)| \approx \varrho(\zeta_{z,k}, z) \leqq K[2^{-k}+2^{-k_z}],$$

donc, pour tout k, $k \leqq k_z$

$$|H(\zeta_{z,k}, z)| \leqq K2^{-k+1}.$$

On déduit de là qu'il existe une constante $c>0$, telle que, pour tout z de $\bar{D}\setminus E$ vérifiant $\varrho(z, E)<1/4$ et tout k, $k\leqq k_z$ on ait

$$\operatorname{Re}\frac{2^{-k}}{2^{-k}+H(\zeta_{z,k}, z)} \geqq c.$$

Toujours d'après la positivité de Re H, on a, si on note $[x]$ la partie entière de x

$$\operatorname{Re}\varphi(z) \geqq c \sum_{k=[k_z/2]}^{k_z} \lambda_k \geqq \frac{c}{2} k_z \lambda_{[k_z/2]}.$$

De (8.5), on déduit que

$$k_z \approx \log\frac{1}{\varrho(z, E)} \quad \text{et} \quad \lambda_{[k_z/2]} = \omega[\varrho(z, E)]$$

où $\omega(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, d'après la définition de la suite (λ_k).

Ceci achève la preuve de la proposition 8.

9. Théorème. *Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$ et E un sous-ensemble fermé de ∂D vérifiant la condition de Carleson*

$$\int_0^1 N_\varepsilon(E)\, d\varepsilon < \infty.$$

Alors, il existe une fonction L de $A^\infty(D)$, nulle seulement sur E, telle que, en outre, E soit l'ensemble des zéros communs à L et à toutes ses dérivées.

De plus, pour tout η, $0<\eta<1$, il existe une fonction L_η de $A^\infty(D)$, nulle seulement sur E, vérifiant les propriétés suivantes

a) *$D^\alpha L_\eta(z)=0$, pour tout multi-indice α et tout z de E,*

b) *pour tout multi-indice α, il existe une constante $C(|\alpha|)$ telle que, pour tout z de $\bar{D}\setminus E$, on ait*

$$|D^\alpha L_\eta(z)| \leqq C(|\alpha|)\varrho(z, E)^{-2|\alpha|},$$

c) *pour tout z de $\bar{D}\setminus E$, $\lim_{\eta\to 0} L_\eta(z)=1$.*

Preuve. Soit φ la fonction introduite dans la proposition 8; alors, si on pose

$$L(z) = \exp(-\varphi(z)).$$

L est holomorphe dans D, de classe C^∞ dans $\bar{D}\setminus E$.

En appliquant une formule de dérivation des fonctions composées, on vérifie, comme dans [8], que, pour tout multi-indice α, il existe une constante $C(|\alpha|)$ telle que, pour tout z de $\bar{D}\setminus E$, on ait

$$|D^\alpha L(z)| \leqq C(|\alpha|) \frac{|L(z)|}{\varrho(z, E)^{2|\alpha|}}$$

et, de là, d'après le conclusion a) de la proposition 8,

$$|D^\alpha L(z)| \leqq C(|\alpha|)[\varrho(z, E)]^{\omega[\varrho(z, E)]-2|\alpha|}.$$

On en déduit alors que L se prolonge en une fonction de $A^\infty(D)$ nulle seulement sur E et dont toutes les dérivées s'annulent sur E.

Soit η, $0<\eta<1$, on pose

$$L_\eta(z) = \exp(-\eta\varphi(z)).$$

Puisque, pour tout z de $\partial D\setminus E$, Re $\varphi(z)$ est strictement positive on déduit de ce qui précède que les conclusions a), b), et c) du théorème sont vérifiées.

10. Remarques. (a) *Le théorème 9 reste vrai dans un cadre plus général que celui présenté ici. En effet, la preuve de la proposition 8 ne nécessite pas de façon essentielle l'hypothèse de stricte pseudoconvexité de D. Il suffit qu'il existe une fonction H appartenant à $C^\infty(V, \mathfrak{H}(D_\beta))$ et une pseudodistance ϱ sur ∂D telle que* Re $H(\zeta, z)$ *soit positive ou nulle pour tout (ζ, z) de $\partial D\times\bar{D}$ et qu'il existe $\delta\geqq 1$ telle que, pour tout (ζ, z) de $\partial D\times\bar{D}$, l'on ait*

$$\varrho(\zeta, z)^\delta \ll |H(\zeta, z)| \ll \varrho(\zeta, z).$$

(b) *Le théorème 9 généralise à $\mathbf{C}^n$, $n>1$, un théorème connu dans le cas du disque unité du plan complexe* [3], [14], [17], [19] *et améliore un résultat de A. M. Chollet* [7], [8]. *En effet, d'après la proposition 5 de l'appendice, la condition de Carleson $\int_0^1 N_\varepsilon(E)\,d\varepsilon<\infty$ est équivalente à*

(10.1)

$$\int_{\partial D} \log\frac{1}{\varrho(\zeta, E)}\,d\sigma(\zeta) < \infty \quad si \quad n = 1 \quad et\ à \quad \int_{\partial D} \frac{1}{\varrho(\zeta, E)^{n-1}}\,d\sigma(\zeta) < \infty \quad si \quad n > 1.$$

σ désigne ici la mesure superficielle sur ∂D et l'on considère l'espace de nature homogène $(\partial D, \varrho, \sigma)$.

(c) *Soit Γ une sous-variété de ∂D, de classe C^1 et de dimension réelle p dont l'espace tangent n'est situé en aucun point dans l'espace tangent complexe à ∂D. Soit*

σ_Γ la mesure superficielle sur Γ. Alors $(\Gamma, \varrho, \sigma_\Gamma)$ est un espace de nature homogène. L'hypothèse de transversalité de $T(\Gamma)$ intervient ici pour assurer que l'on a $\sigma_\Gamma(B_r) \approx r^{\frac{p+1}{2}}$ et que la distance euclidienne et la pseudodistance sont équivalentes le long de Γ, si Γ est une courbe. Alors, soit E un sous-ensemble compact de Γ, d'après la proposition 5 de l'appendice, la condition de Carleson est équivalente à

$$\text{(10.2)} \qquad \int_\Gamma \log \frac{1}{d(\zeta, E)}\, d\sigma_\Gamma(\zeta) < \infty, \quad si \quad p = 1,$$

$$et\ à \quad \int_\Gamma \frac{1}{\varrho(\zeta, E)^{(p-1)/2}}\, d\sigma_\Gamma(\zeta) < \infty, \quad si \quad p > 1.$$

11. Théorème. *Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$ à frontière de classe C^∞ et soit Γ une courbe de classe C^∞ sur ∂D dont la tangente n'est située en aucun point dans l'espace tangent complexe à ∂D. Soit E un sous-ensemble compact de Γ, alors la condition de Carleson*

$$\int_0^1 N_\varepsilon(E)\, d\varepsilon < \infty$$

est nécessaire et suffisante pour que E soit l'ensemble des zéros d'une fonction L de $A^\infty(D)$ telle que, de plus, E soit l'ensemble de zéros communs à L et à toutes ses dérivées.

Preuve. Il s'agit là d'une conséquence de la proposition 4, de la remarque 10c) et du théorème 9.

Applications à l'interpolation

12. Dans cette partie les hypothèses faites sur la fonction r définissant D sont celles du paragraphe 6. Soit p un entier supérieur ou égal à 1 et soit $\gamma\colon [-1, 1]^p \to \partial D$ une sous-variété de classe C^∞ de ∂D dont l'espace tangent en chaque point n'est pas situé dans l'espace tangent complexe à ∂D. Pour tout w de ∂D, l'espace tangent complexe $T^c_w(\partial D)$ peut être identifié au sous espace complexe

$$\left\{z \in \mathbf{C}^n;\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j}(w)\, z_j = 0\right\}.$$

La condition sur la sous-variété γ se traduit donc par la propriété

(12.1) ∂r ne s'annule pas sur l'espace tangent à γ, ou encore, compte-tenu du fait que dr s'annule sur l'espace tangent à γ,

(12.2) Im ∂r ne s'annule pas sur l'espace tangent à γ.

