J. Math. Soc. Japan
Vol. 15, No. 2, 1963

Sur les groupes des mouvements d'un espace de Riemann

par Costake TELEMAN

(Reçu le 18 avril, 1960)
(Revisé le 27 déc., 1961, le 23 avril, 1962)

Dans un travail paru en 1954, [3], j'ai montré que le *groupe des mouvements d'un espace de Riemann* V_n *à groupe d'isotropie irréductible, à métrique définie et à courbure variable peut avoir au plus* p^2 *paramètres, si* $n=2p+1$ *ou* $n=2p$.

Ce résultat est une conséquence du fait que le groupe de stabilité d'un point de V_n peut avoir au plus p^2 paramètres et j'ai donné une démonstration par recurrence de ce théorème. Bien que le théorème est vrai, la démonstration s'appuyait sur la propriété suivante, qui n'est pas générale : si $a^i_{j\alpha}(x^j \partial/\partial x^i - x^i \partial/\partial x^j)$ sont les transformations infinitésimales d'une base normale de l'algèbre de Lie d'un groupe orthogonal H, alors la forme biquadratique $\sum_\alpha [a^i_{j\alpha}(x^i y^j - x^j y^i)]^2$ n'est jamais proportionnelle à la forme $\sum_{i,j}(x^i y^j - x^j y^i)^2$. Or cette propriété n'est pas satisfaite par le groupe en sept variables ayant la structure de la forme unitaire du groupe exceptionnel G_2, ou par le groupe en huit variables qui fournit la représentation spinorielle de $O(7)$.

Toutefois, la démonstration peut être adaptée à une classe assez générale de groupes orthogonaux, que j'appelle *séparables ;* ce sont les groupes qui laissent invariant dans l'espace euclidien $E_n = \{(x_1, \cdots, x_n)\}$ un système de Pfaff différent des systèmes

$$x_1 dx_1 + \cdots + x_n dx_n = 0 ; \quad x_i dx_j - x_j dx_i = 0 .$$

Il faut seulement remarquer que cette propriété des groupes séparables est héréditaire relativement au raisonnement par recurrence que j'ai suivi dans [3].

Dans ce travail, nous allons reconstituer la démonstration pour les groupes séparables. L'hérédité est exprimée par le théorème 4.

Le théorème concernant le groupe des mouvements d'un espace de Riemann reste valable, grâce au théorème 7, qui montre que le groupe de stabilité d'un point de V_n est séparable, si V_n est à courbure variable.

Pour la dimension des groupes orthogonaux irréductibles H, M. Obata [2] a donné pour maximum le nombre dim $O(n-3)+$dim $O(3)$, si $n \geqq 14$. De même, M. Obata a montré [1] qu'un espace de Riemann homogène V_8, ayant pour groupe d'isotropie la représentation spinorielle de $O(7)$, est localement euclidien.

I. Un théorème sur les espaces de Riemann séparables

1. Formules fondamentales dans le calcul des congruences

Nous dirons qu'un espace de Riemann V_n a été rapporté à un système de congruences orthogonales, si on a défini un système de n formes de Pfaff $ds^1, \cdots, ds^n$ dans V_n, telle que la métrique ds^2 de V_n s'écrive

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \cdots + (ds^n)^2 . \tag{1}$$

Nous désignerons par w^a_{bc} les coefficients des covariants bilinéaires $\varDelta s^a$ des formes ds^a, donc on a

$$\varDelta s^a = \frac{1}{2} w^a_{bc}[ds^b ds^c], \quad [ds^b ds^c] = ds^b \delta s^c - ds^c \delta s^b ,$$

$[ds^b ds^c]$ étant le produit extérieur des formes ds^b, ds^c. Nous désignerons par γ^a_{bc} les coefficients de Ricci des formes ds^a, qui sont donnés par les formules

$$\gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}(w^a_{bc} + w^b_{ca} + w^c_{ba}) \tag{1'}$$

et on a

$$w^a_{bc} = \gamma^a_{bc} - \gamma^a_{cb}, \quad \gamma^a_{bc} + \gamma^b_{ac} = 0 .$$

Nous dirons que l'espace V_n est *séparable* si en dehors de la structure d'espace riemannien, on a défini dans V_n une seconde structure, définie par un système de Pfaff. Dans ce cas, on peut choisir les formes $ds^1, \cdots, ds^n$ telles que ce système soit

$$ds^h = 0 \quad (h = 1, 2, \cdots, m < n) . \tag{2}$$

Les équations

$$ds^\alpha = 0 \quad (\alpha = m+1, \cdots, n) \tag{2'}$$

forment le système complémentaire du système (1).

Nous allons étudier le groupe des transformations en lui-même de V_n conservant la métrique ds^2 et les systèmes (2), (2'). Si

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \cdots, x^n) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{3}$$

est une telle transformation et si l'on désigne par $d\bar{s}^a$ les formes de Pfaff qu'on obtient en remplaçant dans ds^a les variables x^i par $\bar{x}^i$ et les différentielles dx^i par $d\bar{x}^i$, on a des formules de la forme

$$d\bar{s}^h = c^h_k ds^k \quad (h, k = 1, \cdots, m) \tag{4}$$

$$d\bar{s}^\alpha = c^\alpha_\beta ds^\beta \quad (\alpha, \beta = m+1, \cdots, n) \tag{4'}$$

où c^α_β, c^h_k sont des fonctions de x^i vérifiant les conditions d'orthogonalité

$$c^h_k c^{h'}_k = \delta^h_{h'}, \quad c^\alpha_\beta c^{\alpha'}_\beta = \delta^\alpha_{\alpha'} . \tag{5}$$

Les coefficients de Ricci $\gamma^{a}_{bc}(x)$ et $\bar{\gamma}^{a}_{bc}(\bar{x})=\gamma^{a}_{bc}(\bar{x})$ vérifient les relations en termes finis [**4**, p. 241]

$$\bar{\gamma}^{\alpha}_{hk}c^{h}_{l}c^{k}_{r}-\gamma^{\beta}_{lr}c^{\alpha}_{\beta}=0 \tag{6}$$

$$\bar{\gamma}^{h}_{\alpha\beta}c^{\alpha}_{\lambda}c^{\beta}_{\mu}-\gamma^{k}_{\lambda\mu}c^{h}_{k}=0\,. \tag{6'}$$

Les quantités (1′) et les quantités

$$v^{\alpha}_{hk}=\frac{1}{2}(\gamma^{\alpha}_{hk}+\gamma^{\alpha}_{kh}) \tag{7}$$

$$v^{h}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\gamma^{h}_{\alpha\beta}+\gamma^{h}_{\beta\alpha}) \tag{7'}$$

subiront des transformations analogues,

$$\bar{w}^{h}_{\alpha\beta}c^{\alpha}_{\lambda}\,c^{\beta}_{\mu}-w^{k}_{\lambda\mu}c^{h}_{k}=0 \tag{8}$$

$$\bar{v}^{h}_{\alpha\beta}c^{\alpha}_{\lambda}\,c^{\beta}_{\mu}-v^{k}_{\lambda\mu}c^{h}_{k}=0 \tag{9}$$

$$\bar{w}^{\alpha}_{hk}c^{h}_{l}c^{k}_{r}-w^{\beta}_{lr}c^{\alpha}_{\beta}=0 \tag{10}$$

$$\bar{v}^{\alpha}_{hk}c^{h}_{l}c^{k}_{r}-v^{\beta}_{lr}c^{\alpha}_{\beta}=0\,. \tag{11}$$

Les relations $w^{h}_{\alpha\beta}=0$ expriment que les système $ds^{h}=0$ est complètement intégrable. Si nous avons de plus $v^{\alpha}_{hk}=0$, la métrique

$$ds_1^2=(ds^1)^2+\cdots+(ds^m)^2 \tag{12}$$

peut s'exprimer à l'aide de m variables et de leurs différentielles [Vranceanu, **4**, I, p. 257].

2. Nous allons déterminer les espaces séparables V_n qui admettent un groupe de transformations (3) ayant au moins $m(m-1)/2$ paramètres et telles que les coefficients c^{h}_{k}, considérés comme fonctions de ces paramètres, ne satisfassent à aucune identité indépendante des conditions d'orthogonalités. Plus précisément, si $a^1,\cdots,a^r$ sont des paramètres essentiels du groupe, la matrice fonctionnelle

$$\left(\frac{\partial c^{h}_{k}}{\partial a^{\rho}}\right) \tag{13}$$

doit avoir le rang $m(m-1)/2$.

