

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉOREME DE PICARD-BOREL-RÉMOUNDOS^{*)}

NOBUSHIGE TODA

(Received November 7, 1970)

1. Introduction. Soit $f(z)$ une fonction algébroïde à $n(\geq 1)$ branches dans le plan $|z| < \infty$ d'ordre non nul définie par une équation irréductible

$$(1) \quad A_0(z)f^n + A_1(z)f^{n-1} + \cdots + A_n(z) = 0$$

où les fonctions $A_0, \dots, A_n$ sont entières sans zéros communs à toutes. Alors, on sait que le nombre de valeurs exceptionnelles au sens de Borel de $f(z)$ est au plus égal à $2n$ ([4], [5], [6]) et que celui de valeurs exceptionnelles au sens de Nevanlinna de défaut 1 est aussi au plus égal à $2n$ ([4], [6]). De plus, il y a des fonctions algébroïdes admettant des valeurs exceptionnelles au sens de Borel dont les défauts ne sont pas égaux à 1 et celles qui admettent des valeurs exceptionnelles au sens de Nevanlinna de défaut 1 sans être exceptionnelles au sens de Borel (voir [4] ou [11] quand $n=1$). Mais, dans ce mémoire, on donne un théorème qui affirme que le nombre de valeurs exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut 1 est au plus égal à $2n$ pour toutes les fonctions algébroïdes définies par (1). D'abord, on considère dans le cas du système et puis, applique aux fonctions algébroïdes. On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna-Selberg ([4], [6]) librement.

2. Préliminaires. Soit $f = (f_0, \dots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$. C'est-à-dire, les fonctions $f_0, \dots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$$

où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique du système f définie par Cartan ([1]). On dit que le nombre

^{*)} Ce travail a été fait en partie avec l'aide de la fondation de Sakkokai (The Sakkokai Foundation).

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$$

est l'ordre de f et le nombre

$$\mu = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$$

est l'ordre inférieur de f .

Si $\rho = \mu$, le système f est dit être à croissance régulière.

Soit

$$F = a_0 f_0 + \dots + a_n f_n \quad (\neq 0)$$

une combinaison linéaire des fonctions $f_0, \dots, f_n$, homogène à coefficients constants non tous nuls. On dit que la combinaison F est

1) exceptionnelle au sens de Borel si l'ordre de $N(r, 0, F)$ est plus petit que celui de f ;

2) exceptionnelle au sens de Nevanlinna de défaut 1 si

$$\delta(F) = 1 - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)} = 1,$$

c'est-à-dire, si

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)} = 0.$$

On donne quelques lemmes qui sont utilisés après.

LEMME 1. Soient $f = (f_0, \dots, f_n)$ un système dans le plan $|z| < \infty$ et A une $(n+1, n+1)$ -matrice régulière. Si

$$A(f_0, \dots, f_n)^t = (F_0, \dots, F_n)^t,$$

alors, on a

$$|T(r, f) - T(r, F)| < O(1)$$

où $F = (F_0, \dots, F_n)$ ([1]).

LEMME 2. Soit $f = (f_0, \dots, f_n)$ un système dans le plan $|z| < \infty$, alors, pour tout $i \neq j, f_j \not\equiv 0$,

$$T(r, f_i/f_j) - O(1) < T(r, f) < \sum_{k \neq j} T(r, f_k/f_j) + O(1)$$

(voir [7]).

LEMME 3. Soient $f = (f_0, \dots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$ et

$$K(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{\sum_{i=0}^n N(r, 0, f_i)}{T(r, f)}$$

où $N(r, 0, f_i) \equiv 0$ quand $f_i \equiv 0$. Si

$$K(f) = 0,$$

alors le système f est à croissance régulière et d'ordre positif entier quand l'ordre de f est fini ([2], [8]).

3. Cas de systèmes. D'abord, on donne deux propositions connues bien quand $n = 1$.

PROPOSITION 1. Soit $f = (f_0, \dots, f_n)$ ($n \geq 1$) un système d'ordre ρ ($0 < \rho \leq \infty$) dans le plan $|z| < \infty$. S'il y a $n+1$ combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \dots, f_n$, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et exceptionnelles au sens de Borel, le système f est à croissance régulière et l'ordre ρ est entier quand il est fini.