13. Dans toute cette étude, il faudra distinguer le cas des courbes de celui des variétés de dimension supérieure et donc établir des lemmes et des propositions spécifiques.

14. Lemme. *Soit* $\gamma\colon [-1, 1]\to\partial D$ *une courbe de classe* C^∞ *de* ∂D *dont la tangente en chaque point n'est pas dans l'espace tangent complexe à* ∂D.

Soit E *un sous-ensemble compact de* $\gamma(]-1, 1[)=\Gamma$. *Il existe un voisinage ouvert* O *de* E *dans* $\mathbf{C}^n$, *une constante* $C>0$ *et une application* π *de* O *sur* $\Gamma\cap O$ *de classe* C^∞ *tels que*

a) *si* z *appartient à* $\Gamma\cap O$, *on ait* $\pi(z)=z$,

b) *pour tout* z *dans* $O\cap\bar{D}$ *et tout* t *dans* $[-1, 1]$, *on ait*

$$|\gamma(t)-\pi(z)| \approx \varrho(\gamma(t), \pi(z)), \tag{14.1}$$

$$|H(\gamma(t), z)| \geqq C[\varrho(\gamma(t), \pi(z))+\varrho(\pi(z), z)]. \tag{14.2}$$

Preuve. On pose $\mathfrak{I}(t, z)=\operatorname{Im} H(\gamma(t), z)$, $t\in[-1, 1]$, $z\in D_\beta$. Si z appartient à Γ, il existe une unique valeur de t dans $[-1, 1]$, notée t_z, telle que $z=\gamma(t_z)$; on a alors

$$\mathfrak{I}(t_z, z) = 0.$$

De plus, on déduit alors de (6.3) que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{Im} H(\gamma(t), z) = \operatorname{Im}\langle d_\zeta H(\gamma(t), z), \gamma'(t)\rangle = \operatorname{Im}\langle\partial_\zeta r(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

et donc, de la propriété (12.2) de la courbe, qu'il existe une constante $b_1>0$ telle que, pour tout z de Γ, on ait

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{I}(t_z, z)\right| \geqq b_1. \tag{14.3}$$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction $\mathfrak{I}(t, z)$. Il existe un voisinage ouvert O de E dans $\mathbf{C}^n$ et une application p de O dans $[-1, 1]$ de classe C^∞ telle que l'on ait

$$\mathfrak{I}(p(z), z) = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \text{ de } O, \tag{14.4}$$

$$p(z) = t_z \quad \text{pour tout} \quad z \text{ de } \Gamma\cap O. \tag{14.5}$$

On note π l'application définie par $\pi(z)=\gamma(p(z))$; quitte à réduire O, c'est une application de classe C^∞ de O sur $\Gamma\cap O$.

Pour tout z de O, un développement de Taylor de $\mathfrak{I}(t, z)$ au voisinage de $t=p(z)$ conduit, d'après (14.4), à

$$\mathfrak{I}(t, z) = [t-p(z)]\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{I}(p(z), z)+O[t-p(z)]^2. \tag{14.6}$$

On peut réduire O en sorte que, d'après (14.3), on ait pour tout z de O,

(14.7) $$\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{I}(p(z), z)\right| \geqq \frac{b_1}{2}.$$

On déduit alors de (14.6) et (14.7) qu'il existe une constante $\eta>0$ telle que $|t-p(z)|<\eta$ implique $|\mathfrak{I}(t, z)|\gg|t-p(z)|$. On a clairement, par ailleurs, $|\mathfrak{I}(t, z)|\ll |t-p(z)|$. De la régularité de γ, on conclut donc qu'il existe une constante $\eta'>0$ telle que, pour tout z dans O et tout t dans $[-1, 1]$ vérifiant $|\gamma(t)-z|<\eta'$, on ait

$$\left|\operatorname{Im} H(\gamma(t), \pi(z))\right| \approx |\gamma(t)-\pi(z)|$$

et donc

(14.8) $$\left|H(\gamma(t), \pi(z))\right| \approx |\gamma(t)-\pi(z)|.$$

Pour tout z dans O et tout t dans $[-1, 1]$ vérifiant $|\gamma(t)-\pi(z)|\geqq\eta'$ l'équivalence (14.8) est trivialement vérifiée car $H(\zeta, z)$ ne s'annule que pour $\zeta=z$, si (ζ, z) appartient à $\partial D\times\bar{D}$, d'après (6.2).

On a donc, en utilisant (6.2), pour tout z dans O et tout t dans $[-1, 1]$,

(14.9) $$|\gamma(t)-\pi(z)| \approx \left|H(\gamma(t), \pi(z))\right| \approx \varrho(\gamma(t), \pi(z)).$$

On déduit, par ailleurs, des propriétés de H et de π que l'on a, pour tout z dans $O\cap\bar{D}$,

(14.10)
$$|\pi(z)-z|^2-r(z) \gg \operatorname{Re} H(\pi(z), z) = \left|H(\pi(z), z)\right| \gg \varrho(\pi(z), z) \gg |\pi(z)-z|^2-r(z).$$

On a aussi, pour tout z dans $O\cap\bar{D}$ et tout t dans $[-1, 1]$ vérifiant $|\gamma(t)-z|<\eta'$,

$$\begin{aligned}\left|H(\gamma(t), z)\right| &\gg \left|\operatorname{Im} H(\gamma(t), z)\right|+\operatorname{Re} H(\gamma(t), z) \gg |\gamma(t)-\pi(z)|+|\gamma(t)-z|^2-r(z)\\ &\gg |\gamma(t)-\pi(z)|+|\pi(z)-z|^2-2|\gamma(t)-\pi(z)|\,|\pi(z)-z|-r(z).\end{aligned}$$

Quitte à réduire O, on obtient, pour tout z dans $O\cap\bar{D}$ et tout t dans $[-1, 1]$ vérifiant $|\gamma(t)-z|<\eta'$

(14.11) $$\left|H(\gamma(t), z)\right| \gg |\gamma(t)-\pi(z)|+|\pi(z)-z|^2-r(z)$$

c'est-à-dire, d'après (14.9) et (14.10),

(14.12) $$\left|H(\gamma(t), z)\right| \gg \varrho(\gamma(t), \pi(z))+\varrho(\pi(z), z).$$

Ici encore, on remarque que si l'on a $|\gamma(t)-z|\geqq\eta'$, l'inégalité (14.12) est trivialement vérifiée ce qui achève la preuve du lemme 14.

Lemme 15. *Soit un entier $p>1$. Soit γ: $[-1, 1]^p\to\partial D$ une sous-variété de classe C^∞ de ∂D dont l'espace tangent en chaque point n'est pas dans l'espace tangent complexe à ∂D. Soit E un sous-ensemble compact de $\gamma(]-1, 1[^p)=\Gamma$. Il existe un* *voisinage ouvert O de E dans $\mathbf{C}^n$, une constante $C>0$ et une application π de O dans $\Gamma\cap O$ de classe C^∞ tels que*

a) *si z appartient à $\Gamma\cap O$, on ait $\pi(z)=z$,*

b) *pour tout z dans $O\cap\bar{D}$ et tout t dans $[-1,1]^p$, on ait*

$$|H(\gamma(t),z)| \geqq C[\varrho(\gamma(t),\pi(z))+\varrho(\pi(z),z)].$$

Preuve. Comme dans la preuve du lemme 14, on pose $\mathfrak{I}(t,z)=\operatorname{Im} H(\gamma(t),z)$, $t\in[-1,1]^p$, $z\in D_\beta$. Si z appartient à Γ, il existe une unique valeur de t dans $[-1,1]^p$, notée t_z, telle que $z=\gamma(t_z)$. On a alors $\mathfrak{I}(t_z,z)=0$. Des propriétés de H et de l'hypothèse (12.2) faite sur la sous-variété Γ, on déduit qu'il existe une constante $b_p>0$ telle que, pour tout z de Γ, on ait

