ENGELSCH E ELEMENTE DER LÄNGE DREI

VON
HERMANN HEINEKEN

Einleitung

Es ist bekannt, daß alle Elemente einer Gruppe G sicher dann engelsch der Länge n sind, wenn G nilpotent der Klasse n ist (d.h. wenn das $(n + 1)$ -te Glied der absteigenden Zentralreihe gleich 1 ist). Allgemeiner sind alle Elemente aus G engelsche Elemente, wenn jede von zwei Elementen erzeugte Untergruppe nilpotent (von endlicher Klasse) ist. Da die abgeleiteten Eigenschaften auf den ersten Blick schwächer als die Ausgangseigenschaften sind, ist die Frage interessant, wie weit eine Umkehrung möglich ist. Um diese Fragen etwas mehr zu präzisieren, erinnern wir an die Definition der engelschen Elemente:

Sind x, y Gruppenelemente, so sei ihr Kommutator durch $x \circ y = x^{-1}y^{-1}xy$ bezeichnet; und die iterierten Kommutatoren werden induktiv durch

$$x^{(1)} \circ y = x \circ y, \quad x^{(n+1)} \circ y = x \circ (x^{(n)} \circ y)$$

erklärt. Das Gruppenelement e heiße engelsch der Länge n , kurz n -engelsch, wenn $x^{(n)} \circ e = 1$ für alle x gilt; und e heiße engelsch, wenn für jedes x in der Kommutatorreihe $x^{(i)} \circ e$ die Eins vorkommt. Weiter sei G eine E_n -Gruppe, wenn alle Elemente aus G engelsch der Länge n sind.

Unter Benutzung dieser Definitionen ergeben sich folgende Fragen:

(A) *Ist eine Gruppe lokal nilpotent, wenn ihre Elemente sämtlich engelsch sind?*

(B) *Sind alle Elemente einer Gruppe G engelsch, wenn G von engelschen Elementen erzeugt wird?*

(A, n) *Ist G eine nilpotente Gruppe der Klasse $c(n)$, wenn die Elemente aus G sämtlich n -engelsch sind?*

(B, n) *Ist G eine E_n -Gruppe, wenn G von n -engelschen Elementen erzeugt wird?*

Diese Fragen sind bisher nur unter Zusatzannahmen behandelt worden; so ist etwa die Antwort auf die Fragen (A) und (B) positiv, wenn die betrachteten Gruppen noethersch sind (Baer [3]); und Gruenberg [4] hat alle vier Fragen für lokal auflösbare Gruppen behandelt.

Levi [7] und Kappe [6] beschäftigten sich mit engelschen Elementen der Länge zwei und konnten dabei (A, 2) bzw. (B, 2) positiv beantworten. Gruenberg zeigte in einem Beispiel [4, S. 166], daß (A, 3) für Gruppen vom Exponenten 4 gewiß zu verneinen ist. Man muß daher damit rechnen, daß die Antworten auf die Fragen (A, 3) und (B, 3), die das Ziel dieser Ar-

Received February 3, 1961.

beit sind, Bedingungen über die "Charakteristik" der Gruppe G enthalten. So beantwortet die Frage (A, 3) der folgende

HAUPTSATZ 1. *Eine E_3 -Gruppe ohne Elemente der Ordnung 2 und 5 ist nilpotent der Klasse 4.*

Hierbei bleibt die Frage offen, ob die Annahme über Elemente der Ordnung 5 entbehrlich ist; die Annahme über Elemente der Ordnung 2 ist jedoch unentbehrlich nach Gruenberg [4, S. 166].

Der Beweis von Hauptsatz 1 stützt sich wesentlich auf den folgenden

HAUPTSATZ 2. *Eine von endlich vielen Elementen erzeugte E_3 -Gruppe ist nilpotent von endlicher Klasse.*

Der Beweis von Hauptsatz 2 stützt sich auf eine Untersuchung von E_3 -Gruppen, die von zwei Elementen erzeugt werden. Diese Gruppen sind nilpotent der Klasse 4; wenn keine Elemente der Ordnung 2 vorkommen, sind sie sogar nilpotent der Klasse 3 (§1, Satz 1). Wir erhalten daraus weiter, daß in einer E_3 -Gruppe das Quadrat eines jeden Elements in einem lokal nilpotenten Normalteiler liegt (§3, Lemma 9).

Auf die Frage (B, 3) antwortet schließlich der folgende

HAUPTSATZ 3. *Die Menge A der Elemente a aus der Gruppe G , die die Bedingung $g^{(3)} \circ a = g^{(3)} \circ a^{-1} = 1$ für alle g aus G erfüllen, ist eine Untergruppe von G , wenn wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

- (I) G enthält keine Elemente der Ordnung 2.
- (II) A enthält nur Elemente endlicher ungerader Ordnung.

Wie sich während der Arbeit herausstellt, bleibt die Art der Klammerung der Kommutatoren ohne Bedeutung. Identisch in a und b gilt nämlich

$$(b \circ (b \circ (b \circ a))) = b^{-3}(((a \circ b^{-1}) \circ b^{-1}) \circ b^{-1})b^3.$$

Dadurch ergibt sich sofort die Äquivalenz der für alle g aus G geltenden Bedingungen $g^{(3)} \circ a = 1$ und $(((a \circ g) \circ g) \circ g) = 1$, und mit $a^{(3)} \circ g = 1$ ergibt sich

$$(((g \circ a^{-1}) \circ a^{-1}) \circ a^{-1}) = 1.$$

Da die Voraussetzungen immer symmetrisch in a und a^{-1} gewählt wurden, ändert die Art der Klammerung nichts am Ergebnis.

Für seine Anregungen zu dieser Arbeit danke ich Herrn Professor R. Baer sehr herzlich.

Bezeichnungen

Das *Erzeugnis* $\{a, b\}$ von a und b ist die kleinste Untergruppe, die a und b enthält.

Die Gruppe G ist *nilpotent der Klasse n* , wenn die Zentralreihe die Form

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_n \supseteq G_{n+1} = 1$$

hat. Hierbei ist $G_{k+1} = \{\dots, g \circ h, \dots \mid g \text{ aus } G, h \text{ aus } G_k\}$. Die Gruppe G ist nilpotent der Klasse *genau* n , wenn $G_{n+1} = 1$ und $G_n \neq 1$ gilt.