DÉMONSTRATION. Soient $F_0, \dots, F_n$ $n+1$ combinaisons satisfaisant à l'hypothèse de cette proposition. D'après les lemmes 1 et 2, il y en a deux (soient F_0, F_1) telles que

$$\text{l'ordre de } F \equiv F_1/F_0 = \rho.$$

Les inégalités suivantes

$$N(r, 0, F) \leq N(r, 0, F_1) \text{ et } N(r, F) \leq N(r, 0, F_0)$$

signifient que 0 et ∞ sont les valeurs exceptionnelles au sens de Borel de F . Cela veut dire que F est à croissance régulière et ρ est entier quand il est fini.

Il faut démontrer que l'ordre inférieur de f est égal à ρ . Soient

$$F_0 = \sum_{i=0}^n \alpha_{0i} f_i \text{ et } F_1 = \sum_{i=0}^n \alpha_{1i} f_i$$

où les α_{0i}, α_{1i} sont constants. Alors, de l'égalité (on peut supposer que $f_0 \not\equiv 0$):

$$F = \frac{F_1}{F_0} = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_{0i} f_i / f_0}{\sum_{i=0}^n \alpha_{1i} f_i / f_0},$$

on a

$$T(r, F) \leq 2 \sum_{i=1}^n T(r, f_i / f_0) + O(1)$$

et en utilisant le lemme 2,

$$T(r, F) \leq 2nT(r, f) + O(1).$$

Cela veut dire que le système f est à croissance régulière.

N.B. Dans ce cas,

$$\delta(F_i) = 1 \quad (i = 0, \dots, n).$$

PROPOSITION 2. Soient $f = (f_0, \dots, f_n)$ un système d'ordre non nul dans le plan $|z| < \infty$ et $\mathcal{F}$ une famille de combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \dots, f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. S'il y a $n+1$ combinaisons dans $\mathcal{F}$ (soient $F_0, \dots, F_n$) telles que

$$\delta(F_i) = 1 \quad (i = 0, \dots, n),$$

toutes les combinaisons exceptionnelles au sens de Borel dans $\mathcal{F}$ sont exceptionnelles au sens de Nevanlinna de défaut 1.

DÉMONSTRATION. Soit $F = (F_0, \dots, F_n)$. Alors, d'après l'hypothèse et grâce au lemme 1, on a

$$0 \leq K(F) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n N(r, 0, F_i)}{T(r, F)} \leq n + 1 - \sum_{i=0}^n \delta(F_i) = 0.$$

Cela veut dire que, d'après le lemme 3, le système F est à croissance régulière. Par conséquent, en vertu du lemme 1, le système f est à croissance régulière aussi. Soit G une combinaison exceptionnelle au sens de Borel appartenant à $\mathcal{F}$. Alors, on a facilement que, f étant à croissance régulière,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, 0, G)}{T(r, f)} = 0.$$

C'est-à-dire,

$$\delta(G) = 1.$$

En utilisant ces propositions, on a le

THÉOREME 1. *Soient $f = (f_0, \dots, f_n)$ un système d'ordre non nul dans le plan $|z| < \infty$ et $\mathcal{F}$ une famille de combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \dots, f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. Alors, le nombre N de combinaisons exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut 1 dans $\mathcal{F}$ est au plus égal à $2n$.*

DÉMONSTRATION. Soit λ le nombre maximum de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \dots, f_n$. Alors,

$$(2) \quad 0 \leq \lambda \leq n - 1.$$

1) le cas où $\mathcal{F}$ contient au moins $n+1$ combinaisons exceptionnelles au sens de Borel. Dans ce cas, grâce à la proposition 1, le système f est à croissance régulière. Par conséquent, les combinaisons exceptionnelles au sens de Borel dans $\mathcal{F}$ sont exceptionnelles au sens de Nevanlinna de défaut 1. On en déduit qu'en vertu du théorème 3 [I] dans [9]