Supposons qu'on a $n\geqq 6$, $m>n/2$ et considérons le tenseur du groupe (4), donné par

$$\gamma^{hk}=\gamma^{h}_{\lambda\mu}\gamma^{k}_{\lambda\mu} \tag{14}$$

qui subit les substitutions

$$\bar{\gamma}^{hk}c^{h}_{l}\,c^{k}_{r}-\gamma^{lr}=0\,; \tag{15}$$

ces équations ne donnent aucune identité pour les fonctions $c^{h}_{k}(x,a)$ seulement si la forme quadratique $\gamma^{hk}ds^{h}ds^{k}$ est proportionnelle à (12), donc si on a

(15′) $$\gamma^{hk} = \sigma \delta^h_k \, .$$

Si $\sigma \neq 0$; en multipliant (6′) avec $\gamma^k_{\lambda\mu}$ et en sommant, on obtient

(15″) $$\sigma c^h_k = \gamma^k_{\lambda\mu} \bar{\gamma}^h_{\alpha\beta} c^\alpha_\lambda c^\beta_\mu$$

et ces relations permettent de résoudre les c^h_k par rapport aux c^α_β. Or parmi les fonctions $c^\alpha_\beta(x, a)$ on a au plus $(n-m)(n-m-1)/2 < m(m-1)/2$ fonctions indépendantes, donc le rang de la matrice (13) ne peut pas être égal à $m(m-1)/2$. Il en résulte $\sigma = 0$ et alors $\gamma^{hk} = 0$; les équations $\gamma^{hh} = 0$, donnent

(16) $$\gamma^h_{\lambda\mu} = 0, \quad w^h_{\lambda\mu} = 0, \quad v^h_{\lambda\mu} = 0 \, .$$

Considérons maintenant le tenseur du quatrième ordre, symétrique gauche en h, k et l, r

(17) $$W_{hklr} = w^\alpha_{hk} w^\alpha_{lr} \, .$$

Un tel tenseur n'impose aucune identité entre les fonctions $c^h_k(x, a)$, indépendante des conditions d'orthogonalité, seulement si la forme quadratique

(18) $$W_{hklr} p_{hk} p_{lr} \, ,$$

définie dans l'espace des tenseurs symétriques gauches $p_{kh} = -p_{hk}$ est proportionnelle à

(18′) $$\sum_{h,k} p^2_{hk} \, ,$$

car le groupe orthogonal admet une représentation irréductible dans l'espace des tenseurs p_{hk}. On a donc $W_{hklr} = 0$ si les paires $(h, k), (l, r)$ ont au moins un élément distinct et $W_{hkhk} = -W_{hkkh} = \rho$. Donc si l'on désigne par A la matrice

$$A = (w^\alpha_{hk}) \quad (h < k)$$

à $n-m$ colonnes et $m(m-1)/2$ lignes, on doit avoir, d'après (17),

$$A^* A = \rho E \, ,$$

A^* étant la transposée de A et E la matrice unité d'ordre $m(m-1)/2$. Comme on a rang $E = m(m-1)/2$, si l'on suppose que $m > 3$, on a

$$\operatorname{rang} (A^* A) \leqq \operatorname{rang} A \leqq n-m < m(m-1)/2 \, ;$$

et il en résulte $\rho = 0$. D'autre part, d'après un théorème de Sylvester, on a pour deux matrices A, B

$$\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B - p \leqq \operatorname{rang} (AB) \, ,$$

p étant le nombre des colonnes de A et le nombre des lignes de B. Dans notre cas, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^*$, $\operatorname{rang} (AB) = 0$ et $p = n-m$ et il en résulte

$$\operatorname{rang} A \leqq \frac{n-m}{2} \, .$$

Donc le système

$$w^\alpha_{hk} ds^\alpha = 0$$

contient au plus $(n-m)/2$ équations linéairement indépendantes. Par une substitution orthogonale des formes ds^α, on peut choisir les formes ds^α telles que ces équations soient

$$ds^{\alpha'} = 0, \left(\alpha' = m+1, \cdots, m+p, \quad p \leqq \frac{n-m}{2}\right),$$

p étant le rang de la matrice (w^α_{hk}) et on a alors $w^\rho_{hk} = 0$ $(\rho > m+p)$.

Le même raisonnement, appliqué au tenseur

$$W_{hklr} = w^{\alpha'}_{hk} w^{\alpha'}_{lr}$$

montre qu'on a

$$\text{rang}\,(w^{\alpha'}_{hk}) \leqq \frac{p}{2}.$$

Or on a $\text{rang}\,(w^{\alpha'}_{hk}) = \text{rang}\,(w^\alpha_{hk}) = p$, d'où $p = 0$, donc on a

$$w^\alpha_{hk} = 0 \tag{19}$$

et le système $ds^\alpha = 0$ est complètement intégrable. On peut alors choisir des coordonnées $x^1, \cdots, x^n$ dans V_n telles qu'on ait

$$ds^\alpha = \lambda^\alpha_\beta dx^\beta \quad (\alpha, \beta = m+1, \cdots, n) \tag{19'}$$

et le troisième groupe des formules (16) nous dit que la métrique

$$ds^2_2 = (ds^{m+1})^2 + \cdots + (ds^n)^2 \tag{20}$$

ne dépends pas des variables $x^1, \cdots, x^m$.

Considérons enfin le tenseur

$$V_{hklr} = v^\alpha_{hk} v^\alpha_{lr}$$

qui est symétrique en h, k ; l, r et dans les paires (h, k), (l, r). Un tel tenseur n'impose aucune condition aux fonctions $c^h_k(x, a)$ seulement si la forme quadratique

$$V_{hklr} q_{hk} q_{lr}$$

définie dans l'espace des tenseurs symétriques $q_{hk} = q_{kh}$, s'expriment linéairement à l'aide des formes

$$\sum_{h,k} q^2_{hk}, \quad (\sum_h q_{hh})^2,$$

car ce sont les seuls invariants orthogonaux du deuxième degré, qu'on peut former avec les coefficients q_{hk} d'une forme quadratique. On doit donc avoir des formules de la forme

$$V_{hklr} = \rho' \delta^h_l \delta^k_r + \rho \delta^h_k \delta^l_r, \quad (h \leqq k, l \leqq r).$$

Donc si l'on introduit la matrice $B = (v^\alpha_{hk})$, $(h \leqq k)$ à $n-m$ colonnes et $m(m+1)/2$ lignes, on a

$$B^*B=\rho' E_1+\rho M,$$

où E_1 est la matrice unité d'ordre $m(m+1)/2$ et M est donné par

$$M=\begin{pmatrix} {\scriptstyle m\text{ fois}}\left\{\overbrace{\begin{matrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1\end{matrix}}^{m\text{ fois}}\right. & \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

en supposant que les premières m lignes de (v^α_{hk}) correspondent aux valeurs $(1,1),(2,2),\cdots,(m,m)$ données aux indices (h,k).

Des relations

$\operatorname{rang}(B^*B)\leqq \operatorname{rang} B\leqq n-m<m(m-1)/2$ on déduit $\rho'=0$ et la formule de Sylvester donne

$$\operatorname{rang} B\leqq \frac{\operatorname{rang} M+n-m}{2}=\frac{n-m+1}{2}.$$

Soit alors $r\leqq(n-m+1)/2$ le rang de la matrice B et supposons qu'on a choisi les formes ds^α de manière que le système

$$v^\alpha_{hk}ds^\alpha=0$$

soit équivalent au système

$$ds^{\alpha'}=0,\quad (\alpha'=m+1,\cdots,m+r).$$

On a alors $v^\rho_{hk}=0$, $(\rho>m+r)$.

Un raisonnement tout à fait analogue au précédent, appliqué au tenseur

$$V_{hklr}=v^{\alpha'}_{hk}v^{\alpha'}_{lr}$$

montre qu'on a $\operatorname{rang}(v^{\alpha'}_{hk})=\operatorname{rang}(v^\alpha_{hk})\leqq\frac{r+1}{2}$. Or on a $\operatorname{rang}(v^\alpha_{hk})=r$, donc $r\leqq 1$. Il en résulte que les formes quadratiques

$$\Omega^\alpha=v^\alpha_{hk}ds^h ds^k$$

sont proportionnelles à une même forme quadratique Ω, qui doit être elle-même proportionnelle à la métrique (12). On a donc des formules de la forme

$$2v^\alpha_{hk}=\gamma^\alpha_{hk}+\gamma^\alpha_{kh}=2\delta^h_k v^\alpha, \tag{21}$$

v^α étant les composantes d'un vecteur du groupe (4').

D'après le second groupe de formules (16), le système $ds^h=0$ est complètement intégrable, donc on peut choisir les variables $x^1,\cdots,x^m$ telles qu'on ait, simultanément avec (19'),

$$ds^h=\lambda^h_k dx^k,\quad (h,k=1,\cdots,m).$$

Soit

$$ds_1^2 = a_{hk}dx^h dx^k, \quad (a_{hk} = \lambda_h^r \lambda_k^r)$$

l'expression de la métrique (12) dans ces variables.

On a les formules [4, I, p. 270]

$$\frac{\partial a_{hk}}{\partial x^\alpha} = 2v_{rl}^\beta \lambda_h^l \lambda_k^r \lambda_\alpha^\beta ,$$

donc dans le cas (21),

$$\frac{\partial a_{hk}}{\partial x^\alpha} = 2a_{hk}\lambda_\alpha^\beta v^\beta$$

ou, en multipliant par dx^α, et en désignant par δ le symbole de différentiation quand les x^h restent constantes,

$$\delta \log a_{hk} = 2v^\beta ds^\beta . \tag{21'}$$

Par une transformation des formes ds^α, on peut réduire le vecteur v^α à la forme $(0, 0, \cdots, 0, v)$. La fonction v est alors un invariant, qui ne doit pas dépendre des variables x^h, car dans le cas contraire, $\partial v/\partial s^h$ seraient les composantes d'un vecteur non nul du groupe (4), qui permeterait d'annuler quelques unes des fonctions c_k^h. La métrique (20) ne dépendant pas des variables x^h, on peut supposer que les formes ds^α sont aussi indépendantes de ces variables. Dans ce cas, le deuxième membre de l'équation (21′) est la différentielle totale exacte d'une fonction 2ρ des variables x^α et en intégrant les équations (21′) on obtient

$$a_{hk} = e^{2\rho} a_{hk}^* ,$$

a_{hk}^* ne dépendant que des variables x^h. On a donc

$$ds_1^2 = e^{2\rho} d\sigma^2, \quad d\rho = v ds^n , \tag{22}$$

où $d\sigma^2 = a_{hk}^* dx^h dx^k$ est une métrique dans les variables x^h.