Wir werden mit $Z(G)$ das *Zentrum* von G bezeichnen und definieren induktiv

$$Z_1(G) = Z(G), \quad Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z(G/Z_n(G)).$$

Die Gruppe G ist *auflösbar*, wenn die abgeleitete Reihe

$$G \supseteq G' \supseteq G'' = G^{(2)} \supseteq \dots$$

nach endlich vielen Schritten mit 1 endet ($G' = G_2$).

$$G^k = \{\dots, g^k, \dots \mid g \text{ aus } G\}.$$

1. E_3 -Gruppen, die von zwei Elementen erzeugt werden

In diesem Abschnitt werden wir uns mit dem Erzeugnis $G = \{a, b\}$ zweier Elemente a, b befassen für die einige oder alle der folgenden sechs Relationen gelten:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & a^{(3)} \circ b = 1, & \text{(IV)} & b^{(3)} \circ a^{-1} = 1, \\ \text{(II)} & a^{(3)} \circ b^{-1} = 1, & \text{(V)} & (ab)^{(3)} \circ a = 1, \\ \text{(III)} & b^{(3)} \circ a = 1, & \text{(VI)} & (ab)^{(3)} \circ a^{-1} = 1. \end{array}$$

Wir beginnen mit

LEMMA 1. Sind (I) und (II) erfüllt, so gilt auch $(a \circ b)^{(2)} \circ a = 1$.

Beweis. Es ist

$$1 = a^{(3)} \circ b = a \circ (a \circ (a^{-1}b^{-1}ab)) = a \circ (a \circ (b^{-1}ab)) = a^{(2)} \circ (b^{-1}ab);$$

entsprechend ergibt sich

$$1 = a^{(3)} \circ b^{-1} = a^{(2)} \circ (bab^{-1}).$$

Transformation der zweiten Formel mit b ergibt

$$1 = (b^{-1}ab)^{(2)} \circ a = (b^{-1}ab) \circ ((b^{-1}ab) \circ a) = (b^{-1}ab) \circ ((a \circ b) \circ a).$$

Dann folgt aber

$$\begin{aligned} (a \circ b)^{(2)} \circ a &= (a^{-1}b^{-1}ab) \circ ((a \circ b) \circ a) \\ &= b^{-1}a^{-1}b(a^{-1} \circ ((a \circ b) \circ a))b^{-1}ab((b^{-1}ab) \circ ((a \circ b) \circ a)) \\ &= b^{-1}a^{-1}b(a^{-1} \circ ((a \circ b) \circ a))b^{-1}ab \\ &= 1, \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} a^{-1} \circ ((a \circ b) \circ a) \\ = a(a \circ (a \circ b))(a \circ (a \circ (a \circ b)))(a \circ (a \circ b))^{-1}a^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 1 bewiesen.

LEMMA 2. Sind (I) und (II) erfüllt, so gilt

$$a^n \circ (a \circ b) = a \circ (a \circ b)^n = (a \circ (a \circ b))^n \quad \text{und} \\ a^n \circ b = (a \circ (a \circ b))^{-w(n)} (a \circ b)^n \quad \text{mit } w(n) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Beweis. Wegen Lemma 1 ist $a^{-1}(a \circ b)a$ mit $a \circ b$ vertauschbar; daher ist $a \circ (a \circ b)^n = a^{-1}(a \circ b)^{-n}a(a \circ b)^n = (a \circ (a \circ b))^n$. Bei der oberen Gleichung genügt es also, $a^n \circ (a \circ b) = (a \circ (a \circ b))^n$ nachzuweisen. Dies geschieht durch vollständige Induktion nach positivem n . Für $n = 0, 1$ ist die Behauptung richtig. Ist die Behauptung für alle Zahlen kleiner n schon richtig und $n > 1$, so ist sie auch richtig für n . Denn

$$a^n \circ (a \circ b) = a^{-1}(a^{n-1} \circ (a \circ b))a(a \circ (a \circ b)),$$

und nach Induktionsvoraussetzung gilt dann wegen (I)

$$a^n \circ (a \circ b) = a^{-1}(a^{n-1} \circ (a \circ b))a(a \circ (a \circ b)) \\ = a^{-1}(a \circ (a \circ b))^{n-1}a(a \circ (a \circ b)) \\ = (a \circ (a \circ b))^{n-1}(a \circ (a \circ b)) = (a \circ (a \circ b))^n.$$

Damit ist die erste Behauptung für positive n bewiesen. Ist n eine positive Zahl, so ist

$$a^{-n} \circ (a \circ b) = a^n((a \circ b) \circ a^n)a^{-n} = a^n(a^n \circ (a \circ b))^{-1}a^{-n} \\ = a^n(a \circ (a \circ b))^{-n}a^{-n} = (a \circ (a \circ b))^{-n},$$

und unsere erste Behauptung ist für alle ganzen Zahlen n bewiesen. Wir wenden uns nun der zweiten Behauptung des Lemmas zu. Die Behauptung wird wiederum durch vollständige Induktion nach n nachgewiesen. Für $n = 0, 1$ ist die Behauptung richtig. Ist die Behauptung schon für alle positiven Zahlen kleiner n bewiesen, so ist sie auch für n richtig, da

$$a^n \circ b = a^{-n+1}(a \circ b)a^{n-1}(a^{n-1} \circ b) = (a \circ b)((a \circ b) \circ a^{n-1})(a^{n-1} \circ b).$$

Ist nun $v = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$a^n \circ b = (a \circ b)(a \circ (a \circ b))^{-n+1}(a \circ (a \circ b))^{-v}(a \circ b)^{n-1} \\ = (a \circ (a \circ b))^{-v-n+1}(a \circ b)^n = (a \circ (a \circ b))^{-w(n)}(a \circ b)^n.$$

Damit ist die Behauptung für positives n bewiesen. Ist n weiter eine positive Zahl, so ist

$$a^{-n} \circ b = a^n(b \circ a^n)a^{-n} = a^n(a^n \circ b)^{-1}a^{-n} \\ = a^n(a \circ (a \circ b))^{w(n)}(a \circ b)^{-n}a^{-n} \\ = (a \circ (a \circ b))^{w(n)}(a^{-n} \circ (a \circ b)^n)(a \circ b)^{-n} \\ = (a \circ (a \circ b))^{w(n)-n^2}(a \circ b)^{-n}.$$

Nun ist aber

$$w(n) - n^2 = -\frac{1}{2}n(n + 1) = -\frac{1}{2}(-n)(-n - 1) = -w(-n),$$

und die Behauptung ist auch für negatives n bewiesen.