$$N \leq n + \lambda + 1.$$

2) le cas où $\mathcal{F}$ contient au moins $n+1$ combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna de défaut 1. Dans ce cas, en vertu de la proposition 2, les combinaisons exceptionnelles au sens de Borel dans $\mathcal{F}$ admettent le défaut 1. Par conséquent, grâce au théorème 3 [I] dans [9], on a

$$N \leq n + \lambda + 1.$$

3) les autres cas. La famille $\mathcal{F}$ contient au plus n combinaisons exceptionnelles au sens de Porel et au plus n combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna de défaut 1. Il en résulte que

$$N \leq n + n = 2n.$$

De 1), 2) et 3) en considérant (2), on a le résultat.

En cas particulier, on peut préciser le théorème 1. D'abord, on donne quelques lemmes.

LEMME 4. Soient $\Pi(z)$ un produit canonique de genre q et $n(t) = n(t, 0, \Pi)$. Alors, on a

$$\log M(r, \Pi) < cr^q \left\{ \int_r^0 \frac{n(t)}{t^{q+1}} dt + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt \right\}$$

où $\Pi(0) \neq 0$ et c ne dépend pas de r ([4]).

LEMME 5. Soient $\phi(t)$ et $\psi(t)$ deux fonctions continues positives de t pour $t \geq t_0 > 0$ telles que

1) $\psi(t)$ n'est pas décroissante,

2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \phi(t) = +\infty$,

3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = 0$.

Alors, il existe une suite $\{r_m\}_{m=1}^\infty$ telle que

(I) $t_0 < r_1$ et $r_m \nearrow +\infty$

(II) $\phi(t) \leq \phi(r_m)$ ($t_0 \leq t \leq r_m$) et $\frac{\phi(t)}{\psi(t)} \leq \frac{\phi(r_m)}{\psi(r_m)}$ ($r_m \leq t$)

pour tout m ([3] p.101).

THÉORÈME 2. Soient $f = (f_0, \dots, f_n)$ un système d'ordre ρ positif fini non

entier dans le plan $|z| < \infty$ et $\mathcal{F}$ une famille de combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \dots, f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. Alors, le nombre N de combinaisons exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut 1 dans $\mathcal{F}$ est au plus égal à n .

DÉMONSTRATION. Supposons que $N \geq n+1$. Soient $F_0, \dots, F_n$ $n+1$ combinaisons exceptionnelles considérées dans ce théorème et $F = (F_0, \dots, F_n)$. De quelques propriétés de $T(r, f)$ (p. ex. le lemme 2), on peut supposer que les ordres de $f_i (i=0, \dots, n)$ sont au plus égaux à ρ . D'après l'hypothèse que l'ordre ρ du système f n'est pas entier, en utilisant les propositions 1 et 2, on peut conclure qu'il y a au moins une combinaison exceptionnelle au sens de Nevanlinna de défaut 1 sans être exceptionnelle au sens de Borel et au moins une combinaison exceptionnelle au sens de Borel sans être exceptionnelle au sens de Nevanlinna de défaut 1 dans $\{F_i\}_{i=0}^n$. Soient ρ_i l'ordre de $N(r, 0, F_i) (i=0, \dots, n)$. Alors, on peut supposer que

$$\rho_i < \rho \quad (i = 0, \dots, k), \quad \rho_i = \rho \quad (i = k+1, \dots, n)$$

et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, 0, F_i)}{T(r, f)} = 0 \quad (i = k+1, \dots, n)$$

où $0 \leq k \leq n-1$.