Nous avons supposé $n \geqq 6, m > n/2$. Considérons maintenant le cas $m = n/2$. Les résultats précédents restent vrais, si l'on suppose que le nombre des fonctions c_β^α indépendantes n'est pas égal à $m(m-1)/2$. Dans le cas où on a $m(m-1)/2$ fonctions c_β^α indépendantes, on peut avoir les formules (15′) avec $\sigma \neq 0$. D'autre part, on a des formules analogues aux formules (19),

$$w_{\alpha\beta}^h = 0 ,$$

si l'on suppose que $m > 3$. Donc dans ce cas,

$$v_{\alpha\beta}^h = \gamma_{\alpha\beta}^h = \gamma_{\beta\alpha}^h . \tag{22'}$$

De même, on a des formules analogues aux formules (21),

$$v_{\alpha\beta}^h = \delta_\beta^\alpha \gamma^h . \tag{22''}$$

En composant les formules (15′), (22′), (22″), on trouve $\sigma = 0$ et on obtient les formules $\gamma_{\alpha\beta}^h = 0$, donc on a les relations

$$\frac{\partial(ds_1^2)}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial(ds_2^2)}{\partial x^h}=0$$

s'encadrant dans les résultats concernant le cas $m>n/2\geqq 3$.

Donc si $m>3$ et $m\geqq n/2$, la métrique ds^2 de V_n est de la forme

$$ds^2=e^{2\rho}d\sigma^2+ds_2^2\,, \tag{23}$$

où $d\sigma^2$ est une métrique dans des variables x^h et ρ, ds_2^2 ne dependent que des variables x^α.

Considérons le tenseur de Ricci à quatre indices des congruences ds^h, ds^α,

$$\gamma^a_{bcd}=\frac{\partial\gamma^a_{bc}}{\partial s^d}-\frac{\partial\gamma^a_{bd}}{\partial s^c}+\gamma^a_{fc}\gamma^f_{bd}-\gamma^a_{fd}\gamma^f_{bc}+\gamma^a_{bf}w^f_{cd}\,. \tag{23$'$}$$

Si l'on suppose $a,b,c,d\leqq m$ et si l'on utilise les formules déjà obtenues,

$$\gamma^h_{\alpha\beta}=w^\alpha_{hk}=0,\quad \gamma^\alpha_{hk}=v^\alpha_{hk}=v\delta^h_k\delta^\alpha_n\,,$$

on trouve

$$\gamma^a_{bcd}=\Gamma^a_{bcd}+v^2(\delta^a_d\delta^b_c-\delta^a_c\delta^b_d)\,, \tag{23$''$}$$

Γ^a_{bcd} étant le tenseur de Ricci des congruences ds^h, où l'on a supposé que les x^α sont constantes. Pour que le tenseur γ^a_{bcd} n'impose aucune relation entre les fonctions c^h_k, outre les conditions d'orthogonalité, il faut que le tenseur Γ^a_{bcd} ait la même propriété. Il en résulte que la métrique (22) doit être à courbure constante, pour des valeurs fixées des variables x^α. Donc la métrique $d\sigma^2$ est à courbure constante.

Les transformations de l'espace V_n, qui conservent la métrique (23) et les systèmes $ds^h=0, ds^\alpha=0$, donc les systèmes $dx^h=0$, $dx^\alpha=0$, sont de la forme

$$\bar{x}^h=\bar{x}^h(x^1,\cdots,x^m)\,;\quad \bar{x}^\alpha=\bar{x}^\alpha(x^{m+1},\cdots,x^n)$$

les $\bar{x}^h$ subissant une transformation qui conserve la métrique à courbure constante $d\sigma^2$, ou qui multiplie cette métrique par une constante, si la courbure est nulle.

En résumant les résultats obtenus, on peut énoncer ce théorème:

THÉORÈME 1. *Soit V_n un espace de Riemann séparable, ayant un système de Pfaff invariant, formé par m équations $ds^h=0$. Supposons que les transformations* (4), *correspondant aux transformations en lui-même de V_n, sont telles que la matrice* (13) *ait le* rang $m(m-1)/2$. *Dans ce cas, si $m>3$ et $m\geqq n/2$, la métrique de V_n est de la forme* (23), *où $d\sigma^2$ est une métrique à courbure constante en m variables $x^1,\cdots,x^m$ et ρ, ds_2^2 ne dépendent que des variables $x^{m+1},\cdots,x^n$. Réciproquement, toute métrique de la forme* (23) *possède un groupe ayant la propriété que le rang de la matrice* (13) *soit égal à* $m(m-1)/2$.

De même, on peut déduire le

THÉORÈME 2. *Si $m>(n+1)/2$, $n\geqq 6$ ou si $m=\dfrac{n+1}{2}$ et $n\neq 7, 15$ et si le rang* *de la matrice* (13) *est plus petit que* $m(m-1)/2$, *mais le rang de la matrice* $(\partial c^h_k/\partial a^\rho, \partial c^\alpha_\beta/\partial a^\rho)$ *est plus grand que* $(n-m)(n-m-1)/2$, *alors le groupe* (4) *possède au moins un invariant de l'un des types suivants:*

$$\gamma^{hk}ds^h ds^k, \quad W_{hklr}ds^h ds^l \delta s^k \delta s^r, \quad V_{hklr}ds^h ds^k \delta s^l \delta s^r \tag{23'''}$$

$$(\gamma^{hk}=\gamma^{kh}, \quad W_{hklr}=-W_{khlr}=W_{lrhk}, \quad V_{hklr}=V_{khlr}=V_{lrhk})$$

qui ne soit pas de la forme, respectivement,

$$\rho\sum_{h=1}^{m}(ds^h)^2, \quad \rho[\sum_{h=1}^{m}(ds^h)^2\cdot\sum_{k=1}^{m}(\delta s^k)^2-(\sum_{h=1}^{m}ds^h\delta s^h)^2], \tag{24}$$

$$\rho\sum_{h=1}^{m}(ds^h)^2\sum_{k=1}^{m}(\delta s^k)^2+\rho'(\sum_{h=1}^{m}ds^h\delta s^h)^2,$$

donc qui ne soit pas un invariant du groupe orthogonal complet en m variables $ds^1, \cdots, ds^m$.

En effet, les considérations précédentes nous montrent que si le rang de la matrice (13) n'est pas égal à $m(m-1)/2$, et si les équations (16), (19), (21) sont vérifiées simultanément, alors la métrique $d\sigma^2$ de la formule (23) doit avoir la courbure variable. Dans ce cas, on a une forme invariante donnée par le tenseur de courbure de la métrique $d\sigma^2$,

$$\Gamma^h_{klr}ds^h ds^l \delta s^k \delta s^r,$$

qui ne se réduit pas à la deuxième forme (24).

Si les conditions (16) ne sont pas vérifiées, deux cas peuvent se présenter: ou bien le tenseur γ^{hk} n'est pas proportionnel à δ^h_k, et alors le théorème 2 est verifié; ou bien on a les relations (15′) avec $\sigma \neq 0$ et les équations (15″) montrent qu'on a au plus $(n-m)(n-m-1)/2$ fonctions c^h_k, c^α_β indépendantes, ce qui n'est pas compatible avec l'une des hypothèses du théorème 2.

Si les conditions (19) ne sont pas vérifiées, on a la forme quadratique (18) qui n'est pas proportionnelle à (18′). De plus, si l'on pose $p_{hk}=ds^h\delta s^k-ds^k\delta s^h$ et $\pi_\alpha=\frac{1}{2}w^\alpha_{hk}p_{hk}=w^\alpha_{hk}ds^h\delta s^k$, on obtient l'invariant

$$\sum_{\alpha=m+1}^{n}\pi^2_\alpha$$

qui ne se réduit pas à la deuxième forme de la formule (24), car une relation du type

$$\sum_{n}(ds^h)^2\cdot\sum_{\kappa}(\delta s^k)^2=\rho'\sum_{\alpha}\pi^2_\alpha+(\sum_{n}ds^h\delta s^h)^2$$

est impossible si $n-m+1<m$, donc si $m>(n+1)/2$, et est en contradiction avec un théorème classique de Hurwitz,[*] si $m\neq 2, 4$ ou 8 et $n=2m-1$.

Enfin, si les relations (21) ne sont pas remplies, on a la forme suivante

$$\sum_{\alpha}v^\alpha_{hk}v^\alpha_{lr}ds^h\delta s^k ds^l\delta s^r=\sum_{\alpha}(v^\alpha_{hk}ds^h\delta s^k)^2$$

---

[*] Hurwitz, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1898, 309-316 (ajouté à la corecture).

qui ne peut pas s'identifier avec la troisième forme de (24) pour les mêmes raisons tirées de la théorie des formes quadratiques.

Le théorème 2 est ainsi démontré.