ZUSATZ 1. Aus (I) und (II) folgt $(a^s \circ (a^t \circ b)) = (a \circ (a \circ b))^{st}$ und daher $a^r \circ (a^s \circ (a^t \circ b)) = 1$.

Beweis.

$$\begin{aligned} a^s \circ (a^t \circ b) &= a^s \circ ((a \circ (a \circ b))^{-w(t)}(a \circ b)^t) \\ &= a^s \circ (a \circ b)^t = (a \circ (a \circ b))^{st}. \end{aligned}$$

LEMMA 3. Gelten die Relationen (I) und (II) und ist $a^m = 1$, so ist $(a \circ b)^m = 1$ für ungerades m und $(a \circ b)^{2m} = 1$ für gerades m .

Beweis. Da $a^m = 1$, gilt

$$\begin{aligned} 1 &= a^m \circ (a \circ b) = (a \circ (a \circ b))^m \quad \text{und} \\ 1 &= a^m \circ b = (a \circ (a \circ b))^{-w(m)}(a \circ b)^m. \end{aligned}$$

Ist nun m ungerade, so ist $w(m)$ durch m teilbar und es gilt

$$1 = (a \circ b)^m, \quad \text{da } (a \circ (a \circ b))^m = 1.$$

Ist m gerade, so ist jedenfalls $2w(m)$ durch m teilbar, und wir erhalten $1 = (a \circ b)^{2m}$.

Wir beginnen mit der Anwendung aller sechs Relationen.

SATZ 1. Ist $G = \{a, b\}$ und werden von a und b die Relationen (I) bis (VI) erfüllt, so ist G metabelsch und nilpotent der Klasse 4 und es gilt $x^{(3)} \circ y = 1$ für alle x, y aus G .

Beweis. Wir werden der Reihe nach nachweisen:

1. $G' = \{a \circ b, a^{-1}(a \circ b)a, b^{-1}(a \circ b)b, b^{-1}a^{-1}(a \circ b)ab\}$.
2. G' ist abelsch.
3. G ist nilpotent der Klasse $c \leq 4$.
4. Für alle x, y aus G gilt $x^{(3)} \circ y = 1$.

1. Die Erzeugenden von G' . Bei dieser Überlegung wird nur (I) und (III) gebraucht. Bekanntlich ist $G' = \{a, b\}'$ der kleinste $a \circ b$ enthaltende Normalteiler von G . Ist

$$H = \{a \circ b, a^{-1}(a \circ b)a, b^{-1}(a \circ b)b, (ab)^{-1}(a \circ b)ab\},$$

so ist H gewiß in G' enthalten; es genügt also nachzuweisen, daß H ein Normalteiler ist. Wir kommen mit dem Nachweis $H = a^{-1}Ha$ und $H = b^{-1}Hb$ aus, und zwar weisen wir nach, daß das oben angegebene Erzeugen-

densystem von H in $a^{-1}Ha$ und das Erzeugendensystem von $a^{-1}Ha$ in H liegt. Nun gilt aber

$$b^{-1}a^{-1}(a \circ b)ab = (b \circ a)a^{-1}b^{-1}(a \circ b)ba(a \circ b)$$

und daher

$$\begin{aligned} H &= \{a \circ b, a^{-1}(a \circ b)a, b^{-1}(a \circ b)b, b^{-1}a^{-1}(a \circ b)ab\} \\ &= \{a \circ b, a^{-1}(a \circ b)a, b^{-1}(a \circ b)b, a^{-1}b^{-1}(a \circ b)ba\} \\ &= \{b \circ a, b^{-1}(b \circ a)b, a^{-1}(b \circ a)a, a^{-1}b^{-1}(b \circ a)ba\}. \end{aligned}$$

Daher genügt der Nachweis für $a^{-1}Ha$, aus Symmetriegründen gilt dann das entsprechende für $b^{-1}Hb$. Durch Transformation mit a erhält man für $a^{-1}Ha$ die Erzeugenden $a^{-1}(a \circ b)a$, $a^{-2}(a \circ b)a^2$, $a^{-1}b^{-1}(a \circ b)ba$, $a^{-1}b^{-1}a^{-1}(a \circ b)aba$; diese Erzeugenden sind nun als Produkte von Erzeugenden von H darzustellen und umgekehrt. Man erhält

$$(1) \quad a^{-2}(a \circ b)a^2 = a^{-1}(a \circ b)a(a \circ b)^{-1}a^{-1}(a \circ b)a,$$

$$(2) \quad a^{-1}b^{-1}(a \circ b)ba = (a \circ b)b^{-1}a^{-1}(a \circ b)ab(a \circ b)^{-1},$$

$$\begin{aligned} (3) \quad a^{-1}b^{-1}a^{-1}(a \circ b)aba &= (a \circ b)b^{-1}a^{-2}(a \circ b)a^2b(a \circ b)^{-1} \\ &= (a \circ b)b^{-1}a^{-1}(a \circ b)abb^{-1}(a \circ b)^{-1}b \\ &\quad \cdot b^{-1}a^{-1}(a \circ b)ab(a \circ b)^{-1}; \end{aligned}$$

$$(1') \quad a \circ b = a^{-1}(a \circ b)aa^{-2}(a \circ b)^{-1}a^2a^{-1}(a \circ b)a,$$

$$(2') \quad b^{-1}a^{-1}(a \circ b)ab = (a \circ b)^{-1}(a^{-1}b^{-1}(a \circ b)ba)(a \circ b),$$

$$\begin{aligned} (3') \quad b^{-1}(a \circ b)b &= a^{-1}b^{-1}(a \circ b)ba(a \circ b)a^{-1}b^{-1}a^{-1}(a \circ b)^{-1}aba \\ &\quad \cdot (a \circ b)^{-1}a^{-1}b^{-1}(a \circ b)ba. \end{aligned}$$

Aus (1) bis (3) folgt nun, daß $a^{-1}Ha$ in H liegt, und beachtet man, daß wegen (1') $a \circ b$ in $a^{-1}Ha$ liegt, so ergibt sich aus (1') bis (3'), daß H in $a^{-1}Ha$ liegt. Daher ist $a^{-1}Ha = H$, und aus Symmetriegründen folgt $b^{-1}Hb = H$, daher ist H ein Normalteiler von G und es gilt $H = G'$.