$$\|d_t\mathfrak{I}(t_z,z)\| \geqq b_p.$$

De la régularité de $\mathfrak{I}$, on déduit qu'il existe $\eta>0$ et un ouvert O de $\mathbf{C}^n$ contenant E tel que, pour tout z dans O et tout t dans $[-1,1]^p$ vérifiant $|\gamma(t)-z|<\eta$, on ait

$$\|d_t\mathfrak{I}(t,z)\| \geqq \frac{b_p}{2}. \tag{15.1}$$

Pour tout z dans O, on note $W_z=\{t\in[-1,1]^p;\ |\gamma(t)-z|<\eta\}$. Alors, quitte à réduire η et O, $\{t\in W_z;\ \mathfrak{I}(t,z)=0\}$ est une sous variété de dimension $p-1$ de W_z. On la note N_z. On pose $R(t,z)=\operatorname{Re} H(\gamma(t),z)$, $t\in[-1,1]^p$, $z\in D_\beta$. On déduit des propriétés de $\operatorname{Re} H$ que l'on a

$$R(t_z,z)=0 \quad d_tR(t_z,z)=0, \quad \text{si} \quad z\in\Gamma, \tag{15.2}$$

et qu'il existe une constante C_1 telle que, pour tout $z\in\Gamma$ et tout t de $[-1,1]^p$,

$$R(t,z) \geqq C_1|t-t_z|^2. \tag{15.3}$$

De là, quitte à réduire O et η, on déduit que la restriction de $R(t,z)$ à N_z admet un minimum absolu unique en un point noté $p(z)$.

On remarque que, si z appartient à $\Gamma\cap O$, on a alors $p(z)=t_z$ et que la fonction $z\to p(z)$ est une application de classe C^∞ de O dans $[-1,1]^p$.

On note π l'application définie par $\pi(z)=\gamma(p(z))$. Quitte à réduire O, c'est une application de classe C^∞ de O dans $\Gamma\cap O$ qui vérifie $\pi(z)=z$, pour tout z de $\Gamma\cap O$.

On a, pour tout z dans O et tout t dans $[-1,1]^p$,

$$\mathfrak{I}(t,z)=\mathfrak{I}(p(z),z)+d_t\mathfrak{I}(p(z),z)(t-p(z))+O(|t-p(z)|^2).$$

Or $\mathfrak{I}(p(z),z)=0$.

Il existe donc une constante $C_2>0$ telle que, pour tout z dans O et tout t dans $[-1,1]^p$, on ait

$$|\mathfrak{I}(t,z)| \geqq |d_t\mathfrak{I}(p(z),z)(t-p(z))|-C_2|t-p(z)|^2. \tag{15.4}$$

On a, par ailleurs, une autre minoration $\Im(t, z)$. En effet,

(15.5) $$\Im(t, z) = \Im(t, \pi(z)) + [\Im(t, z) - \Im(t, \pi(z))], \quad \text{pour tout } (t, z) \in [-1, 1]^p \times O.$$

Si on note

(15.6) $$A(t, z) = \Im(t, z) - \Im(t, \pi(z)$$

on vérifie que l'on a

$$A(p(z), z) = 0).$$

De plus, compte tenu de la régularité de $\Im$, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que l'on ait, pour tout $(t, z) \in [-1, 1]^p \times O$,

$$\|d_t A(t, z)\| \leqq C_3 |z - \pi(z)|.$$

La formule de Taylor appliquée à $A(t, z)$ au point $(p(z), z)$ conduit, pour tout $(t, z) \in [-1, 1]^p \times O$, à

(15.7) $$|A(t, z)| \leqq C_3 |z - \pi(z)| \, |t - p(z)| \leqq C_3 [|z - \pi(z)|^2 + |t - p(z)|^2].$$

On déduit donc de (15.5), (15.6) et (15.7) que l'on a, pour tout $(t, z) \in [-1, 1]^p \times O$,

(15.8) $$|\Im(t, z)| \geqq |\Im(t, \pi(z))| - C_3 [|z - \pi(z)|^2 + |t - p(z)|^2].$$

On se propose maintenant de minorer $R(t, z)$. On écrit, pour tout $(t, z) \in [-1, 1]^p \times O$,

(15.9) $$R(t, z) = R(t, \pi(z)) + [R(t, z) - R(t, \pi(z))].$$

De la propriété (6.1) de Re H, on déduit qu'il existe une constante $C_4 > 0$ telle que l'on ait

(15.10) $$R(t, \pi(z)) \geqq C_4 |t - p(z)|^2.$$

Si on note

(15.11) $$B(t, z) = R(t, z) - R(t, \pi(z))$$

on vérifie que l'on a

$$B(p(z), z) = R(p(z), z)$$

et d'après (15.2),

(15.12) $$d_t B(p(z), z) = d_t R(p(z), z).$$

Or le point $p(z)$ réalise le minimum de $R(t, z)$ en restriction à N_z.

On a donc une situation d'extrema liés qui se traduit par l'existence, pour tout z dans O, d'une constante λ_z telle que l'on ait

$$d_t R(p(z), z) = \lambda_z d_t \Im(p(z), z).$$

On remarque que, pour tout $(t, z) \in [-1, 1]^p \times O$,

$$B(t, \pi(z)) \equiv 0.$$

On en déduit donc qu'il existe une constante $C_5>0$ telle que l'on ait, pour tout $(t, z)\in[-1, 1]^p\times O$,

$$\|d_t B(t, z)\| \leqq C_5|z-\pi(z)|,$$

$$\|d_{t^2}^2 B(t, z)\| \leqq C_5|z-\pi(z)|.$$

Ceci implique, en utilisant (15.1) et (15.12), qu'il existe une constante $C_6>0$ telle que l'on ait, pour tout z dans O,

$$|\lambda_z| \leqq C_6|z-\pi(z)|,$$

et aussi, en appliquant la formule de Taylor à $B(t, z)$ au point $(p(z), z)$,

$$B(t, z) \geqq R(p(z), z)-C_6|z-\pi(z)|\,|d_t\Im(p(z), z)(t-p(z))|-C_5|z-\pi(z)|\,|t-p(z)|^2$$

et donc, d'après (15.9) et (15.10),

$$R(t, z) \geqq C_4|t-p(z)|^2+R(p(z), z)-C_6|z-\pi(z)|\,|d_t\Im(p(z), z)(t-p(z))| - C_5|z-\pi(z)|\,|t-p(z)|^2. \tag{15.13}$$

Pour minorer $|H(\gamma(t), z)|$ on écrit, pour tout z dans $O\cap\bar{D}$ et tout t dans $[-1, 1]^p$

$$|H(\gamma(t), z)| \geqq (d+e)|\Im(t, z)|+\frac{1}{\sqrt{2}}R(t, z) \tag{15.14}$$

avec $0<d$, $0<e$ et $d+e\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On utilise (15.4), (15.8) et (15.13) en minorant dans (15.3) $R(p(z), z)$ par $\frac{1}{2}R(p(z), z)+\frac{m}{2}|\pi(z)-z|^2$, ce qui est justifié d'après (6.1). On obtient alors, pour tout $(t, z)\in[-1, 1]^p\times(O\cap\bar{D})$,

$$\begin{aligned}|H(\gamma(t), z)| \geqq{}& \frac{1}{2\sqrt{2}}R(p(z), z)+e|\Im(t, \pi(z))| \\ &+|t-p(z)|^2\left[\frac{C_4}{\sqrt{2}}-dC_2-eC_3\right]+|z-\pi(z)|^2\left[\frac{m}{2\sqrt{2}}-eC_3\right] \\ &+|d_t\Im(p(z), z)(t-p(z))|\left[d-\frac{C_6}{\sqrt{2}}|z-\pi(z)|\right].\end{aligned}$$