Supposons maintenant que la métrique (23) est à courbure constante positive $K=1$. En posant dans la formule (23″), $a=c, b=d$, on trouve que la courbure de la métrique (22) est égale à $1+v^2$, donc cette courbure est positive. On peut supposer alors que la courbure de la métrique $d\sigma^2$ est égale à 1 et alors la métrique (23) aura la courbure $e^{-2\rho}$; on a donc

$$e^{-2\rho}=1+v^2 .$$

En posant alors $v=\operatorname{tg}\theta$, on obtient, en supposant $|\theta|<\pi/2$,

$$v=\operatorname{tg}\theta, \quad e^{\rho}=\cos\theta , \tag{25}$$

et la seconde formule (22) donne

$$ds^n=-d\theta . \tag{26}$$

Nous avons observé qu'on peut supposer que les formes ds^{α} ne dépendent pas des variables x^h; dans ce cas nous avons $w^{\alpha}_{h\beta}=0$. Comme on a aussi $w^{h}_{\alpha n}=0$ et $w^{n}_{h\alpha}=0$ la formule (1′) montre que $\gamma^{n}_{\alpha' h}=0$. La formule (23′) donne alors

$$\gamma^{\alpha'}_{h\beta' h}=-\gamma^{n}_{\alpha'\beta'}\gamma^{n}_{hh}=-v\gamma^{n}_{\alpha'\beta'} \quad (\alpha', \beta'=m+1, \cdots, n-1)$$

et la métrique (23) étant à courbure constante $K=1$, on doit avoir $\gamma^{\alpha'}_{h\beta' h}=\delta^{\alpha'}_{\beta'}$ et il en résulte

$$\gamma^{n}_{\alpha'\beta'}=-\delta^{\alpha'}_{\beta'}\operatorname{ctg}\theta . \tag{27}$$

D'autre part, le système $ds^{\alpha'}=0$ est complètement intégrable, car on a $w^{\alpha'}_{hk}=0, w^{\alpha'}_{hn}=\gamma^{\alpha'}_{hn}-\gamma^{\alpha'}_{nh}=-\gamma^{h}_{\alpha' n}+\gamma^{n}_{\alpha' h}=0$.

On peut donc choisir les variables $x^{m+1}, \cdots, x^{n-1}$ telles que

$$ds^{\alpha'}=\lambda^{\alpha'}_{\beta'}dx^{\beta'},$$

et on aura

$$ds^2_2=a_{\alpha'\beta'}dx^{\alpha'}dx^{\beta'}+d\theta^2, \quad (a_{\alpha'\beta'}=\lambda^{\rho'}_{\alpha'}\lambda^{\rho'}_{\beta'}) .$$

La formule

$$\frac{\partial a_{\alpha'\beta'}}{\partial s^n}=-\frac{\partial a_{\alpha'\beta'}}{\partial\theta}=2v^{n}_{\lambda'\mu'}\lambda^{\lambda'}_{\alpha'}\lambda^{\mu'}_{\beta'}$$

et l'équation (27) montrent que

$$\frac{\partial a_{\alpha'\beta'}}{\partial\theta}=2\operatorname{ctg}\theta a_{\alpha'\beta'} ,$$

donc on a

$$a_{\alpha'\beta'}=\sin^2\theta a^{*}_{\alpha'\beta'}, \quad \frac{\partial a^{*}_{\alpha'\beta'}}{\partial\theta}=0 .$$

Un calcul simple, fondé sur la formule (23″), montre que le tenseur de Ricci des congruences $ds^{\alpha'}$ ($\theta=\text{const.}$) est donné par

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'}=\gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'}+(\delta^{\alpha'}_{\gamma'}\delta^{\beta'}_{\delta'}-\delta^{\alpha'}_{\delta'}\delta^{\beta'}_{\gamma'})\operatorname{ctg}^2\theta$$

et il en résulte que la métrique $\sum_{\alpha'}(ds^{\alpha'})^2$ est à courbure constante, égale à $1+\operatorname{ctg}^2\theta=1/\sin^2\theta$, donc la métrique $a^*_{\alpha'\beta'}dx^{\alpha'}dx^{\beta'}$ est à courbure constante $K=1$.

On a donc démontré le

THÉORÈME 3. *Si la métrique* (23) *est à courbure constante* $K=1$, *on peut écrire cette métrique sous la forme*

$$\cos^2\theta d\sigma^2+\sin^2\theta dt^2+d\theta^2\,, \tag{28}$$

où $d\sigma^2, dt^2$ *sont des métriques à courbure constante* $K=1$ *dans les variables* $x^1,\cdots,x^m\,;x^{m+1},\cdots,x^{n-1}$.

Supposons que V_n est la sphère de l'espace euclidien E_{n+1} à $n+1$ dimensions, ayant le rayon 1. Considérons la représentation de cette sphère donnée par les formules

$$y^p=f^p(x^1,\cdots,x^m)\cos\theta,\quad y^q=f^q(x^{m+1},\cdots,x^{n-1})\sin\theta \tag{29}$$
$$(p=1,\cdots,m+1\,;q=m+2,\cdots,n+1)$$

où les équations paramétriques

$$u^p=f^p(x^1,\cdots,x^m),\quad \sum_p(f^p)^2=1$$

définissent la sphère unité dans E_{m+1} et

$$u^q=f^q(x^{m+1},\cdots,x^{n-1}),\quad \sum_q(f^q)^2=1$$

définissent la sphère unité dans E_{n-m}. Dans ce cas, la métrique de la sphère V_n reçoit la forme (28).

Réciproquement, si on a écrit la métrique de la sphère unité de E_{n+1} sous la forme (28), cette forme est équivalente à la forme qu'on obtient de la représentation paramétrique (29), l'équivalence étant donnée par un mouvement de la sphère, donc par une rotation de E_{n+1} autour de l'origine. Il en résulte que les variétés intégrales des systèmes $ds^h=0, ds^\alpha=0$, dans le cas où V_n est la sphère de E_{n+1}, sont les intersections de cette sphère avec des variétés linéaires de E_{n+1}. Dans ce cas, le groupe des mouvements de l'espace séparable V_n est la restriction à V_n d'un groupe de rotations de E_{n+1}, réductible sur le corps réel. On a le

THÉORÈME 4. *Si l'espace séparable* V_n *remplit les conditions du théorème* 1 *et si* V_n *est la sphère unité de* E_{n+1}, *alors le groupe de* V_n *est la restriction à* V_n *d'un groupe orthogonal de* E_{n+1}, *réductible dans le domaine réel.*

Ce théorème nous permettra de démontrer, par un raisonnement par recurrence, qu'un groupe orthogonal irréductible H en $n+1$ variables, qui peut être groupe de stabilité d'un point dans un espace de Riemann à courbure variable, satisfait à l'inégalité

$$\dim H \leqq p^2 ,$$

si $n=2p-1$ ou $n=2p$.

Nous utiliserons encore cette proposition, que nous supposerons connue:

Soient

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \cdots, x^n ; a^1, \cdots, a^r) \quad (i=1, \cdots, n)$$

les transformations d'un groupe G_r *à* r *paramètres dans un espace* V_n *à* n *dimensions et soit* $ds^a = \lambda_i^a(x)dx^i$ *un système de* n *formes de Pfaff indépendantes dans* V_n; *soient encore* $d\bar{s}^a = \bar{\lambda}_i^a(\bar{x})d\bar{x}^i$ *les formes transformées des* ds^a *par une transformation du groupe* G_r. *On a*

$$d\bar{s}_b^a = c_b^a \, ds^b ,$$

c_b^a *étant des fonctions des* x^i *et des paramètres* a^s *du groupe* G_r, *données par*

$$\lambda_j^b c_b^a = \bar{\lambda}_i^a \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} .$$

Si le nombre des fonctions c_b^a *indépendantes est* σ, *on a*

$$r \leqq \sigma + n .$$

II. Les groupes orthogonaux séparables

Nous dirons qu'un groupe orthogonal H de l'espace euclidien E_{n+1} est *séparable* si la restriction H' de ce groupe à la sphère unité V_n possède au moins un système de Pfaff invariant, ayant m équations ($1 \leqq m < n$).

Nous allons démontrer le

THÉORÈME 5. *Un groupe orthogonal séparable* H *de* E_{n+1}, *irréductible dans le domaine réel, a la dimension majorée par* p^2, *si* $n=2p-1$ *ou* $n=2p$.

Ce théorème est banal pour le cas $n<6$, où les groupes orthogonaux irréductibles dans le domaine réel sont connus effectivement.

Nous allons supposer le théorème démontré pour tous les nombres $p<P$ et nous le démontrerons pour $p=P$.

Supposons que $n=2P-1$ et considérons trois cas:

1) Le rang m de tout système de Pfaff invarié par le groupe H' est plus petit ou égal à $(n-1)/2 = P-1$. Soient $m_1, m_2, \cdots, m_s, m=n-m_1- \cdots -m_s$ les rangs des systèmes de Pfaff invariés par H'. Le nombre maximum des fonctions indépendantes $c_k^h, c_\beta^\alpha, \cdots$, apparaissant dans les transformations des formes de Pfaff de ces systèmes invariées par H', est égal à

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} [m_i(m_i-1)] + \frac{1}{2}(n - \sum_{i=1}^{s} m_i)(n - \sum_{i=1}^{s} m_i - 1) . \tag{29'}$$

La fonction φ est définie dans le domaine de l'espace numérique $R^s=\{(m_1, \cdots, m_s)\}$ à s dimensions, donné par les inégalités

$$0 \leqq m_i \leqq P-1, \quad \sum m_i \geqq P. \tag{29''}$$

Le maximum de φ n'est pas atteint dans l'intérieur de ce domaine, donc il est atteint sur la frontière; φ étant symétrique en m_i, m, on peut supposer $m=P-1$ et la fonction φ devient

$$\varphi' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1)+\frac{(P-1)(P-2)}{2},$$

où les m_i sont assujetties aux conditions

$$m_i \leqq P-1, \quad \sum m_i = P;$$

le maximum de φ' s'obtient en supposant $s=2, m_1=1, m_2=P-1$ et on obtient

$$\varphi \max = (P-1)(P-2).$$

Il en résulte qu'on a

$$\dim H' \leqq (P-1)(P-2)+2P-1 = P^2-P+1,$$

donc $\dim H' < P^2$ si $P>1$ et l'induction est assurée.