2. G' ist abelsch. Wegen (I) bis (VI) und Lemma 1 ist das Element $a \circ b$ vertauschbar mit $a^{-1}(a \circ b)a$, $b^{-1}(a \circ b)b$ und $(ab)^{-1}(a \circ b)ab$, also liegt $a \circ b$ im Zentrum von G' . Dann liegen aber auch alle Konjugierten von $a \circ b$ im Zentrum von G' , und daher ist G' abelsch.

3. G ist nilpotent der Klasse $c \leq 4$. Da G' und G/G' abelsch sind, ergibt sich

$$a \circ (b \circ (a^{(2)} \circ b)) = b \circ (a \circ (a^{(2)} \circ b)) = 1,$$

$$\begin{aligned} b \circ (b \circ (a \circ (a \circ b))) &= b \circ (a \circ (b \circ (a \circ b))) \\ &= a \circ (b \circ (b \circ (a \circ b))) = 1. \end{aligned}$$

Das Element $b \circ (a^{(2)} \circ b) = a \circ (b \circ (a \circ b))$ liegt also im Zentrum von G . Sei nun $N = \{a \circ (b \circ (a \circ b))\}$, im Zentrum von G/N liegen die Elemente $(b \circ (a \circ b))N$ und $(a \circ (a \circ b))N$. Sei weiter $N_1 = \{N, a \circ (a \circ b), b \circ (a \circ b)\}$; im Zentrum von G/N_1 liegt dann $a \circ b$. Es ist jedoch $G' = \{N_1, a \circ b\}$, und wir erhalten folgende Zentralreihe:

$$1 \subseteq N \subseteq N_1 \subseteq G' \subseteq G,$$

daher ist G nilpotent und $c \leq 4$.

Ehe wir an den Beweis von Teil 4 herantreten, wollen wir einige dabei benötigte Grundtatsachen beweisen.

LEMMA 4. *Unter den Bedingungen (I) bis (VI) ist*

$$\begin{aligned} (b \circ (a \circ (a \circ b)))^2 &= (b^2 \circ (a \circ (a \circ b))) = b \circ (a^2 \circ (a \circ b)) \\ &= b \circ (a \circ (a^2 \circ b)) = b \circ (a \circ (a \circ b^2)) = 1. \end{aligned}$$

Beweis. Es genügt $(b \circ (a \circ (a \circ b)))^2 = (b \circ (a \circ (a \circ b)^2)) = 1$ zu beweisen, die anderen Identitäten folgen aus Lemma 2, Zusatz 1 und aus der Eigenschaft, daß G' abelsch ist. Wir betrachten nun $(ab)^{-2}(a \circ b)(ab)^2$. Wegen (V) ergibt sich dann $(ab)^{-2}(a \circ b)(ab)^2 = b^{-1}a^{-1}(a \circ b)^2ab(a \circ b)^{-1}$, denn G' ist abelsch, und aus (I) und (III) erhält man

$$\begin{aligned} (ab)^{-2}(a \circ b)(ab)^2 &= b^{-2}a^{-2}(a \circ b)a^2b^2 \\ &= b^{-2}a^{-1}(a \circ b)^2ab^2b^{-2}(a \circ b)^{-1}b^2 \\ &= a^{-1}b^{-2}(a \circ b)^2b^2ab^{-2}(a \circ b)^{-1}b^2 \\ &= a^{-1}b^{-1}(a \circ b)^4baa^{-1}(a \circ b)^{-2}ab^{-1}(a \circ b)^{-2}b(a \circ b). \end{aligned}$$

Daher ist

$$1 = a^{-1}b^{-1}(a \circ b)^2baa^{-1}(a \circ b)^{-2}ab^{-1}(a \circ b)^{-2}b(a \circ b)^2 = a \circ (b \circ (a \circ b)^2),$$

$$b \circ (a \circ (a \circ b)^2) = 1,$$

was zu zeigen war.

ZUSATZ 2. $G = \{a, b\}$ ist nilpotent der Klasse 3 und $b \circ (a \circ (a \circ b)) = 1$, wenn (I) bis (VI) und eine der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (α) a hat ungerade Ordnung.
- (β) b hat ungerade Ordnung.
- (γ) G' ist frei von Elementen der Ordnung 2.

Durch Lemma 3 führt (α) und (β) zu (γ). Durch (γ) und Lemma 4 folgt $b \circ (a \circ (a \circ b)) = 1$; daher ist in der in Satz 1, Teil 3 angegebenen Zentralreihe $N = 1$, und G ist nilpotent der Klasse 3.

Wir setzen nun den Beweis von Satz 1 fort:

4. $x^{(3)} \circ y = 1$ für alle x, y aus G . Das Element $x \circ y$ ist enthalten in G' ; da G' abelsch ist, folgt aus $x^{(2)} \circ u = 1$ für alle Erzeugenden u von G' die Behauptung $x^{(3)} \circ y = 1$. Aus $(rxr^{-1})^{(2)} \circ u = 1$ folgt $x^{(2)} \circ (r^{-1}ur) = 1$, es

genügt also, $u = a \circ b$ und alle x aus G zu betrachten. Da G' jedoch abelsch ist, genügt sogar die Betrachtung des Falles $x = a^n b^m$ allein. Es ist nun nach Lemma 2

$$\begin{aligned} (a^n b^m) \circ (a \circ b) &= b^{-m} (a^n \circ (a \circ b)) b^m (b^m \circ (a \circ b)) \\ &= b^{-m} (a \circ (a \circ b))^n b^m (b \circ (a \circ b))^m \\ &= (a \circ (a \circ b))^n (b^m \circ (a \circ (a \circ b)))^{-1} (b \circ (a \circ b))^m \\ &= (a \circ (a \circ b))^n (b \circ (a \circ (a \circ b)))^{-nm} (b \circ (a \circ b))^m \\ &= (b \circ (a \circ (a \circ b)))^{-nm} (a \circ (a \circ b))^n (b \circ (a \circ b))^m, \end{aligned}$$

und daher ergibt sich

$$\begin{aligned} (a^n b^m)^{(2)} \circ (a \circ b) &= (a^n b^m) \circ ((b \circ (a \circ (a \circ b)))^{-nm} (a \circ (a \circ b))^n (b \circ (a \circ b))^m) \\ &= (a^n b^m) \circ ((a \circ (a \circ b))^n (b \circ (a \circ b))^m) \\ &= (a^n \circ (b \circ (a \circ b))^m) (b^m \circ (a \circ (a \circ b))^n) \\ &= (a \circ (b \circ (a \circ b)))^{nm} (b \circ (a \circ (a \circ b)))^{mn} \\ &= (a \circ (b \circ (a \circ b)))^{2mn} \\ &= 1 \end{aligned}$$

nach Lemma 4.