De la définition de $T(r, F)$, on a l'inégalité

$$(3) \quad T(r, F) \leq \sum_{i=0}^n \log M(r, F_i)$$

facilement. Ici, on peut écrire

$$F_i(z) = z^{p_i} \exp(P_i(z)) \Pi_i(z)$$

où $p_i (\geq 0)$ est entier, $p_i(z)$ est polynôme de degré $[p] = q$ au plus et $\Pi_i(z)$ est produit canonique des zéros ($\neq 0$) de $F_i(z)$, de sorte que

$$\log M(r, F_i) \leq \log M(r, \Pi_i) + O(r^q) + O(\log r),$$

en utilisant le lemme 4,

$$\log M(r, F_i) \leq c_i r^{q_i} \left\{ \int_0^r \frac{n_i(t)}{t^{q_i+1}} dt + r \int_r^\infty \frac{n_i(t)}{t^{q_i+2}} dt \right\} + O(r^q) + O(\log r)$$

où $n_i(t) = n(t, 0, \Pi_i)$ et q_i est genre de $\Pi_i(z)$, intégrant en partie

$$(4) \quad \log M(r, F_i) \leq c_i r^{q_i} \left\{ q_i \int_0^r \frac{N_i(t)}{t^{q_i+1}} dt + (q_i + 1) r \int_r^\infty \frac{N_i(t)}{t^{q_i+2}} dt \right\} \\ + O(r^q) + O(\log r)$$

où

$$N_i(t) = \int_0^t \frac{n_i(u)}{u} du.$$

Soit

$$(5) \quad \sum_{i=k+1}^n N(r, 0, F_i) = N(r),$$

alors, $N(r)$ est d'ordre ρ .

Or, il existe un nombre ε positif tel que

$$\max_{0 \leq i \leq k} (\max \rho_i, q) + \varepsilon < \rho - \varepsilon \quad \text{et} \quad \rho + \varepsilon < q + 1$$

parce que $\rho_i < \rho (i = 0, \dots, k)$ et $q < \rho < q + 1$.

Soit

$$\beta = \max_{0 \leq i \leq k} (\max \rho_i, q),$$

alors, le coté droit de (4) est d'ordre β au plus pour $i = 0, \dots, k$; par conséquent, on a de (3) et (5)

$$(6) \quad T(r, F) \leq C r^q \left\{ q \int_0^r \frac{N(t)}{t^{q+1}} dt + (q + 1) r \int_r^\infty \frac{N(t)}{t^{q+2}} dt \right\} + O(r^{\beta+\varepsilon})$$

pour toutes les valeurs r suffisamment grandes où $C = \max_{k+1 \leq i \leq n} C_i$. On applique le

lemme 5 à

$$\phi(t) = \frac{N(t)}{t^{\rho-\varepsilon}} \text{ et } \psi(t) = t^{2\varepsilon}.$$

Alors, on a

$$(7) \quad \begin{aligned} N(t) &\leq \left(\frac{t}{r_m}\right)^{\rho-\varepsilon} N(r_m) & (1 \leq t \leq r_m), \\ N(t) &\leq \left(\frac{t}{r_m}\right)^{\rho+\varepsilon} N(r_m) & (r_m \leq t < \infty) \end{aligned}$$

pour tout m .

De (7), il existe un nombre α positif tel que

$$0 < \alpha < \frac{N(r_m)}{r_m^{\rho-\varepsilon}}$$

pour tout $m \geq m_0$. D'autre part, en utilisant

$$N(r, 0, F_i) < T(r, F) + O(1),$$

on a

$$N(r) < (n-k)T(r, F) + O(1),$$

de sorte que

$$0 < \frac{\alpha}{n-k} < \frac{T(r_m, F)}{r_m^{\rho-\varepsilon}} + \frac{O(1)}{r_m^{\rho-\varepsilon}}$$

pour $m \geq m_0$. Par conséquent

$$(8) \quad r_m^{\beta+\varepsilon} = o(T(r_m, F)) \quad (m \rightarrow \infty).$$

Si $0 < \rho < 1, q = 0$. Dans ce cas, on a de (6) et (7)

$$T(r_m, F) \leq r_m N(r_m) \int_{r_m}^{\infty} \left(\frac{t}{r_m}\right)^{\rho+\varepsilon-2} dt + O(r_m^{\beta+\varepsilon}) = \frac{N(r_m)}{1-\varepsilon-\rho} + O(r_m^{\beta+\varepsilon}).$$

En utilisant le lemme 1, (5) et (8), on a

$$0 < 1 - \rho \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{N(r_m)}{T(r_m, f)} \leq \sum_{i=k+1}^n \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{N(r_m, 0, F_i)}{T(r_m, f)} = 0$$

parce que ε est quelconque s'il est suffisamment petit, qui est absurde.