On peut choisir d et e vérifiant $d>0$, $e>0$ et $d+e\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ et réduire O en sorte que tous les crochets figurant dans cette somme soient strictement positifs. On obtient alors qu'il existe une constante $C_7>0$ telle que l'on ait, pour tout $(t, z)\in[-1, 1]^p\times(O\cap\bar{D})$,

$$|H(\gamma(t), z)| \geqq C_7[R(p(z), z)+|\Im(t, \pi(z))|+|t-p(z)|^2]. \tag{15.15}$$

Compte-tenu des propriétés de $p(z)$ et de H, on a, pour tout t dans $[-1, 1]^p$ et tout z dans $O \cap \bar{D}$,

$$R(p(z), z) = \operatorname{Re}(\pi(z), z) = |H(\pi(z), z)| \approx \varrho(\pi(z), z)$$

et

$$|\Im(t, \pi(z))| + |t-p(z)|^2 \approx |H(\gamma(t), \pi(z))| \approx \varrho(\gamma(t), \pi(z)).$$

Ceci, d'après (15.15), établit le lemme 15.

16. Corollaire. *Sous les hypothèses des lemmes 14 et 15, avec les mêmes notations, on a*

$$|H(\pi(z), z)| \approx \varrho(z\pi(z)) \approx \varrho(z\Gamma), \quad \text{pour tout} \quad z \in O \cap \bar{D}.$$

Preuve. La première équivalence n'est autre que (6.2). La deuxième sa déduit des inégalités (14b) et 15b). En effet on a

$$\inf_{t \in [-1,1]^p} |H(\gamma(t), z)| \gg \varrho(\pi(z), z) \gg \varrho(z, \Gamma).$$

On conclut en utilisant à nouveau (6.2).

17. Dans la suite, E étant un sous-ensemble compact d'une sous-variété Γ de ∂D, pour établir l'existence d'une fonction ψ qui permette l'interpolation, on est amené à distinguer deux cas selon la dimension de Γ. C'est l'objet des propositions 18 et 19.

18. Proposition. *Soit* $\gamma\colon [-1, 1] \to \partial D$ *une courbe de* ∂D *dont la tangente en chaque point n'est pas dans l'espace tangent complexe à* ∂D. *Soit* E *un sous-ensemble compact de* $\gamma(]-1, 1[) = \Gamma$ *vérifiant la condition*

$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\, d\varepsilon \ll r(\log 1/r + O(1)) \tag{18.1}$$

pour tout r, $0 < r \leqq 1$ *et toute boule* B_r *de rayon* r *centrée sur* ∂D. *Alors il existe une fonction* ψ *holomorphe au voisinage de tout point de* $\bar{D} \setminus E$, *de partie réelle strictement positive dans* $\bar{D} \setminus E$ *qui vérifie les estimations suivantes*

a) $\operatorname{Re}\psi(z) \gg \log \dfrac{1}{\varrho(z, E)} + O(1)$, *pour tout* z *de* $\bar{D} \setminus E$,

b) $\operatorname{Re}\psi(z) \ll \log \dfrac{1}{\varrho(z, \Gamma)} + O(1)$, *pour tout* z *de* $\bar{D} \setminus \Gamma$,

c) $|D^\alpha \psi(z)| \leqq C(|\alpha|)\varrho(z, E)^{-|\alpha|-1}$, *pour tout multi-indice* α *de longueur* $|\alpha|$ *et tout* z *de* $\bar{D} \setminus E$.

Preuve. La condition (18.1) implique la condition de Carleson (8.1), à savoir

$$\int_0^1 N_\varepsilon(E)\, d\varepsilon < \infty,$$

qui s'écrit encore

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} N_{2^{-k}}(E) < \infty. \tag{18.2}$$

Soit ψ la fonction définie sur D par

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_{2^{-k}}(E)} \frac{2^{-k}}{2^{-k}+H(\zeta_{j,k}, z)} \tag{18.3}$$

où, pour chaque entier k, $(\zeta_{j,k})$, $j=1, \ldots, N_k=N_{2^{-k}}(E)$ désigne la suite des centres des boules $B_{j,k}$, $j=1, \ldots, N_k=N_{2^{-k}}(E)$ d'un 2^{-k}-recouvrement de E. On sait que, par définition, $\zeta_{j,k}$ appartient à E. On vérifie, comme dans la preuve de la proposition 8, que ψ est holomorphe au voisinage de tout point de $\bar{D}\setminus E$, de partie réelle strictement positive dans $\bar{D}\setminus E$ et satisfait les estimations a) et c) de la proposition. On se propose d'obtenir l'estimation b). On a, pour tout z de $\bar{D}\setminus \Gamma$,

$$\operatorname{Re}\psi(z) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}+\operatorname{Re} H(\zeta_{j,k}, z)}{|2^{-k}+H(\zeta_{j,k}, z|)^2}.$$

De là, si on suppose z dans O et $\varrho(z, \pi(z))<1$, on a, en utilisant les propriétés de H et (14.2),

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}+|\zeta_{j,k}-z|^2-r(z)}{2^{-2k}+\varrho(\zeta_{j,k}, \pi(z))^2+\varrho(\pi(z), z)^2}$$

ou encore

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}+|\zeta_{j,k}-\pi(z)|^2+|\pi(z)-z|^2-r(z)}{2^{-2k}+\varrho(\zeta_{j,k}, \pi(z))^2+\varrho(\pi(z), z)^2}.$$

En utilisant (14.1) et l'inégalité $|\pi(z)-z|^2-r(z) \leqq \varrho(\pi(z), z)$ on a

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}+\varrho(\zeta_{j,k}, \pi(z))^2+\varrho(\pi(z), z)}{2^{-2k}+\varrho(\zeta_{j,k}, \pi(z))^2+\varrho(\pi(z), z)^2}$$

et donc, à l'aide de (18.2),

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll O(1)+\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}+\varrho(\pi(z), z)}{2^{-2k}+\varrho(\zeta_{j,k}, \pi(z))^2+\varrho(\pi(z), z)^2}$$

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll O(1)+\sum_{2^{-k} \geqq \varrho(\pi(z), z)} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-2k}}{2^{-2k}+\varrho(\pi(z), \zeta_{j,k})^2} \tag{18.4}$$

$$+\sum_{2^{-k}<\varrho(\pi(z), z)} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}\varrho(\pi(z), z)}{\varrho(\pi(z), z)^2+\varrho(\pi(z), \zeta_{j,k})^2}.$$

Soit S_1 et S_2 les deux séries intervenant dans cette inégalité. On se propose de majorer tout d'abord S_1. Pour cela, on note, pour k et l entiers positifs,

$$A_{l,k} = \{j;\ 2^l 2^{-k} < \varrho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \leqq 2^{l+1} 2^{-k}\},$$

$$B_{l,k} = \{j;\ \varrho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \leqq 2^l 2^{-k}\},$$

et card $A_{l,k}$ [resp. card $B_{l,k}$] le cardinal de $A_{l,k}$ [resp. $B_{l,k}$]. On a alors, en utilisant (14.1) et en remarquant que les $\zeta_{j,k}$ sont situés le long d'une courbe à une distance mutuelle au moins égale à 2^{-k},

$$\operatorname{card} B_{l,k} \ll 2^l \quad \text{et} \quad \operatorname{card} A_{l,k} \leqq \operatorname{card} B_{l+1,k}.$$