Damit ist der Beweis von Satz 1 abgeschlossen.

LEMMA 5. *Wenn die Bedingungen (I) bis (VI) gelten, so ist*

$$(ab)^n = a^n b^n (b \circ (a \circ (a \circ b)))^{d(n)} (a \circ (a \circ b))^{e(n)} (b \circ (a \circ b))^{f(n)} (a \circ b)^{g(n)}$$

mit

$$\begin{aligned} d(n) &= -3\binom{n}{4} - 2\binom{n}{3}, & e(n) &= \binom{n}{3}, \\ f(n) &= 2\binom{n}{3} + \binom{n}{2}, & g(n) &= \binom{n}{2} \end{aligned}$$

für positive Zahlen n .

Beweis. Es handelt sich um eine Ausführung des Kommutatorsammelprozesses für den Spezialfall einer metabelschen Gruppe, die nilpotent der Klasse 4 und E_3 -Gruppe ist (vgl. [10, S. 165]). Da $d(1) = e(1) = f(1) = g(1) = 0$, ist die Behauptung für $n = 1$ richtig. Ist die Behauptung schon für alle positiven Zahlen kleiner als n bewiesen, dann zeigen wir sie auch für n . Es ergibt sich nämlich

$$(ab)^n = ab(ab)^{n-1} = aba^{n-1}b^{n-1}c,$$

wobei $c = b^{1-n}a^{1-n}(ab)^{n-1}$ ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (ab)^n &= aba^{n-1}b^{n-1}c = a^n b (a^{n-1} \circ b)^{-1} b^{n-1} c \\ &= a^n b^n (a^{n-1} \circ b)^{-1} (b^{n-1} \circ (a^{n-1} \circ b)) c \\ &= a^n b^n (a \circ b)^{1-n} (a \circ (a \circ b))^{w(n-1)} (a \circ (a \circ b))^s (b \circ (a \circ (a \circ b)))^t c \end{aligned}$$

mit

$$w(n - 1) = (n - 1)(n - 2)/2, \quad s = (n - 1)^2 = 2\binom{n-1}{2} + (n - 1),$$

$$t = -(n - 1)(n - 2)(n - 1)/2 = -3\binom{n-1}{3} - 2\binom{n-1}{2}.$$

Daher erhält man weiter

$$d(n) = d(n - 1) - 3\binom{n-1}{3} - 2\binom{n-1}{2}, \quad e(n) = e(n - 1) + \binom{n-1}{2},$$

$$f(n) = f(n - 1) + 2\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}, \quad g(n) = g(n - 1) - \binom{n-1}{1}.$$

Setzt man nun die schon bekannten Werte ein, so bekommt man das gewünschte Ergebnis.

LEMMA 6. *Wenn die Bedingungen (I) bis (VI) gelten und $a^{p^n} = b^{p^n} = 1$ ist, so ist auch $(ab)^{p^s} = 1$ mit*

$$s = \text{Max}(m, n) \quad \text{für } p \neq 2, 3,$$

$$s = \text{Max}((\text{Max}(m, n)), (\text{Min}(m, n) + 1)) \quad \text{für } p = 3,$$

$$s = \text{Max}((\text{Max}(m, n)), (\text{Min}(m, n) + 2)) \quad \text{für } p = 2.$$

Beweis. Nach Satz 1 ist $\{a, b\}$ für $p \neq 2$ nilpotent der Klasse 3. Ist nun $p \neq 2, 3$, so ist p größer als die Nilpotenzklasse von $\{a, b\}$. Daraus folgt insbesondere, daß die folgende Gleichung gilt:

$$(ab)^{p^k} = a^{p^k} b^{p^k} c^{p^k} \quad \text{für jedes } k,$$

wobei c ein Element aus $\{a, b\}'$ ist (vgl. dazu etwa Hall [10, S. 183]). Nach Lemma 3 und Satz 1, Teil 1 ist $\{a, b\}'$ jedoch höchstens vom Exponenten p^s und

$$(ab)^{p^s} = a^{p^s} b^{p^s} c^{p^s} = 1.$$

Ist nun $p = 3$, so wenden wir Lemma 5 an. Das Element $(ab)^{p^s}$ liegt sicher in der Kommutatorgruppe von $\{a, b\}$ und die Kommutatoren haben höchstens die Ordnung 3^r mit $r = \text{Min}(m, n)$ nach Lemma 3. Nun ist aber

$$d(3^s) \equiv e(3^s) \equiv f(3^s) \equiv g(3^s) \equiv 0 \pmod{3^{s-1}}$$

nach Lemma 5 und wegen $r \leq s - 1$ ist die Behauptung auch für $p = 3$ richtig. Für $p = 2$ gilt $(a \circ (b \circ (a \circ b)))^2 = 1$ und die Kommutatoren haben höchstens die Ordnung 2^r mit $r = \text{Min}(m, n) - 1 \leq s - 1$. Man rechnet nun leicht nach, daß

$$d(2^s) \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{und} \quad e(2^s) \equiv f(2^s) \equiv g(2^s) \equiv 0 \pmod{2^{s-1}}$$

gilt. Damit ist Lemma 6 bewiesen.

2. Schranken für Exponenten

In diesem Abschnitt werden wir allgemeine Betrachtungen über Gruppen durchführen, deren sämtliche Elemente x, y der Bedingung $x^{(3)} \circ y = 1$

genügen, also über E_3 -Gruppen. Unser späteres Ziel ist nachzuweisen, daß E_3 -Gruppen lokal nilpotent sind.

SATZ 2. *In einer E_3 -Gruppe ist die Menge aller p -Elemente eine (charakteristische) Untergruppe.*

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 6.

Nach Gruenberg [4, S. 158 und 160] ist eine [lokal] auflösbare E_3 -Gruppe schon lokal nilpotent; wir werden daher in E_3 -Gruppen vorerst abelsche Normalteiler aufsuchen, um so schrittweise zur Auflösbarkeit zu kommen. Wir betrachten dazu vorläufig Torsionsgruppen; hier können wir uns wegen Satz 2 auf p -Gruppen beschränken.