2) Le groupe H' admet un système invariant à $m=(n+1)/2=P$ équations indépendantes. Si $n>6$, le groupe (4) ne peut contenir $m(m-1)/2$ fonctions c^h_k indépendantes, car dans ce cas le théorème 4 montre que H est réductible. Donc l'une au moins des équations

$$\bar{\gamma}^{hk} c^h_l c^k_r = \gamma^{lr} \tag{30}$$

$$\bar{\gamma}^h_{klr} c^{k'}_k c^{l'}_l c^{r'}_r = \gamma^{h'}_{k'l'r'} c^h_{h'} \tag{31}$$

$$\overline{W}_{hklr} c^h_{h'} c^k_{k'} c^l_{l'} c^r_{r'} = W_{h'k'l'r'} \tag{32}$$

$$\bar{V}_{hklr} c^h_{h'} c^k_{k'} c^l_{l'} c^r_{r'} = V_{h'k'l'r'} \tag{33}$$

impose au moins une relation entre les c^h_k, indépendante des conditions d'orthogonalité. Considérons un des tenseurs $\gamma^{hk}, \gamma^h_{klr}, W_{hklr}, V_{hklr}$, qui donne une telle relation et désignons ce tenseur par $T_{i_1\cdots i_s}$ et désignons par $T^{\circ}_{i_1\cdots i_s}$ la valeur de ce tenseur en un point générique Q de V_n[*]. Considérons les équations

$$T^{\circ}_{i_1\cdots i_s} a^{i_1}_{j_1}\ldots a^{i_s}_{j_s} = T^{\circ}_{j_1\cdots j_s} \tag{34}$$

exprimant que la transformation

$$x'^i = a^i_j x^j \tag{34'}$$

laisse invariant le tenseur $T^{\circ}_{i_1\cdots i_s}$. Considérons le plus grand groupe orthogonal en m variables, laissant invariant le tenseur $T^{\circ}_{i_1\cdots i_s}$. Par l'hypothèse, ce groupe

---

[*] Nous dirons qu'un point Q de V_n est générique si le groupe linéaire défini par les équations (34'), (34) a la dimension maximum.

n'est pas le groupe orthogonal complet $O(m)$; donc il a au plus $(m-1)(m-2)/2+1$ paramètres [2]*). Il en résulte que parmi les premiers membres des équations (34), on a au moins

$$\frac{m(m-1)}{2}-\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1$$

fonctions indépendantes et indépendantes des fonctions $c^h_k c^{h'}_k$ apparaissant dans les premiers membres des conditions d'orthogonalité. Il en résulte que parmi les premiers membres des équations

$$\text{(35)} \qquad \bar{T}_{i_1\cdots i_s} c^{i_1}_{j_1}\cdots c^{i_s}_{j_s} = T_{j_1\cdots j_s}$$

on a au moins $m(m-1)/2-(m-1)(m-2)/2-1$ fonctions indépendantes entre elles et indépendantes des $c^h_k c^{h'}_k$. Donc ces équations et les conditions d'orthogonalité peuvent être résolues par rapport à un nombre de $m(m-1)/2-(m-1)\times(m-2)/2-1+m(m+1)/2$ des fonctions c^h_k. On a donc au plus

$$m^2-\left[\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m+1)}{2}-\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1\right]=\frac{(P-1)(P-2)}{2}+1$$

fonctions c^h_k indépendantes et le groupe H a la dimension

$$\dim H \leqq \frac{(P-1)(P-2)}{2}+1+\frac{(P-1)(P-2)}{2}+2P-1=P^2-P+2$$

donc

$$\dim H < P^2 \quad \text{si} \quad P>2\,.$$

3) Considérons enfin le cas où on a un système de Pfaff, invariant par H', ayant $m>(n+1)/2=P$ paramètres. Dans ce cas, comme plus haut, le groupe (4) ne peut avoir $m(m-1)/2$ fonctions c^h_k indépendantes. D'après le théorème 2, on a deux possibilités: ou bien le nombre des fonctions c^h_k, c^α_β indépendantes est au plus égal à $(n-m)(n-m-1)/2=(P-2)(P-3)/2$ et on a $\dim H \leqq P(P-1)/2+2$; ou bien on a un invariant de l'un des types (23″), distinct du type correspondant de (24). Désignons par $\overset{\circ}{T}_{i_1\cdots i_s}$ les coefficients d'un tel invariant, calculés en un point Q de V_n et considérons les transformations orthogonales en m variables qui laissent invariant le tenseur $\overset{\circ}{T}_{i_1\cdots i_s}$. D'après le théorème 2, à ce tenseur on peut associer une forme invariante, en deux ou un seul groupe de variables x^h, y^h, du deuxième degré en l'un de ces groupes, et qui n'est pas un invariant du groupe complet $O(m)$. En posant $y^h=dx^h$, on déduit que le groupe H_0 des transformations orthogonales qui laissent invariant le tenseur $\overset{\circ}{T}_{i_1\cdots i_s}$ est un groupe séparable. Le groupe H_0 n'est pas réductible dans le domaine réel, car il est équivalent à la restriction du sousgroupe d'isotropie en Q de H, au sousespace de l'espace linéaire tangent en Q à V_n défini par les équations $ds^\alpha=0$. Et si ce dernier groupe serait

---

*) Obata [1], p. 378. Si $m\neq 4$, on peut prendre pour maximum $(m-1)(m-2)/2$.

réductible, le système $ds^h=0$ se décomposerait en deux ou plusieurs sous-systèmes invariants. H_0 étant séparable et irréductible, d'après l'hypothèse d'induction, il a au plus $m^2/4$ paramètres. Donc les équations (34) et les conditions d'orthogonalité imposent au moins

$$m^2-\frac{m^2}{4}$$

relations indépendantes entre les a_k^h. Donc parmi les premiers membres des conditions d'orthogonalité et des équations (35), on a au moins $m^2-m^2/4$ fonctions indépendantes. Donc ces équations peuvent être résolues par rapport à un nombre de $m^2-m^2/4$ coefficients c_k^h et le nombre des coefficients c_k^h indépendants est au plus égal à $m^2/4$. Donc le nombre des coefficients c_k^h, c_β^α indépendants est au plus égal à

$$\varphi=\frac{m^2}{4}+\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}=\frac{3m^2-2(2n-1)m+2n(n-1)}{4}.$$

La fonction φ est définie pour $P+1 \leqq m \leqq n-1$ et les maximums sont atteints aux extrémité de cet interval. Pour $m=P+1$ on obtient $\varphi=(3P^2-8P+13)/4 < P^2$ pour $P>1$. Pour $m=n-1$, on obtient $\varphi=(P-1)^2$ et on a

$$\dim H \leqq (P-1)^2+2P-1=P^2.$$

Donc l'hypothèse d'induction se prolonge pour $n=2P-1$. Avant de passer au cas $n=2P$, remarquons que le seul cas où le groupe H peut avoir P^2 paramètres ($n=2P-1, P>2$) est celui où H' laisse invariant dans V_n un système de Pfaff de rang $2P-2, ds^h=0$ $(h=1,\cdots,2P-2)$ et une équation de Pfaff complémentaire $ds^{2P-1}=0$.

Le système $ds^h=0$ étant en $2P-1$ variables, il est complètement intégrable et on peut choisir les coordonnées de V_n telles qu'on ait

$$ds^h=\lambda_k^h dx^k \quad (h, k=1,\cdots,2P-2).$$

Les transformations (4) ne laissant invariant aucun sous-système du système $ds^h=0$, le tenseur quadratique γ_{hk}^{2P-1} doit être proportionnel à δ_k^h, donc on a

$$\gamma_{hk}^{2P-1}=\rho\delta_k^h.$$

L'équation $ds^{2P-1}=0$ ne peut pas être complètement intégrable, car en cas contraire on pourrait ramener la métrique de V_n à la forme (23). En effet, si $ds^{2P-1}=0$ est complètement intégrable, ds^{2P-1} est une différentielle totale exacte $d\theta$, car le vecteur $\gamma_{2P-1,2P-1}^h$ doit être nul, et on a la forme (23), où ds_2^2 est le carré d'une différentielle exacte $d\theta$. D'après le théorème 4, le groupe H est réductible, ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'équation $ds^{2P-1}=0$ n'étant pas complètement intégrable, le covariant bilinéaire

$$\varDelta s^{2P-1} = \frac{1}{2} w_{hk}^{2P-1} [ds^h ds^k]$$

n'est pas nul et on peut le réduire, par une transformation orthogonale des formes ds^h, à la forme canonique,

$$\varDelta s^{2P-1} = \sum_f w_{2f-1,2f} [ds^{2f-1} ds^{2f}] .$$

Les transformations (4) ne laissant invariant aucun sous-système du système $ds^h = 0$, les invariants $w_{2f-1,2f} (f = 1, \cdots, P-1)$ doivent être égaux et on a

$$(35') \qquad \varDelta s^{2P-1} = W([ds^1 ds^2] + [ds^3 ds^4] + \cdots + [ds^{2P-3} ds^{2P-2}]) .$$

Le groupe H' est transitif dans V_n, car s'il serait intransitif, les variétés de transitivité seraient les intégrales d'un système complètement intégrable, invariant par H'. Or le seul système invariant par H', complètement intégrable, est le système $ds^h = 0$, dont les intégrales sont des courbes, qui ne peuvent pas être des variétés de transitivité du groupe H', si $\dim H' > 1$. Donc le sous-groupe H'_0 de H' de stabilité d'un point Q de V_n est à $P^2 - (2P-1) = (P-1)^2$ paramètres. De plus, ce groupe H'_0 laisse invariante en Q une forme bilinéaire alternée, qu'on obtient en calculant le covariant bilinéaire (35') au point Q.