De là

$$S_1 \ll \sum_{2^{-k} \geqq \varrho(\pi(z),z)} \left(\sum_{j \in B_{0,k}} 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j \in A_{l,k}} \frac{1}{1+2^{2l}}\right)$$

$$\ll \sum_{2^{-k} \geqq \varrho(\pi(z),z)} \left(\operatorname{card} B_{0,k} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\operatorname{card} B_{l+1,k}}{1+2^{2l}}\right) \ll \sum_{2^{-k} \geqq \varrho(\pi(z),z)} \left(1 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{l+1}}{1+2^{2l}}\right)$$

(18.5) $$S_1 \ll \sum_{2^{-k} \geqq \varrho(\pi(z),z)} 1 \ll \log \frac{1}{\varrho(\pi(z),z)} + O(1).$$

Pour majorer S_2, on note, pour k et l entiers positifs,

$$C_{l,k} = \{j;\ 2^l \varrho(\pi(z),z) < \varrho(\pi(z),\zeta_{j,k}) \leqq 2^{l+1} \varrho(\pi(z),z)\},$$
$$D_{l,k} = \{j;\ \varrho(\pi(z),\zeta_{j,k}) \leqq 2^l \varrho(\pi(z),z)\}.$$

On a

(18.6) $$\operatorname{card} D_{l,k} \leqq N_{2^{-k}}(B_{2^l \varrho(\pi(z),z)} \cap E) \quad \text{et} \quad \operatorname{card} C_{l,k} \leqq \operatorname{card} D_{l+1,k}$$

et donc

$$S_2 \ll \frac{1}{\varrho(\pi(z),z)} \left[\sum_{2^{-k} < \varrho(\pi(z),z)} 2^{-k} D_{0,k} + \sum_{2^{-k} < \varrho(\pi(z),z)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1+2^{2l}} \operatorname{card} D_{l+1,k}\right].$$

On majore S_2 en remplaçant

$$\sum_{2^{-k} < \varrho(\pi(z),z)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1+2^{2l}} \operatorname{card} D_{l+1,k} \quad \text{par}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^{2l}} \sum_{2^{-k} < 2^l \varrho(\pi(z),z)} 2^{-k} \operatorname{card} D_{l+1,k},$$

on utilise ensuite l'hypothèse (18.1) et (18.6) pour remarquer que, pour tout l, on a

$$\sum_{2^{-k} < 2^l \varrho(\pi(z),z)} 2^{-k} \operatorname{card} D_{l,k} \leqq 2^l \varrho(\pi(z),z) \left[\log \frac{1}{2^l \varrho(\pi(z),z)} + O(1)\right].$$

On a donc, puisque $\sum_l \frac{2^l}{1+2^{2l}} \log \frac{1}{2^l} < \infty$,

(18.7) $$S_2 \ll \log \frac{1}{\varrho(\pi(z),z)} + O(1).$$

On déduit de (18.4), (18.5) et (18.7) que, pour tout $z \in \bar{D} \setminus \Gamma$, on a

$$\operatorname{Re} \psi(z) \ll \log \frac{1}{\varrho(\pi(z),z)} + O(1),$$

ce qui achève la preuve de l'estimation b), d'après le corollaire 14. La proposition 18 est donc établie.

19. Proposition. *Soit un entier* $p>1$. *Soit* $\gamma\colon [-1,1]^p \to \partial D$ *une sous-variété de classe* C^∞ *de* ∂D *dont l'espace tangent en chaque point n'est pas dans l'espace tangent complexe à* ∂D. *Soit* E *un sous-ensemble compact de* $\gamma(]-1,1[^p)=\Gamma$ *vérifiant la condition*

$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r\cap E)\,d\varepsilon \ll r, \tag{19.1}$$

pour tout r, $0<r\leqq 1$ *et toute boule* B_r *de rayon* r *centrée sur* ∂D. *Alors, il existe une fonction* ψ *holomorphe au voisinage de tout point de* $\bar D\setminus E$, *de partie réelle strictement positive dans* $\bar D\setminus E$ *qui vérifie les estimations suivantes:*

a) $\operatorname{Re}\psi(z)\gg\log\dfrac{1}{\varrho(z,E)}+O(1)$, *pour tout* z *de* $\bar D\setminus E$,

b) $\operatorname{Re}\psi(z)\ll\log\dfrac{1}{\varrho(z,\Gamma)}+O(1)$, *pour tout* z *de* $\bar D\setminus\Gamma$,

c) $|D^\alpha\psi(z)|\ll\varrho(z,E)^{-|\alpha|-1}$, *pour tout multi-indice* α *de longueur* $|\alpha|$ *et tout* z *de* $\bar D\setminus E$.

Preuve. On définit, comme dans la preuve de la proposition 18, la fonction ψ par

$$\psi(z)=\sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}}{2^{-k}+H(\zeta_{j,k},z)},$$

avec les mêmes notations. Seule, diffère la preuve de l'estimation b) que l'on développe maintenant.

On a pour tout $z\in\bar D\setminus\Gamma$

$$\operatorname{Re}\psi(z)\leqq\sum_{k=1}^\infty 2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}+\operatorname{Re}H(\zeta_{j,k},z)}{|2^{-k}+H(\zeta_{j,k},z)|^2}.$$

Donc, en utilisant le lemme 15, si z est dans O et si on suppose $\varrho(\pi(z),z)<1$, on a

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{k=1}^\infty 2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}+\operatorname{Re}H(\xi_{j,k},z)}{2^{-2k}+\varrho(\pi(z),z)^2+\varrho(\pi(z),\zeta_{j,k})^2}.$$

On utilise maintenant les propriétés de $\operatorname{Re}H$ et de la pseudodistance

$$\operatorname{Re}H(\zeta_{j,k},z)\ll|\zeta_{j,k}-z|^2-r(z)\ll|\zeta_{j,k}-\pi(z)|^2+|\pi(z)-z|^2-r(z)$$
$$\ll\varrho(\pi(z),\zeta_{j,k})+\varrho(\pi(z),z).$$

On a

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{k=1}^\infty 2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}+\varrho(\pi(z),z)+\varrho(\pi(z),\zeta_{j,k})}{2^{-2k}+\varrho(\pi(z),z)^2+\varrho(\pi(z),\zeta_{j,k})^2}$$

et donc

(19.2) $$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{2^{-k}+\varrho(\pi(z), z)+\varrho(\pi(z), \zeta_{j,k})}.$$

Ici encore, on note

$$C_{l,k} = \{j;\ 2^l \varrho(\pi(z), z) < \varrho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \leqq 2^{l+1}\varrho(\pi(z), z)\},$$
$$D_{l,k} = \{j;\ \varrho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \leqq 2^l \varrho(\pi(z), z)\},$$

et on a

(19.3) $$\operatorname{card} D_{l,k} \leqq N_{2^{-k}}(B_{2^l\varrho(\pi(z),z)} \cap E).$$

On déduit de (19.2)

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\left(\frac{\operatorname{card} D_{0,k}}{2^{-k}+\varrho(\pi(z), z)} + \sum_{l=0}^{L_z} \frac{\operatorname{card} C_{l,k}}{2^{-k}+2^l\varrho(\pi(z), z)}\right).$$

Ici $2^{L_z}\varrho(z, \pi(z))$ est équivalent à 1 ce qui implique $L_z \ll \log \dfrac{1}{\varrho(\pi(z), z)} + O(1)$ car D est borné.