SATZ 3. *Ist G eine E_3 -Gruppe und sind die Ordnungen der Elemente eines Erzeugendensystems Teiler von p^n , so ist G vom Exponenten p^m mit*

$$\begin{aligned} m &= n && \text{für } p \neq 2, 3, \\ m &= n + 1 && \text{für } p = 3, \\ m &= n + 2 && \text{für } p = 2. \end{aligned}$$

Beweis. Sei t ein Element aus G und als Produkt von Erzeugenden geschrieben. Wir führen Induktion nach der "Länge" von t durch. Für die Erzeugenden ist richtig, daß ihre Ordnung p^m teilt. Sei nun schon bewiesen, daß alle Elemente, deren Länge kleiner als die von t ist, eine p^m teilende Ordnung haben. Dann gibt es ein erzeugendes Element a und ein Produkt kleinerer Länge w , so daß $t = aw$. Ist nun $o(a) = p^g$ und $o(w) = p^h$, dann ist $g \leq n$, $h \leq m$ und $o(t)$ wegen Lemma 6 ein Teiler von p^i mit

$$\begin{aligned} i &= \text{Max}(g, h) \leq n = m && \text{für } p \neq 2, 3, \\ i &= \text{Max}((\text{Max}(g, h)), (\text{Min}(g, h) + 1)) \leq n + 1 = m && \text{für } p = 3, \\ i &= \text{Max}((\text{Max}(g, h)), (\text{Min}(g, h) + 2)) \leq n + 2 = m && \text{für } p = 2. \end{aligned}$$

Durch diesen Induktionsschluß ist bewiesen, daß alle Elemente aus G eine p^m teilende Ordnung haben; G ist also höchstens vom Exponenten p^m .

LEMMA 7. *Ist G eine E_3 -Gruppe vom Exponenten p^{2n} und sind a und b Elemente aus G , so ist*

$$a^{p^n} b^{p^n} = b^{p^n} a^{p^n} \quad \text{außer für } p^n = 2.$$

Beweis. Es ist

$$a^{p^n} \circ b^{p^n} = (b \circ (a \circ (a \circ b)))^g (a \circ (a \circ b))^h (b \circ (a \circ b))^k (a \circ b)^m$$

mit

$$g = p^{2n}(p^n - 1)^2/4, \quad m = p^{2n}, \quad h = k = -p^{2n}(p^n - 1)/2.$$

Sei nun G vom Exponenten p^{2n} mit $p \neq 2$. Dann ist $a^{p^n} \circ b^{p^n} = 1$, da $g \equiv h \equiv k \equiv m \equiv 0 \pmod{p^{2n}}$.

Ist G vom Exponenten 2^{2n} und $1 < n$, so ist $a^{2^{2n}} = 1$ und daher

$$1 = a^{2^{2n}} \circ b = (a \circ (a \circ b))^{-2^{2n-1}(2^{2n-1})} (a \circ b)^{2^{2n}} = (a \circ (a \circ b))^{-2^{2n-1}}.$$

Aus Symmetriegründen gilt dasselbe für $b \circ (a \circ b)$. Nach Lemma 4 gilt außerdem $(b \circ (a \circ (a \circ b)))^2 = 1$. Dann ist wiederum $a^{2^n} \circ b^{2^n} = 1$, da

$$\begin{aligned} g &= 2^{2n-2}(2^n - 1)^2 \equiv 0 \pmod{2} && \text{wegen } 1 < n, \\ h &= k = 2^{2n-1}(2^n - 1) \equiv 0 \pmod{2^{2n-1}}, \\ m &= 2^{2n} \equiv 0 \pmod{2^{2n}}. \end{aligned}$$

Da die Gruppen vom Exponenten 3 in ihrer Struktur bekannt sind, erhält man nun

ZUSATZ 3. *Eine E_3 -Gruppe vom Exponenten 3^{2^n} ist auflösbar und es ist $G^{(n+2)} = 1$.*

Beweis. Wir führen vollständige Induktion nach n durch. Für $n = 1$ ist der Satz richtig; da Gruppen vom Exponenten drei metabelsch sind, gilt für sie $G^{(2)} = 1$, vergleiche Levi und van der Waerden [8, S. 156]. Sei der Satz nun bewiesen für ein gewisses n , so ist er auch richtig für $n + 1$. Ist nämlich G vom Exponenten $3^{2^{n+1}}$, so erhält man nach Lemma 7, daß die 3^{2^n} -ten Potenzem der Elemente aus G einen abelschen Normalteiler A erzeugen. G/A ist dann eine E_3 -Gruppe vom Exponenten 3^{2^n} , daher gilt nach Induktionsvoraussetzung $G^{(n+2)} \subseteq A$ und daher $G^{(n+3)} \subseteq A' = 1$, und die Behauptung ist bewiesen.

In unseren weiteren Überlegungen werden wir Gruppen vom Exponenten 2^n gesondert behandeln müssen. Dazu wird uns der folgende Satz behilflich sein:

SATZ 4. *Eine von endlich vielen Elementen der Ordnung 2 erzeugte E_3 -Gruppe ist endlich.*

Beweis. Nach Satz 3 ist eine von Elementen der Ordnung 2 erzeugte E_3 -Gruppe vom Exponenten 8. Nach Lemma 7 ist $G^4 = N$ abelsch. Die Faktorgruppe G/N ist dann vom Exponenten 4 und wird von Elementen der Ordnung 2 erzeugt. Diese Gruppen sind nach Wright [9, S. 1104, Theorem 6.1] nilpotent der Klasse $n + 1$. Daher ist G auflösbar und weiter nach Gruenberg [4] nilpotent. Daher ist G endlich, und das war zu zeigen.

3. Beweis von Hauptsatz 2

Bevor wir mit dem Beweis von Hauptsatz 2 beginnen, beschäftigen wir uns mit Elementen a , die die Bedingung $g \circ (a \circ (a \circ g)) = 1$ für alle g aus G erfüllen. Für diese gilt der

SATZ 5. *Eine Gruppe G ist lokal nilpotent, wenn in G ein Erzeugendensystem A mit der Eigenschaft existiert, daß jedes Element a aus A die Bedingung $g \circ (a \circ (a \circ g)) = 1$ für alle g aus G erfüllt.*

Beim Beweis wird folgendes Lemma benötigt:

LEMMA 8. Ein Element x aus G , für das $g \circ (x \circ (x \circ g)) = 1$ für alle g aus G gilt, liegt in einem abelschen Subnormalteiler vom Defekt 2.