Quand $q > 0$, $q < \rho < q+1$. Dans ce cas, on a de (6) et (7)

$$\begin{aligned} T(r_m, F) - O(r_m^{\beta+\varepsilon}) \\ \leq Cr_m^q N(r_m) \left\{ q \int_0^{r_m} \left(\frac{t}{r_m} \right)^{\rho-\varepsilon} \frac{dt}{t^{q+1}} + (q+1)r_m \int_{r_m}^{\infty} \left(\frac{t}{r_m} \right)^{\rho+\varepsilon} \frac{dt}{t^{q+2}} \right\} \\ = CN(r_m) \left(\frac{q}{\rho-q-\varepsilon} + \frac{q+1}{q+1-\rho-\varepsilon} \right) \\ = \frac{C(q-(2q+1)\varepsilon)N(r_m)}{(\rho-q-\varepsilon)(q+1-\rho-\varepsilon)}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1, (5) et (8), on a

$$0 < \frac{(q+1-\rho)(\rho-q)}{C\rho} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{N(r_m)}{T(r_m, f)} \leq \sum_{i=k+1}^n \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{N(r_m, 0, F_i)}{T(r_m, f)} = 0$$

parce que ε est quelconque s'il est suffisamment petit, qui est absurde.

Cela veut dire que $N \leq n$ si ρ n'est pas entier.

4. Applications. Dans ce paragraphe, on applique les théorèmes dans le paragraphe précédent aux fonctions algébroides (ou méromorphes) définies par l'équation (1). Le lemme suivant est nécessaire.

LEMME 6. Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par (1). Alors, on a

$$|T(r, f) - T(r, A)/n| < O(1)$$

où $A = (A_0, \dots, A_n)$ ([10]).

En utilisant ce lemme, on a des théorèmes 1 et 2 facilement les théorèmes suivants.

THÉOREME 3. Soit $f(z)$ une fonction algébroïde (ou méromorphe) définie par (1). Alors, le nombre de valeurs (finies ou non) exceptionnelles au sens de

Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut 1 est au plus égal à $2n$.

N.B. C'est une généralisation du théorème de Picard-Borel-Rémoundos ([4],[5]) et du théorème 10 [1] dans [9].

THÉOREME 4. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde (ou méromorphe) définie par (1) d'ordre fini non entier. Alors, le nombre de valeurs (finies ou non) exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut 1 est au plus égal à n .*

N.B. C'est une généralisation d'un théorème de Nevanlinna ([4]) quand $n=1$ et du théorème 5 dans [7] quand n est quelconque.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. CARTAN, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, *Mathematica*, 7(1933), 5-31.
- [2] A. EDREI-W. H. J. FUCHS, On the growth of meromorphic functions with several deficient values, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93(1959), 292-328.
- [3] W. K. HAYMAN, Meromorphic functions, OMM, 1964.
- [4] R. NEVANLINNA, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929.
- [5] G. REMOUNDOS, Extensions aux fonctions algébroides multiformes du M. Picard et de ses généralisations, *Mémor. Sci. Math.*, 1927.
- [6] H. L. SELBERG, Algebroiden Funktinen und Umkehrfunktionen Aberscher Integrale, *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo*, 8(1934), 1-72.
- [7] N. TODA, Sur une relation entre la croissance et le nombre de valeurs déficientes de fonctions algébroides ou de systèmes, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 22(1970), 114-121.
- [8] N. TODA, Sur la croissance de fonctions algébroides à valeurs déficientes, *ibid.*, 22(1970), 324-337.
- [9] N. TODA, Sur les combinaisons exceptionnelles de fonctions holomorphes; applications aux fonctions algébroides, *Tōhoku Math. J.*, 22(1970), 290-319.
- [10] G. VALIRON, Sur la dérivée des fonctions algébroides, *Bull. Soc. Math. France*, 59(1931), 17-39.
- [11] G. VALIRON, Remarques sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 57(1933), 71-86.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE TÔHOKU
SENDAI, JAPON