On integre par parties la somme portant sur l; on obtient

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{l=1}^{L_z} \frac{2^l\varrho(\pi(z), z)}{2^{-2k}+2^{2l}\varrho(\pi(z), z)^2} \operatorname{card} D_{l,k} + O(1).$$

On échange les sommations et on coupe la somme sur k en deux parties

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \sum_{l=1}^{L_z} 2^l\varrho(\pi(z), z)\Big(\sum_{2^{-k}<2^l\varrho(\pi(z),z)} + \sum_{2^{-k}\geqq 2^l\varrho(\pi(z),z)}\Big) + O(1)$$

c'est-à-dire

(19.4) $$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \Sigma_1 + \Sigma_2 + O(1)$$

avec

$$\Sigma_1 = \sum_{l=1}^{L_z} \frac{1}{2^l\varrho(\pi(z), z)} \sum_{2^{-k}<2^l\varrho(\pi(z),z)} 2^{-k} \operatorname{card} D_{l,k}.$$

Mais d'après (19.3) et l'hypothèse (19.1), on remarque que, pour tout l, on a

$$\sum_{2^{-k}<2^l\varrho(\pi(z),z)} 2^{-k}\operatorname{card} D_{l,k} \ll 2^l\varrho(\pi(z), z),$$

et donc

(19.5) $$\Sigma_1 \ll L_z \ll \log\frac{1}{\varrho(\pi(z), z)} + O(1).$$

$$\Sigma_2 = \sum_{l=1}^{L_z} 2^l\varrho(\pi(z), z) \sum_{2^{-k}\geqq 2^l\varrho(\pi(z),z)} 2^k \operatorname{card} D_{l,k},$$

mais ici card $D_{l,k}$ est majoré par une constante absolue. En effet, on compte dans la boule de centre $\pi(z)$ et de rayon $2^l\varrho(z, \pi(z))$ des points écartés d'une distance supérieure à son rayon [9].

De plus

$$\sum_{2^{-k}\geqq 2^l\varrho(\pi(z),z)} 2^k \ll (2^l \varrho(\pi(z), z))^{-1}.$$

On a donc

$$\Sigma_2 \ll L_z \ll \log \frac{1}{\varrho(\pi(z), z)} + O(1). \tag{19.6}$$

De là, d'après (19.4) et (19.5), on déduit que pour tout z dans $O\cap(\bar{D}\setminus\Gamma)$, vérifiant $\varrho(\pi(z), z) < 1$, on a

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \log \frac{1}{\varrho(\pi(z), z)} + O(1).$$

Ceci achève la preuve de la proposition 19.

20. Proposition. *Soit E un sous-ensemble compact d'une sous-variété M de ∂D totalement réelle. On suppose qu'il existe un ouvert O de $\mathbf{C}^n$ contenant E tel que*

a) *pour tout entier p, il existe une fonction F_p de $A^p(D)$ de classe C^∞ dans $\bar{D}\setminus E$ vérifiant*

(20.1) $F_p(z)=0$ *si et seulement si z appartient à E,*

(20.2) *pour tout multi-indice α, $|\alpha|\leqq p$, et pour tout z de E, $D^\alpha F_p(z)=0$, et, plus précisément, pour tout multi-indice α, il existe une constante $C(|\alpha|)$ telle que l'on ait, pour tout z de $\bar{D}\setminus E$,*

$$|D^\alpha F_p(z)| \leqq C(|\alpha|)\,\varrho(z, E)^{2(p+1-|\alpha|)},$$

(20.3) *il existe deux constantes C_p et C'_p strictement positives telles que l'on ait, pour tout z de $\bar{D}\cap O$,*

$$|F_p(z)| \geqq C_p\,\varrho(z, M)^{C'_p},$$

b) *pour tout η, $0<\eta<1$, il existe une fonction L_η de $A^\infty(D)$ vérifiant*

(20.4) $L_\eta(z)=0$ *si et seulement si z appartient à E,*

(20.5) *pour tout multi-indice α et tout z de E*

$$D^\alpha L_\eta(z) = 0,$$

(20.6) *pour tout z de $\bar{D}\setminus E$, $\lim_{\eta\to 0} L_\eta(z)=1$,*

(20.7) *pour tout multi-indice α, il existe une constante $C(|\alpha|)$ et un entier $q(|\alpha|)$, ne dépendant pas de η tels que l'on ait, pour tout z de $\bar{D}\setminus E$,*

$$|D^\alpha L_\eta(z)| \leqq C(|\alpha|)\,\varrho(z, E)^{-q(|\alpha|)},$$

alors E est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$.

Preuve. On reprend ici des idées déjà développées dans [5]. Soit g une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$ dont le $\bar\partial$ s'annule à l'ordre infini sur E; on se propose de montrer tout d'abord que, pour chaque entier $p\geqq 0$, il existe une fonction G_p de $A^p(D)$ telle que, pour tout multi-indice α vérifiant $|\alpha|\leqq p$, on ait

(20.8) $$D^\alpha G_p = D^\alpha g \quad \text{sur} \quad E.$$

On sait [12] qu'il existe une fonction $\tilde g$ à support compact de classe C^∞ dans O telle que

(20.9) $$\bar\partial \tilde g = 0, \quad \text{à l'order infini sur} \quad M,$$

(20.10) le jet d'ordre infini de g soit égal au jet d'ordre infini de $\tilde g$ sur E.

Soit p un entier positif et u_p la (0.1) forme $\bar\partial$-fermée définie dans D par

$$u_p = -\frac{\bar\partial \tilde g}{F_p}.$$

Des propriétés de F_p et de (20.9), on déduit que u_p se prolonge en une forme de classe C^∞ dans $\bar D$ et donc [13] qu'il existe une fonction h_p de classe C^∞ dans $\bar D$ telle que

$$\bar\partial h_p = u_p.$$

La fonction

$$G_p = \tilde g + h_p F_p$$

appartient à $A^p(D)$ et vérifie d'après (20.2), pour tout multi-indice α, $|\alpha|\leqq p$,

$$D^\alpha G_p = D^\alpha \tilde g$$

ce qui établit (20.8), d'après (20.10).

On pose

$$H_p = G_{p+1} - G_p.$$

H_p appartient donc à $A^p(D)$. C'est, de plus, une fonction de classe C^∞ dans $\bar D\setminus E$ qui s'annule à l'ordre p sur E. On associe à H_p la famille de fonctions $H_{p,\eta}$ définie par

$$H_{p,\eta} = L_\eta H_p.$$

$H_{p,\eta}$ appartient à $A^\infty(D)$ et s'annule à l'ordre infini sur E. Des propriétés de H_p et de (20.7), on déduit qu'il existe $p_0>0$ et une fonction k croissante sur $\{n\in N, n\geqq p_0\}$ à valeurs entières tendant vers $+\infty$ tels que, si on note $p^*=k(p)$, pour tout $p\geqq p_0$, la famille $(H_{p,\eta})_\eta$ soit bornée dans $C^{p^*}(\bar D)$ donc relativement compacte dans $C^{p^*-1}(\bar D)$. De là, en utilisant (20.6), on déduit qu'il existe une suite $(\eta_n)_{n\in N}$ tendant vers 0 telle que la suite $(H_{p,\eta_n})_n$ converge vers H_p dans $C^{p^*-1}(\bar D)$. Pour tout p suffisamment grand, il existe donc $\eta(p)$ tel que

$$\|H_p L_{\eta(p)} - H_p\|_{p^*-2} \leqq \frac{1}{2^p}.$$

On considère maintenant la série

$$G_0 + \sum_{p=0}^{\infty} (H_p - H_{p,\eta(p)}).$$

Pour tout $m \in N$, cette série converge dans $C_m(\bar{D})$. Puisque les fonctions $H_{p,\eta(p)}$ appartiennent à $A^\infty(D)$, cette série définit une fonction de $A^\infty(D)$, notée G. Sur E, pour tout p, le jet jusqu'à l'ordre p de G est égal au jet jusqu'à l'ordre p de G_p donc de g. Ceci établit que les jets d'ordre infini de G et de g sont égaux sur E donc la proposition.

21. Théorème. *Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$ à frontière de classe C^∞ et soit Γ une courbe de classe C^∞ sur ∂D dont la tangente n'est située en aucun point dans l'espace tangent complexe à ∂D.*

Un sous-ensemble compact E de Γ est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ si et seulement si il existe deux constantes C et C', strictement positives, telles que, pour tout r, $0<r\leqq 1$, et toute boule B_r de ∂D de rayon r centrée sur E, on ait

$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\, d\varepsilon \leqq Cr \log \frac{1}{r} + C'r. \tag{21.1}$$

Preuve. La condition (21.1) est clairement équivalente à la condition (5.1) de la proposition 5, compte-tenu de la proposition 3 et de la remarque 4 de l'appendice.