Il en résulte que H'_0 est la restriction à V_n d'un groupe orthogonal H_0 de E_{2P}, qui laisse invariant un point Q, une forme bilinéaire alternée dans $2P-2$ variables et qui a $(P-1)^2$ paramètres. Il en résulte que H_0 est le groupe unitaire $U(P-1)$ d'un sousespace E_{2P-2} de E_{2P}. Le groupe H, contenant le groupe $U(P-1)$ et ayant $2P-1$ paramètres de plus que H_0, on montre par des calculs simples, qu'on a $H = U(P)$. Donc on peut énoncer le

THÉORÈME 6. *Les seuls sous-groupes de $O(2P)$, irréductibles dans le domaine réel, séparables et ayant P^2 paramètres, sont les groupes conjugués, dans $O(2P)$, au groupe unitaire $U(P)$.*

Considérons maintenant le cas $n = 2P$ est distinguons ici encore plusieures possibilités:

1) Tous les systèmes de Pfaff, invariés par H', ont les rangs $m, m_1, \cdots, m_s < P$. Le maximum de la fonction (29') étant atteint sur la frontière du domaine (29''), on peut supposer $m = P-1$. Comme on a $n - m = P+1 > P-1$, le système $ds^\alpha = 0$ doit contenir au moins deux sous-systèmes invariants, donc on a $s \geqq 2$. On obtient le maximum de φ en posant $m_1 = 2, m_2 = P-1$ et on obtient $\varphi = (P-1)(P-2)+1$ et il en résulte

$$\dim H \leqq (P-1)(P-2)+1+2P = P^2 - P + 3 \leqq P^2$$

si $P \geqq 3$.

2) Supposons qu'on a un système invariant de rang $m = P$ et $P > 3$. Dans ce cas, aucun des groupes (4), (4') ne peut contenir $P(P-1)/2$ fonctions c_k^h ou

c_β^α indépendantes. Un raisonnement utilisé précédemment montre alors que le nombre des fonctions c_k^h (ou c_β^α) indépendantes est au plus égal au nombre des paramètres d'un sous-groupe non trivial du groupe orthogonal $O(P)$, donc on a au plus $2[(P-1)(P-2)/2+1]=(P-1)(P-2)+2$ fonctions c_k^h, c_β^α indépendantes et alors

$$\dim H \leqq P^2-3P+4+2P=P^2-P+4 \leqq P^2$$

si $P>3$.

3) Considérons le cas où $P>3$ et le groupe H admet un système invariant de rang $m>(n+1)/2$, donc $m>P$ et $m \leqq n-3$. Alors on a deux possibilités: ou bien le groupe (4) contient $m(m-1)/2$ fonctions c_k^h indépendantes et d'après le théorème 4, le groupe H est réductible; ou bien le nombre N des fonctions c_k^h indépendantes est au plus égal au nombre des paramètres d'un groupe orthogonal, séparable et irréductible dans le domaine réel, en m variables. Dans ce dernier cas, on a, d'après l'hypothèse d'induction, $N \leqq m^2/4$ et alors

$$\dim H \leqq \frac{m^2}{4}+\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}+n\,.$$

On obtient la valeur maximum de $\dim H$ si l'on pose $m=P+1$ ou $m=2P-3$. Pour $m=P+1$ on a

$$\dim H \leqq \frac{3P^2+4P+5}{4} \leqq P^2$$

si $P \geqq 5$. Pour $P=4$, m est cinq et on peut écrire

$$\dim H \leqq 3+3+8=14<P^2\,,$$

car un groupe orthogonal irréductible en cinq variables, peut avoir 10 ou 3 paramètres. Si $m=2P-3$, on a

$$\dim H \leqq (P-2)^2+3+2P=P^2-2P+7<P^2$$

pour $P>3$.

4) Supposons maintenant que le groupe irréductible H possède un système invariant de rang $m=n-2=2P-2$ et que $P>3$. On a deux possibilités: ou bien le nombre des fonctions c_k^h, c_β^α indépendantes est au plus 1, donc

$$\dim H \leqq 2P+1<P^2\,,$$

ou bien on a les relations (16). Considérons donc cette dernière possibilité.

Considérons le tenseur v_{hk}^α. Si les formes quadratiques $v_{hk}^\alpha ds^h ds^k$ ne sont pas proportionnelles à $\sum_{h=1}^{m}(ds^h)^2$, les relations

$$v_{hk}^\alpha c_l^h c_r^k = v_{lr}^\beta c_\beta^\alpha$$

montrent que le système $ds^h=0$ admet un sous-système invariant par H. Car le sous-groupe de stabilité de H en un point générique Q de V_n laisse alors invariantes les variétés linéaires

$$(\delta_k^h+\lambda\mathring{v}_{hk}^{2P}+\rho\hat{v}_{hk}^{2P-1})\xi^h=0$$

corréspondant aux solutions (λ, ρ) de l'équation $|\,\delta_k^h+\lambda\mathring{v}_{hk}^{2P}+\rho\mathring{v}_{hk}^{2P-1}\,|=0$ qui réalisent les minimums de $\lambda^2+\rho^2$. Donc la restriction H_0 du groupe de stabilité H au sousespace $ds^\alpha=0$ est un groupe réductible. On doit donc avoir :

$$v_{hk}^\alpha=v^\alpha\delta_k^h. \tag{36}$$

Si on a aussi $w_{hk}^\alpha=0$, la métrique de V_n reçoit la forme (23) et le théorème 4 montre que le groupe H est réductible dans le corps des nombres réels.

Si les formes bilinéaires $w_{hk}^\alpha ds^h\delta s^k$ ne sont pas nulles, mais sont proportionnelles, on a $w_{hk}^\alpha=W^\alpha W_{hk}$ et on peut réduire le vecteur W^α à la forme (1, 0). Dans ce cas, la forme $W_{hk}ds^h\delta s^k$ est invariante par les transformations (4). Par une substitution orthogonale des formes ds^h, on peut ramener cette forme à

$$W_1[ds^1ds^2]+W_2[ds^3ds^4]+\cdots+W_{P-1}[ds^{2P-3}ds^{2P-2}]$$

et le groupe (4) n'admettant pour invariant aucun sous-système du système $ds^h=0$, on doit avoir

$$W=W_1=W_2=\cdots=W_{P-1}\neq 0. \tag{36'}$$

On a donc les formules

$$w_{hk}^{2P-1}=0 \quad (h, k\neq 2f-1, 2f), \quad w_{2f-1,2f}^{2P-1}=W \tag{37}$$

$$w_{hk}^{2P}=0 \quad (h, k=1, \cdots, m), \tag{38}$$

et les équations $ds^{2P-1}=0, ds^{2P}=0$ sont invariantes pour le groupe (4'), donc $c_{2P}^{2P-1}=c_{2P-1}^{2P}=0$. Dans ce cas, γ_{2Ph}^{2P-1} sont les composantes d'un vecteur du groupe (4). Ce groupe étant irréductible, on doit avoir

$$\gamma_{2Ph}^{2P-1}=\gamma_{2P-1,h}^{2P}=0. \tag{39}$$

D'autre part, l'équation $ds^{2P}=0$ étant complètement intégrable, à cause de (38), on peut supposer que

$$ds^{2P}=\lambda dx^{2P}. \tag{40}$$

Les formules (36), (38) donnent

$$\gamma_{hk}^{2P}=v^{2P}\delta_k^h. \tag{41}$$

Les formules (23'), (16), (39), (41) montrent que pour $h\neq k$ on a

$$\gamma_{h2Pk}^{2P}=-\gamma_{2P,2P}^{2P-1}\gamma_{hk}^{2P-1}-v^{2P}\gamma_{h,2P}^{k}+v^{2P}w_{2P,k}^{h}.$$

D'autre part on a, V_n étant à courbure constante, si $h\neq k$, $\gamma_{h2Pk}^{2P}=0$; de même $w_{2P,k}^h=\gamma_{2P,k}^h-\gamma_{k,2P}^h=\gamma_{h,2P}^k$ et on obtient l'équation

$$\gamma_{2P,2P}^{2P-1}\gamma_{hk}^{2P-1}=0.$$

Si l'on pose $h=1, k=2$, on obtient, en tenant compte de (36'),

(42) $$\gamma^{2P-1}_{2P2P}=0\,.$$

Le formules (16), (42) montrent que la fonction λ de (40) ne depend que de la variable x^{2P} et par un changement convenable de cette variable on peut la réduire à 1, donc

(43) $$ds^{2P}=dx^{2P}\,.$$

D'une manière analogue, la condition $\gamma^{2P}_{2P-1,1,2}=0$ donne $-v^{2P}\gamma^{2P-1}_{12}+v^{2P}\gamma^{2P-1}_{21}+\gamma^{2P}_{2P-1,2P-1}w^{2P-1}_{12}=0$, ou bien

(44) $$\gamma^{2P}_{2P-1,2P-1}=v^{2P}\,;$$

enfin, l'équation $\gamma^{2P}_{h2Ph}=1$ donne

$$-\frac{\partial v^{2P}}{\partial x^{2P}}-(v^{2P})^2=1\,,$$

donc on a

(45) $$v^{2P}=-\mathrm{tg}\,(x^{2P}+c)$$

où c est une fonction de $x^1,\cdots,x^{2P-1}$.