Beweis von Lemma 8. Ist N der kleinste x enthaltende Normalteiler von G und ist n aus N , so ist zum Beweis von Lemma 8 zu zeigen, daß x mit $n^{-1}xn$ vertauschbar ist. Der Normalteiler N ist das Erzeugnis aller in G zu x konjugierten Elemente. Wir werden die Vertauschbarkeit von x mit $n^{-1}xn$ durch vollständige Induktion nach der "Länge" des Produkts n durchführen.

Setzen wir zunächst in der oben angegebenen Identität das Element xg an die Stelle von g ein, so erhalten wir

$$1 = (xg) \circ (x \circ (x \circ (xg))) = (xg) \circ (x \circ (x \circ g)).$$

Daher gilt

$$1 = x \circ (x \circ (x \circ g)).$$

Das Element x ist daher mit allen $n^{-1}xn$ der Form $n = g^{-1}xg$ vertauschbar. Sei die Vertauschbarkeit von x mit $y^{-1}xy$ bereits für alle y aus N bewiesen, die kleinere "Länge" als n haben. Dann gibt es ein Element w aus N mit kleinerer "Länge" als n und ein s aus G mit $n = ws^{-1}xs$.

Es ist dann nach Voraussetzung und Induktionsannahme

$$1 = (w^{-1}xws) \circ (x \circ (x \circ (w^{-1}xws))) = (w^{-1}xws) \circ (x \circ (x \circ s));$$

außerdem gilt

$$1 = s \circ (x \circ (x \circ s)),$$

und daher erhält man

$$1 = (w^{-1}xw) \circ (x \circ (x \circ s)) = (w^{-1}xw) \circ (a^{-1}xa)$$

mit $a = s^{-1}xs$, da ja x mit $w^{-1}xw$ vertauschbar ist. Wegen

$$1 = x^{(3)} \circ (s^{-1}) = x^{(2)} \circ (sxs^{-1}),$$

$$1 = s^{-1}(x^{(2)} \circ (sxs^{-1}))s = (s^{-1}xs)^{(2)} \circ x = a^{(2)} \circ x$$

erhält man jedoch

$$1 = (a^{-1}x^{-1}a)(a^{-2}xa^2)(a^{-1}x^{-1}a)x,$$

und daher durch Konjugation mit a^{-1}

$$1 = x^{-1}(a^{-1}xa)x^{-1}(axa^{-1}).$$

Nach Induktionsannahme gilt aber

$$1 = (w^{-1}xw) \circ x,$$

und daher erhalten wir aus den beiden errechneten Gleichungen

$$1 = (w^{-1}xw) \circ (axa^{-1}),$$

$$1 = a^{-1}((w^{-1}xw) \circ (axa^{-1}))a = (a^{-1}w^{-1}xwa) \circ x = (n^{-1}xn) \circ x,$$

und das war zu zeigen.

Der Beweis von Satz 5 gestaltet sich nun einfach. Da die Erzeugenden von G in abelschen Subnormalteilern vom Defekt 2 liegen, liegen sie in lokal nilpotenten Normalteilern. Damit ist G als Produkt lokal nilpotenter Normalteiler selbst lokal nilpotent. Wir können nun Hauptsatz 2 beweisen.

Beweis von Hauptsatz 2. Sei G eine endlich erzeugte E_3 -Gruppe. Nach Lemma 4 gilt für jedes Elementepaar a, b aus G $(b \circ (a \circ (a \circ b)))^2 = 1$ und daher erst recht

$$(b \circ (a^2 \circ (a^2 \circ b))) = (b \circ (a \circ (a \circ b)))^4 = 1,$$

wegen Lemma 2, Zusatz 1 und da $\{a, b\}$ metabelsch ist. Daher ist nach Satz 5 der von den Elementequadraten aufgespannte Normalteiler von G lokal nilpotent. Diesen Normalteiler nennen wir Q . Die Faktorgruppe G/Q ist vom Exponenten zwei und endlich erzeugt, daher ist sie endlich. Es ist wohlbekannt, daß ein Normalteiler Q endlich erzeugt ist, wenn G endlich erzeugt und G/Q endlich ist, vgl. etwa Baer [1, S. 396]. Also ist Q nilpotent und daher ist G auflösbar. Dann ist G nach Gruenberg [4, S. 158] lokal nilpotent, also in diesem Fall nilpotent, da G endlich erzeugt ist. Damit ist Hauptsatz 2 bewiesen.

4. Dreiengelsche Elemente

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Gruppen beschäftigen, die von den die Bedingungen

$$g^{(3)} \circ a = g^{(3)} \circ a^{-1} = 1$$

für alle g aus G erfüllenden Elementen a erzeugt werden. Wir werden dazu zunächst Elemente a und b betrachten, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$(a', i) \quad (a^i b)^{(3)} \circ a = 1,$$

$$(a'', i) \quad (a^i b)^{(3)} \circ a^{-1} = 1.$$

Hierbei sei i eine ganze Zahl zwischen 0 und 4. Nach Lemma 1 folgt aus (a', i) und (a'', i) bei gleichem i , daß $b^{-1}a^{-i}(b \circ a)a^i b$ mit $b \circ a$ vertauschbar ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} a^{-1}b^{-1}a^{-i+1}(b \circ a)a^{i-1}ba &= (a \circ b)b^{-1}a^{-i}(b \circ a)a^i b(b \circ a) \\ &= b^{-1}a^{-i}(b \circ a)a^i b; \end{aligned}$$

$$(b, i) \quad (a^{i-1}ba)^{-1}(b \circ a)a^{i-1}ba = (a^i b)^{-1}(b \circ a)a^i b.$$

LEMMA 9. *Gelten für die Elemente a und b die Bedingungen (a', i) und (a'', i) für $i = 0, 1, \dots, 4$, dann gilt auch*

$$a^2 \circ (a \circ (a \circ b)) = 1.$$

Beweis. Aus $(a', 1)$ folgt

$$(ab)^{-2}(b \circ a)(ab)^2 = (ab)^{-1}(b \circ a)(ab)(b \circ a)^{-1}(ab)^{-1}(b \circ a)(ab);$$

aus $(a', 1)$ und $(a'', 1)$ folgt die Vertauschbarkeit von $(ab)^{-1}(b \circ a)(ab)$ mit $b \circ a$, und daher gilt

$$(c, 1) \quad (ab)^{-2}(b \circ a)(ab)^2 = (ab)^{-1}(b \circ a)^2(ab)(b \circ a)^{-1}.$$