On considère comme espace homogène la courbe Γ munie de la mesure linéaire et de la distance euclidienne d. On sait en effet d'après (14.1) que, le long de la courbe Γ, la distance euclidienne d et la pseudo-distance ϱ sont équivalentes.

La nécessité de la condition (21.1) fait donc l'objet de la proposition 5. La suffisance est une conséquence du théorème 9 et des propositions 18 et 20. En effet Γ est totalement réelle; donc si on considère, pour tout entier p, la fonction $F_p(z) = \exp(-k(p)\psi(z))$, où ψ est la fonction introduite dans la proposition 18, on peut choisir un entier $k(p)$ sufisamment grand pour que la condition 20a) soit vérifiée. Quant à la condition 20b), elle est satisfaite d'après le théorème 9.

22. Remarque. *Le théorème 21 est l'extension naturelle aux courbes Γ sur ∂D dont la tangente n'est située en aucun point dans l'espace tangent complexe à ∂D d'un résultat connu dans le cas du disque unité du plan complexe* [1], [2].

23. Théorème. *Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$ à frontière de classe C^∞ et soit Γ une sous-variété de classe C^∞ de ∂D, totalement réelle, de dimension réelle $p>1$ dont l'espace tangent en chaque point n'est pas situé dans l'espace tangent complexe à ∂D.*

Soit E un sous-ensemble compact de Γ. On suppose qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout r, $0<r\leqq 1$, et toute boule B_r de ∂D de rayon r centrée sur E, on ait

(23.1)
$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\, d\varepsilon \leqq Cr.$$

Alors E est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$.

Preuve. C'est une conséquence des propositions 19 et 20.

24. Remarque. *La condition* (23.1) *est équivalente aux conditions* (24.1) *et* (24.2)

(24.1) *pour toute boule B_r de ∂D de rayon r centrée sur E*

$$\int_{B_r} \frac{1}{\varrho(z, E)^{n-1}}\, d\sigma(z) \ll r,$$

(24.2) *pour toute boule B_r de Γ de rayon r centrée sur E*

$$\int_{B_r} \frac{1}{\varrho(z, E)^{(p-1)/2}}\, d\sigma_\Gamma(z) \ll r.$$

Preuve. Il s'agit là d'une conséquence de la proposition 3 et de la remarque 4 de l'appendice selon que l'on considère comme espace de nature homogène $(\partial D, \varrho, \sigma)$ ou $(\Gamma, \varrho, \sigma_\Gamma)$. Ici σ désigne la mesure superficielle sur ∂D et σ_Γ la mesure superficielle sur Γ. On a bien $\sigma_\Gamma(B_r) \approx r^{\frac{p+1}{2}}$.

Remarque sur la dimension de Hausdorff

La méthode développée ici établit l'existence d'ensembles de zéros et d'interpolation de dimension de Hausdorff 1.5 dans $\mathbf{C}^2$, 2 dans $\mathbf{C}^n$, $n>2$. Une adaptation de cette méthode utilisant un „empilement" de variétés dont l'espace tangent est situé dans l'espace tangent complexe à ∂D établit l'existence d'ensembles de zéros et d'interpolation de dimension n dans $\mathbf{C}^n$. Ce résultat, en ce qui concerne les ensembles d'interpolation, est le meilleur possible dans la mesure où ceux-ci doivent être situés sur des variétés totalement réelles de $\mathbf{C}^n$.

Appendice

Les définitions sont celles de [9, chap. III].

Soit (X, ϱ, μ) un espace borné de nature homogène. On suppose qu'il vérifie la propriété: il existe une constante $\alpha \geqq 1$ telle que l'on ait, pour toute boule B_r de rayon r pour la pseudo-distance ϱ,

$$\mu(B_r) \approx r^\alpha, \quad \text{pour tout } r, \quad 0 \leqq r < 1.$$

Soit E un sous-ensemble compact de X et ε un réel, $0<\varepsilon\leqq 1$. On note $\tilde{N}_\varepsilon(E)$ le nombre minimal de boules de rayon ε dont la réunion recouvre E. On pose $\varrho(z, E)=\inf\{\varrho(z,x);\ x\in E\}$ et $E_\varepsilon=\{x\in X;\ \varrho(x,E)\leqq\varepsilon\}$.

1. Lemme. *La fonction $\tilde{N}_\varepsilon(E)$ est décroissante et vérifie, pour tout ε, $0<\varepsilon<1$,*

$$\varepsilon^\alpha \tilde{N}_\varepsilon(E) \approx \mu(E_\varepsilon).$$

Preuve. Soit $(x_1, \ldots, x_{N_\varepsilon(E)})$ une famille maximale de points de E vérifiant $\varrho(x_i, x_j)\geqq\varepsilon$ pour $j\neq i$. Si K désigne la constante intervenant dans la définition de la pseudodistance, les boules $B_{\varepsilon/4K}(x_i)$, $i=1, \ldots, N_\varepsilon(E)$, sont deux à deux disjointes et leur réunion est contenue dans E_ε. On a donc

$$\tilde{N}_\varepsilon(E)\left(\frac{\varepsilon}{4K}\right)^\alpha \leqq N_\varepsilon(E)\left(\frac{\varepsilon}{4K}\right)^\alpha \leqq \mu(E_\varepsilon). \tag{1.1}$$

Soit maintenant (x_i), $i=1, \ldots, \tilde{N}_\varepsilon(E)$, les centres des boules de rayon ε constituant un recouvrement minimal de E. On a $E_\varepsilon\subset\bigcup_{i=1}^{\tilde{N}_\varepsilon(E)} B_{4K\varepsilon}(x_i)$ et donc

$$\mu(E_\varepsilon) \leqq \tilde{N}_\varepsilon(E)(4K\varepsilon)^\alpha. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2), on déduit le lemme et aussi

$$N_\varepsilon(E) \approx \tilde{N}_\varepsilon(E). \tag{1.3}$$

2. Proposition. *Pour tout ε, $0<\varepsilon\leqq 1$, il existe une famille de points de E,* $(x_1, \ldots, x_{N_\varepsilon(E)})$, vérifiant

a) $\varrho(x_i, x_j) \geqq \varepsilon, \quad i\neq j,$

b) $\bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon(E)} B_\varepsilon(x_i) \supset E,$

c) $N_\varepsilon(E) \approx \tilde{N}_\varepsilon(E) \approx \varepsilon^{-\alpha}\mu(E_\varepsilon),$

d) $N_\varepsilon(E)$ *est une fonction décroissante de ε.*

Preuve. Elle reprend les idées de la preuve du lemme 1.

3. Proposition. *Soi $\alpha=1$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(3.1) *pour toute boule B_r et pour tout r*

$$\int_{B_r} \log\frac{1}{\varrho(z,E)}\, d\mu(z) \ll r(\log 1/r+O(1)),$$

(3.2) *pour toute boule B_r et pour tout r*

$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r\cap E)\, d\varepsilon \ll r(\log 1/r+O(1)).$$

Soi $\alpha>1$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(3.3) *pour toute boule B_r et pour tout r*

$$\int_{B_r} \frac{1}{\varrho(z, E)^{\alpha-1}} d\mu \ll r,$$

(3.4) *pour toute boule B_r et pour tout r*

$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\, d\varepsilon \ll r.$$

Preuve. On se propose ici de détailler le cas $\alpha=1$. Le cas $\alpha>1$ se traite de façon analogue.