Les systèmes $ds^h=0\,;\,ds^h=0, ds^{2P-1}=0$ étant complètement intégrables, on peut choisir les variables $x^1,\cdots,x^{2P-1}$ de manière qu'on ait

$$ds^h=\lambda^h_k\,dx^k,\quad ds^{2P-1}=\lambda^{2P-1}_h dx^h+\lambda^{2P-1}_{2P-1}dx^{2P-1}$$

et alors

(46) $$d\omega^2=(ds^1)^2+\,\cdots\,+(ds^{2P-1})^2$$

est une forme quadratique en $dx^1,\cdots,dx^{2P-1}$, dont les coefficients peuvent dépendre aussi de x^{2P}. En fixant la valeur de cette variable, on obtient une métrique en $2P-1$ variables, rapportée aux congruences orthogonales ds^h, ds^{2P-1}. Calculons le tenseur de Ricci Γ^a_{bcd} de cette métrique. On obtient

$$\Gamma^a_{bcd}=\gamma^{2P}_{ac}\gamma^{2P}_{bd}-\gamma^{2P}_{ad}\gamma^{2P}_{bc}+\gamma^a_{bcd}$$

et il en résulte que pour $a\neq c, d$ on a $\Gamma^a_{bcd}=0$, car γ^a_{bcd} a cette propriété et $\gamma^{2P}_{ab}=v^{2P}\delta^a_b$. De même, pour $a=c, b=d$, on obtient

$$\Gamma^a_{bab}=1+(v^{2P})^2\,.$$

Il en résulte qu'en chaque point $(x^1,\cdots,x^{n-1})$, la métrique $d\omega^2$ a la courbure d'une facette plane indépendante de cette facette. D'après le théorème de Schur, cette courbure doit être la même en chaque point, si $2P-1>2$, donc $P>1$. Donc v^{2P} ne dépend pas des variables $x^1,\cdots,x^{2P-1}$ et alors la quantité c de (45) est constante; par un changement de la variable x^{2P}, on peut arriver à la formule

$$v^{2P}=-\,\mathrm{tg}\,x^{2P}\,.$$

Des formules $\gamma^{2P}_{ab}=v^{2P}\delta^a_b, (a, b=1,\cdots,2P-1)$ on déduit que la métrique (46) est de la forme

$$d\omega^2=\cos^2 x^{2P}d\sigma_1^2\,,$$

$d\sigma_1^2$ étant une métrique à courbure constante $K=1$. Donc la métrique de V_n s'écrit

$$ds^2=\cos^2 x^{2P}\cdot d\sigma_1^2+(dx^{2P})^2$$

et cette métrique correspond à une paramétrisation de la sphère de la forme

$$y^i=f^i(x^1,\cdots,x^{2P-1})\cos x^{2P},(i=1,\cdots,2P),y^{2P+1}=\sin x^{2P},\sum(f^i)^2=1\,.$$

L'équation $dx^{2P}=0$ étant invariante pour $H', dy^{2P+1}=0$ sera une équation invariante pour H, donc H est réductible.

Considérons alors le cas où les formes $w^{\alpha}_{hk}[ds^h ds^k],(\alpha=2P-1,2P)$ ne sont pas proportionnelles.

Les transformations (4) ne peuvent contenir $(2P-2)(2P-3)/2$ fonctions c^h_k indépendantes. D'après le théorème 2, le nombre N des fonctions c^h_k indépendantes est alors égal à la dimension d'un groupe orthogonal G en $2P-2$ variables, irréductible dans le domaine réel et séparable. On a donc $N\leqq(P-1)^2$ et d'après le théorème 6, le maximum $(P-1)^2$ est atteint seulement dans le cas où G est le groupe unitaire $U(P-1)$ en $2P-2$ variables réelles. Or le groupe G laisse invariante la forme biquadratique

$$\sum_{\alpha}(\mathring{w}^{\alpha}_{hk}ds^h\delta s^k)^2\,,$$

où $\mathring{w}^{\alpha}_{hk}$ sont les valeurs des coefficients w^{α}_{hk} en un point générique Q de V_n; on sait d'autre part que les seuls invariants du groupe $U(P-1)$, qu'on peut former avec deux vecteurs u^h, v^h sont

$$(u,u)=\sum_{h}(u^h)^2\,;(v,v)\,;(u,v)\,;[u,v]=\sum_{f=1}^{P-1}(u^{2f-1}v^{2f}-u^{2f}v^{2f-1})$$

et leurs combinaisons. On doit donc avoir une égalité de la forme

$$\sum_{\alpha}(\mathring{w}^{\alpha}_{hk}ds^h\delta s^k)^2=\rho(u,u)(v,v)+\rho'(u,v)^2+\rho''[u,v]^2\,;$$

pour $u=v$, le premier membre s'annule, donc on a $\rho'=-\rho$. On ne peut pas avoir $\rho=0$, car dans le cas contraire, les formes $\mathring{w}^{\alpha}_{hk}u^h v^k$, $(\alpha=2P-1,2P)$ seraient proportionnelles à $[u,v]$. On arrive alors à une égalité de la forme

$$(u,u)(v,v)=(u,v)^2+\rho_1[u,v]^2+\sum_{\alpha}(\mathring{w}^{\alpha}_{hk}u^h v^k)^2\,.$$

En fixant le vecteur v, il en résulterait que (u,u) se décompose en la somme des carrés de quatre formes linéaires en u, ce qui est impossible si $2P-2>4$, donc si $P>3$.

5) Considérons enfin le cas où H' possède un système invariant de rang

$m=2P-1$; H' laisse alors invariante la forme de Pfaff ds^{2P}. Le système $ds^h=0$ est complètement intégrable, donc on peut avoir, par un choix convenable des variables,

$$ds^h=\lambda^h_k dx^k\,; \quad (h,k=1,\cdots,2P-1)\,;$$

la forme quadratique $\gamma^{2P}_{hk}ds^h ds^k$ est proportionnelle à $\sum_h (ds^h)^2$, car les transformations (4) ne laissent invariant aucun sous-système du système $ds^h=0$. Donc on a

$$\gamma^{2P}_{hk}=\rho\delta^h_k\,.$$

Le vecteur $\gamma^h_{2P,2P}$ doit être nul pour le même raison. Il en résulte que l'équation $ds^{2P}=0$ n'est pas complètement intégrable, car dans ce cas la métrique de V_n aurait la forme (23) et d'après le théorème 4, le groupe H serait réductible.

Donc le covariant bilinéaire $\Delta s^{2P}=\frac{1}{2}w^{2P}_{hk}[ds^h ds^k]$ n'est pas nul. Or les transformations (4), en un nombre impaire de formes ds^h, laissant invariante une forme bilinéaire alternée Δs^{2P}, laissent aussi invariant au moins un sous-système du système $ds^h=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc le cas $m=2P-1$ ne peut pas donner un groupe H irréductible.

6) Le dernier cas que nous devons considérer est celui ou $P=3$, donc $n=6$. Si $m=3$, on ne peut avoir six fonctions c^h_k, c^α_β indépendantes, que si l'on a $\gamma^{hk}=0, \gamma^{\alpha\beta}=0$, donc

$$\gamma^\alpha_{hk}=\gamma^h_{\alpha\beta}=0\,,$$

ce qui est impossible, car l'espace V_n est irréductible.

Supposons qu'on a 3 fonctions c^h_k indépendantes. Dans ce cas, on a $\gamma^{hk}=\sigma\delta^h_k$. Si $\sigma\neq 0$, les formules (15″) montrent qu'on a au plus 3 fonctions c^h_k, c^α_β indépendantes et alors

$$\dim H\leqq 9\,.$$

Si $\sigma=0$, donc $\gamma^h_{\alpha\beta}=0$, on doit avoir $\gamma^{\alpha\beta}\neq 0$; si $\gamma^{\alpha\beta}=\sigma\delta^\alpha_\beta, \sigma\neq 0$, on peut exprimer les c^α_β à l'aide des c^h_k et on a encore

$$\dim H\leqq 9\,.$$

Enfin, si $\gamma^{\alpha\beta}$ n'est pas proportionnel à δ^α_β, on a au plus une fonction c^α_β indépendante et

$$\dim H\leqq 10\,.$$

Si $m=4$, le nombre des fonctions c^h_k indépendantes ne peut pas être égal à 6, sans que H soit réductible. On a donc au plus 4 fonctions c^h_k indépendantes et 5 fonctions c^h_k, c^α_β indépendantes, donc

$$\dim H\leqq 11\,.$$

En effet, on sait que le groupe $O(4)$ n'admet aucun sous-groupe à 5 paramètres.