On peut supposer sans restreindre la généralité que l'on a

$$\varrho(z, E) < 1.$$

On a alors

$$\int_{B_r} \log \frac{1}{\varrho(z, E)} d\mu(z) \gg \sum_{l\geqq 0} l\mu[B_r \cap (E_{2^{-l}} \setminus E_{2^{-l-1}})]$$
$$\gg \sum_{l\geqq 0} l[\mu(B_r \cap E_{2^{-l}}) - \mu(B_r \cap E_{2^{-l-1}})].$$

On obtient en sommant par parties

$$\int_{B_r} \log \frac{1}{\varrho(z, E)} d\mu(z) \gg \sum_{l\geqq 1} \mu(B_r \cap E_{2^{-l}}) \gg \sum_{2^{-l}\leqq r/2K} \mu(B_r \cap E_{2^{-l}}).$$

Or, on a, pour tout r, si $2^{-l} \leqq r/2K$

$$E_{2^{-l}} \cap B_r \supset (E \cap B_{r/2K})_{2^{-l}}$$

et donc

$$\int_{B_r} \log \frac{1}{\varrho(z, E)} d\mu(z) \gg \sum_{2^{l}\leqq r/2K} \mu(E \cap B_{r/2K})_{2^{-l}}$$
$$\gg \sum_{2^{-l}\leqq r/2K} 2^{-l} N_{2^{-l}}(E \cap B_{r/2K}) \gg \int_0^{r/2K} N_\varepsilon(E \cap B_{r/2K})\, d\varepsilon.$$

Ceci établit que (3.1) implique (3.2).

Dans l'autre sens, r étant fixé, $r \leqq 1$, on considère un entier l_0 vérifiant $2^{-l_0} \leqq r < 2^{-l_0-1}$.

On a alors

$$\int_{B_r} \log \frac{1}{\varrho(z, E)} d\mu(z) = \int_{B_r \cap E_{2^{-l_0}}} \log \frac{1}{\varrho(z, E)} d\mu(z) + \int_{B_r \cap \complement E_{2^{-l_0}}} \log \frac{1}{\varrho(z, E)} d\mu(z)$$
$$\ll \sum_{l_0 \leqq l} (l+1)\mu[B_r \cap (E_{2^{-l}} \setminus E_{2^{-l-1}})] + r\log 1/r \ll \sum_{2^{-l-1}\leqq r} \mu(B_r \cap E_{2^{-l}}) + r \log 1/r.$$

Or on a, pour tout r, si $2^{-l-1} \leqq r$,

$$E_{2^{-l}} \cap B_r \subset (E \cap B_{4Kr})_{2^{-l}},$$

d'où

$$\int_{B_r} \log \frac{1}{\varrho(z, E)}\, d\mu(z) \ll \sum_{2^{-l-1} \leqq r} \mu(E \cap B_{4Kr})_{2^{-l}} + r \log 1/r$$

$$\ll \sum_{2^{-l} \leqq 4Kr} 2^{-l} N_{2^{-l}}(E \cap B_{4Kr}) + r \log 1/r \ll \int_0^{4Kr} N_\varepsilon(E \cap B_{4Kr})\, d\varepsilon + r \log 1/r.$$

Ceci prouve que (3.2) implique (3.1).

4. Remarque. *Dans l'énoncé de la proposition 3, on peut indifféremment changer dans une des conditions l'expression "pour toute boule B_r et pour tout r" par "pour toute boule B'_r centrée sur E et pour tout r".*

Preuve. Soit $\alpha=1$. On note (3.1)′ et (3.2)′ les conditions obtenues en remplaçant dans (3.1) et (3.2) B_r par B'_r. On vérifie que (3.1)′ et (3.2)′ sont simultanément vérifiées. Il est clair que (3.2) implique (3.2)′. On suppose maintenant que (3.2)′ est réalisée. Soit B_r une boule quelconque de centre x sur X, alors, ou bien $B_r \cap E$ est vide et donc $N_\varepsilon(B_r \cap E)=0$ ce qui prouve (3.2), ou bien $B_r \cap E$ est non vide. Dans ce cas, soit z un point de $B_r \cap E$, on a alors

$$B(x, r) \cap E \subset B'(z, 4Kr) \cap E$$

et donc

$$N_\varepsilon[B(x, r) \cap E] \leqq N_\varepsilon[B'(z, 4Kr) \cap E];$$

ce qui établit (3.2) puisque (3.2)′ est satisfaite.

Le cas $\alpha>1$ se traite de façon analogue.

5. Proposition. *Les intégrales suivantes sont simultanément convergentes*

$$si \quad \alpha = 1 \quad \int_X \log \frac{1}{\varrho(z, E)}\, d\mu(z) \quad et \quad \int_0^1 N_\varepsilon(E)\, d\varepsilon,$$

$$si \quad \alpha > 1 \quad \int_X \frac{1}{\varrho(z, E)^{\alpha-1}}\, d\mu(z) \quad et \quad \int_0^1 N_\varepsilon(E)\, d\varepsilon.$$

Preuve. Elle utilise les idées de la preuve de la proposition 3.

Bibliographie

1. Alexander, H., Taylor, B. A. and Williams, D. L., The interpolating sets for $A^\infty(D)$. *J. Math. Anal. Appl.*, 36 (1971), 556—566.
2. Bruna, J., Boundary interpolation sets for holomorphic functions smooth to the boundary and B.M.O. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **264** (1981), 393—409.
3. Carleson, L., Sets of uniqueness for functions, regular in the unit circle. *Acta Math.*, **87** (1952), 325—345.

4. CHAUMAT J. et CHOLLET A. M., Ensembles pics pour $A^\infty(D)$. *Ann. Inst. Fourier*, **29** (1979), 171—200.
5. CHAUMAT J. et CHOLLET A. M., Caractérisations et propriétés des ensembles localement pics de $A^\infty(D)$. *Duke Math. J.*, **47** (1980), 763—787.
6. CHAUMAT J. et CHOLLET A. M., Ensembles de zéros et d'interpolation le long des courbes. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **296** (1983), 789—792.
7. CHOLLET, A. M., Ensembles de zéros à la frontière de fonctions analytiques. *Ann. Inst. Fourier*, **26** (1976), 51—80.
8. CHOLLET, A. M., Zéros à la frontière de fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Thèse d'Etat Orsay (1976).
9. COIFMAN, R. R. et WEISS, G., *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*. Springer-Verlag (1971).
10. DUREN, P. L., *Theory of H^p spaces*. Academic Press (1970).
11. HAKIM, M. et SIBONY, N., Ensembles pics dans des domaines strictement pseudoconvexes. *Duke Math. J.*, **45** (1978), 601—607.
12. HARVEY, F. R. and WELLS, R. O., Holomorphic approximation and hyperfunction theory on a C^1 totally real submanifold of a complex manifold. *Math. Ann.*, **197** (1972), 287—318.
13. KOHN, J. J., Global regularity for $\bar\partial$ on weakly pseudo-convex manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **181** (1973), 273—292.
14. KORENBLUM, B. I., Functions holomorphic in a disk and smooth in its closure. *Sovjet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1312—1315.
15. NAGEL, A., Smooth zero sets and interpolation sets for some algebras of holomorphic functions on strictly pseudoconvex domains. *Duke Math. J.*, **43** (1976), 323—348.
16. NAGEL, A. and RUDIN, W., Local boundary behaviour of bounded holomorphic functions. *Can. J. Math.*, **30** (1978), 583—592.
17. NOVINGER, W. P., Holomorphic functions with infinitely differentiable boundary values. *Illinois J. Math.*, **15** (1971), 80—90.
18. RAMEY, W. C., Local boundary behavior of pluriharmonic functions along curves. *Preprint.*
19. TAYLOR, B. A. and WILLIAMS, D. L., Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values. *Can. J. Math.*, *22*, **6** (1970), 1266—1283.

Received March 27, 1984

Jacques Chaumat et
Anne-Marie Chollet
Université de Paris-Sud
Equipe de Recherche Associée au CNRS
Analyse Harmonique
Mathématique
Bât. 425
91405 ORSAY
FRANCE