Le cas $m=5$ est impossible, pour le même raison qui nous a permis d'éliminer le cas $m=2P-1$, pour $n=2P$.

Donc un groupe séparable irréductible en sept variables a au plus 11 paramètres.

D'autre part, on sait d'après Cartan, qu'un groupe orthogonal irréductible en sept variables peut avoir 3, 14 ou 21 paramètres. Donc:

Les seuls sous-groupes séparables irréductibles de $O(7)$ sont des sous-groupes à 3 paramètres.

Le théorème 5 est ainsi complètement démontré.

On peut remarquer que le groupe orthogonal à 14 paramètres, en 7 variables, qui appartient à la première classe de groupes simples exceptionels, n'est pas séparable. C'est le groupe des automorphismes de l'algèbre de Cayley et il en résulte qu'il ne peut pas être groupe de stabilité dans un espace de Riemann à 7 dimensions*).

III. Les groupes des mouvements d'un espace de Riemann

Nous allons tirer quelques conséquences des résultats précédents, en établissant le nombre maximum des paramètres dont peuvent dépendre les mouvements d'un espace de Riemann à métrique définie, irréductible, et à courbure variable.

On sait qu'un espace de Riemann V_n à courbure constante admet un groupe de mouvements à $n(n+1)/2$ paramètres.

Un espace ce Riemann V_n est dit (localement) réductible si l'on peut trouver, dans tout voisinage de coordonnées de V_n, un système de coordonnées tel que la métrique de V_n soit de la forme $ds^2=ds_1^2+ds_2^2$, où ds_1^2, ds_2^2 soient des métriques ne contenat aucune variable en commun. Un tel espace peut avoir un groupe de mouvements ayant au plus $n(n-1)/2+1$ paramètres est ce maximum est atteint si ds_1^2 est une métrique à courbure constante en $n-1$ variables.

Supposons que l'espace V_n est irréductible et à courbure variable.

Nous allons démontrer le

THÉORÈME 7. *Le groupe de stabilité d'un point générique de V_n est, en coordonnées normales et orthogonales en ce point, un sous-groupe séparable de $O(n)$.*

Si l'espace V_n n'est pas à courbure constante, il existe au moins un point Q de V_n où le tenseur de courbure R_{ijkl} n'est pas de la forme

---

*) Voir aussi Obata, [1], [2].

$$R_{ijkl}=K(\delta^i_k\delta^j_l-\delta^i_l\delta^j_k)\,.$$

Nous dirons alors que le point Q est *générique*. Dans un tel point, la forme biquadratique

$$R=R_{ijkl}x^ix^kdx^jdx^l$$

n'est pas proportionnelle à la forme

$$ds_0^2=\sum_{i,j}(x^idx^j-x^jdx^i)^2\,.$$

Dans ce cas, le groupe de stabilité g_Q du point Q admet pour invariants deux métriques $ds^2=R, ds_0^2$ qui ne sont pas proportionnelles et dont la dernière, ajoutée à $(\sum x^idx^i)^2$, donne une métrique invariante de rang n. Il en résulte que le groupe g_Q admet pour invariants les valeurs propres de la matrice formée avec les quantités $S_{jl}=R_{ijkl}x^ix^k$ et les espaces propres qui correspondent à ces valeurs propres.

Avec ces invariants on peut former au moins un système de Pfaff, invariant par les transformations de g_Q et différant de chacun des systèmes.

$$x^idx^i=0\,;\quad x^idx^j-x^jdx^i=0\,.$$

Le groupe g_Q est donc séparable. Q. E. D. Les théorèmes 5 et 7 nous permettent d'énoncer le

THÉORÈME 8. *Si le groupe de stabilité d'un point générique de V_n est irréductible dans le domaine réel, alors la dimension de ce groupe est au plus p^2, si $n=2p$ ou $2p+1$.*

En particulier, si V_n est homogène, chacun de ses points est générique et on a le

THÉORÈME 9. *Si le groupe de stabilité d'un point, dans un espace de Riemann homogène V_n à courbure variable, est irréductible dans le domaine réel, alors les mouvements de V_n dépendent au plus de $n+p^2$ paramètres.*

Supposons maintenant que le groupe de stabilité g_Q d'un point Q de l'espace homogène V_n a plus de p^2 paramètres. Dans ce cas, le groupe g_Q est, en coordonnées normales orthogonales, un groupe réductible et la restriction de g_Q à l'un des sousespaces stables L^m_Q de l'espace linéaire L^n_Q tangent en Q à V_n, est un groupe isomorphe à $O(m), m>n/2$. On peut choisir les formes de Pfaff ds^α telles que le système $ds^\alpha=0, (\alpha=m+1,\cdots,n)$ donne en chaque point l'espace L^m_Q et alors les formules (4) contiennent $m(m-1)/2$ fonctions c^h_k indépendantes. Le théorème 1 montre alors que la métrique ds^2 est de la forme (23). Dans la formule (23), $d\rho$ est un invariant et si la courbure de la métrique $d\sigma^2$ n'est pas nulle, ρ est lui-même un invariant. Dans ce cas, si ρ n'est pas constant, l'espace V_n n'est pas homogène. Par contre, si ρ est constant, l'espace V_n est réductible.

L'espace V_n peut encore être homogène si la courbure de la métrique $d\sigma^2$

est nulle. Dans ce cas, si de plus la fonction ρ n'est pas constante, on peut la choisir pour coordonnée x^n et on obtient la métrique

$$ds^2 = e^{2x^n}[(dx^1)^2 + \cdots + (dx^m)^2] + ds_2^2. \tag{47}$$

Pour que l'espace V_n ayant la métrique (47) soit homogène, il faut qu'il admet un mouvement de la forme

$$\bar{x}^h = e^c x^h, \quad \bar{x}^n = x^n - c$$

et on peut supposer que pour ce mouvement, les coordonnées $x^{m+1}, \cdots, x^{n-1}$ sont des invariants. Dans ce cas, les coefficients de la forme quadratique ds_2^2 ne dépendent pas de x^n. On a donc le

THÉORÈME 10. *Soit V_n un espace de Riemann homogène et irréductible, à courbure variable et ayant plus de $n+p^2$ paramètres. La métrique de V_n a alors, dans un certain système de coordonnées la forme* (47), *où ds_2^2 est une métrique dans les variables $x^{m+1}, \cdots, x^n$ dont les coefficients ne dépendent pas de la variable x^n.*

D'après le théorème 6, si $n=2p$, le seul groupe orthogonal séparable ayant p^2 paramètres est le groupe unitaire $U(p)$. D'après un théorème de M. G. Vranceanu [5], les seuls espaces homogènes V_{2p} ayant ce groupe pour groupe de stabilité, sont les formes réelles des espaces projectifs complexes unitaires, de Study et Fubini.

On peut encore remarquer que pour $n=2p+1$, il existe un espace homogène V_{2p+1} ayant un groupe $n+p^2$ paramètres et dont la métrique n'est pas de la forme (23). On peut en effet considérer la métrique

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{2p})^2}{1+(x^1)^2 + \cdots + (x^{2p})^2} - \frac{(x^1dx^1 + \cdots + x^{2p}dx^{2p})^2 + [\sum_{i=1}^{p}(x^{2i-1}dx^{2i} - x^{2i}dx^{2i-1})]^2}{[1+(x^1)^2 + \cdots + (x^{2p})^2]^2}$$
$$+\lambda\Big[d\varphi + \frac{\sum_{i=1}^{p}(x^{2i-1}dx^{2i} - x^{2i}dx^{2i-1})}{1+(x^1)^2 + \cdots + (x^{2p})^2}\Big]^2,$$

qui pour $\lambda=0$ donne la métrique des espaces V_{2p} de Study, et pour $\lambda=1/4$ donne la métrique de la sphère de E_{2p+2}.

Remarquons enfin que les espaces V_n ayant une métrique de la forme (23) sont des espaces sous-projectifs d'ordre $m-1$, leurs géodésiques appartenant à des variétés linéaires E_{n-m+1} de la forme

$$x^s = a^s x^m + b^s, \quad (s=1, \cdots, m-1).$$

On a donc le

THÉORÈME 11. *Soit G le groupe des mouvements d'un espace de Riemann irréductible V_n.*

Si on a $\dim G > n+p^2$ $(n=2p$ *ou* $n=2p+1)$, *alors l'espace V_n est sous-projectif d'un certain ordre $m-1$, où $m > n/2$.*

Bibliographie

[1] M. Obata, On n-dimensional homogeneous spaces of Lie groups of dimension greater than $n(n-1)/2$, J. Math. Soc. Japan, **7** (1955), 371-388.

[2] M. Obata, On subgroups of the orthogonal group, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 347-358.

[3] C. Teleman, Sur les groupes maximum des mouvements d'un espace de Riemann V_n, Studii şi Cercetări Matematice, **V** (1954), 143-171.

[4] G. Vranceanu, Leçons de géométrie différentielle, Bucarest I, II, 1957.

[5] G. Vranceanu, Sur une classe d'espaces riemanniens symétriques, Studii şi Cercetări Matematice, **V** (1954), 173-223.

[6] K. Yano, The Lie derivatives and its applications, Amsterdam-Groningen, 1956.