Schließlich ergibt die Anwendung von (b, 2) auf die rechte Seite

$$(d, 1) \quad (a^2b^2)^{-1}(b \circ a)(a^2b^2) = (ab)^{-1}(b \circ a)^2(ab)(b \circ a)^{-1}.$$

Durch die Anwendung von $(a', 2)$, $(a'', 2)$ ergibt sich

$$(c, 2) \quad (a^2b)^{-2}(b \circ a)(a^2b)^2 = (a^2b)^{-1}(b \circ a)^2(a^2b)(b \circ a)^{-1},$$

und wendet man nun (b, 3) und (b, 4) an, so erhält man

$$\begin{aligned} (a^2b)^{-2}(b \circ a)(a^2b)^2 &= (a^2ba^2b)^{-1}(b \circ a)(a^2ba^2b) \\ &= (a^3bab)^{-1}(b \circ a)(a^3bab) \\ &= (a^4b^2)^{-1}(b \circ a)(a^4b^2). \end{aligned}$$

Aus (c, 2) ergibt sich daher

$$(d, 2) \quad (a^4b^2)^{-1}(b \circ a)(a^4b^2) = (a^2b)^{-1}(b \circ a)^2(a^2b)(b \circ a)^{-1}.$$

Aus $(a', 0)$ und $(a'', 0)$ erhalten wir noch

$$(d, 0) \quad b^{-2}(b \circ a)b^2 = b^{-1}(b \circ a)^2b(b \circ a)^{-1}.$$

Die Gleichungen (d, 0) und (d, 1) werden nun mit $b^{-1}ab = a(a \circ b)$ transformiert, man erhält so

$$(e, 0) \quad b^{-1}a^{-1}b^{-1}(b \circ a)bab = b^{-1}a^{-1}b(b \circ a)^{-1}b^{-1}abb^{-1}a^{-1}(b \circ a)^2ab,$$

$$(e, 1) \quad b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-2}(b \circ a)a^2bab = b^{-1}a^{-1}b(b \circ a)^{-1}b^{-1}abb^{-1}a^{-2}(b \circ a)^2a^2b.$$

Auf die linke Seite von (e, 0) wendet man nun (c, 1) und auf die linke Seite von (e, 1) die Formel (c, 3) an. Dann ergibt sich

$$(f, 0) \quad b^{-2}a^{-1}(b \circ a)ab^2 = (b \circ a)a^{-1}(b \circ a)^{-1}a(b \circ a)^{-1}b^{-1}a^{-1}(b \circ a)^2ab,$$

$$(f, 1) \quad b^{-2}a^{-3}(b \circ a)a^3b^2 = (b \circ a)a^{-1}(b \circ a)^{-1}a(b \circ a)^{-1}b^{-1}a^{-2}(b \circ a)^2a^2b.$$

Wir betrachten nun $b^{-2}a^{-1}((a \circ b) \circ a)ab^2$ und erhalten durch Anwendung von (d, 1) und (f, 0)

$$\begin{aligned} b^{-2}a^{-1}((a \circ b) \circ a)ab^2 &= b^{-2}a^{-1}(b \circ a)ab^2b^{-2}a^{-2}(a \circ b)a^2b^2 \\ &= (b \circ a)a^{-1}(b \circ a)^{-1}a(b \circ a)^{-1}b^{-1}a^{-1}(b \circ a)^2ab \\ &\quad \cdot b^{-1}a^{-1}(a \circ b)^2ab(b \circ a) \\ &= ((a \circ b) \circ a); \end{aligned}$$

man erhält also

$$(ab^2) \circ (a \circ (a \circ b)) = 1.$$

Wir wenden nun (d, 2) und (f, 1) an und erhalten

$$\begin{aligned} b^{-2}a^{-3}((a \circ b) \circ a)a^3b^2 &= b^{-2}a^{-3}(b \circ a)a^3b^2b^{-2}a^{-4}(a \circ b)a^4b^2 \\ &= (b \circ a)a^{-1}(b \circ a)^{-1}a(b \circ a)^{-1}b^{-1}a^{-2}(b \circ a)^2a^2b \\ &\qquad \qquad \qquad \cdot b^{-1}a^{-2}(b \circ a)^{-2}a^2b(b \circ a) \\ &= ((a \circ b) \circ a). \end{aligned}$$

So ergibt sich

$$(a^3b^2) \circ (a \circ (a \circ b)) = 1.$$

Ist aber $a \circ (a \circ b)$ mit ab^2 und mit a^3b^2 vertauschbar, so auch mit $a^3b^2(ab^2)^{-1} = a^2$, und daher gilt

$$a^2 \circ (a \circ (a \circ b)) = 1,$$

und das war zu zeigen.

SATZ 6. Sei E ein endliches Erzeugendensystem von G derart, daß

$$g^{(3)} \circ a = g^{(3)} \circ a^{-1} = 1$$

für alle a aus E und alle g aus G gilt. Ist weiter G frei von Elementen der Ordnung 2, falls nicht alle Elemente aus E (endliche) ungerade Ordnung haben, so ist G nilpotent und es gilt $a^{(3)} \circ g = 1$ für alle a aus E und alle g aus G .

Beweis. Für die Elemente a aus E gilt nach Lemma 9

$$a^2 \circ (a \circ (a \circ g)) = 1.$$

Nach [5] erfüllt a auch die Gleichung

$$a^{(4)} \circ g = 1.$$

Aus diesen beiden Formeln erhält man

$$1 = a^2 \circ (a \circ (a \circ g)) = a^{-1}(a^{(3)} \circ g)a(a^{(3)} \circ g) = (a^{(3)} \circ g)^2.$$

Hat a nun keine endliche Ordnung, so gibt es keine Elemente der Ordnung 2 in G und wir erhalten $a^{(3)} \circ g = 1$. Hat a ungerade Ordnung, so ist wegen $a^{(4)} \circ g = 1$ jedenfalls a vertauschbar mit $(a^{(2)} \circ g)^{-1}a(a^{(2)} \circ g)$. Daher hat $a^{(3)} \circ g$ eine die Ordnung von a teilende Ordnung. Zusammen mit der Gleichung oben erhält man dann $a^{(3)} \circ g = 1$.

Nun sind alle Voraussetzungen von Lemma 4, Zusatz 2 erfüllt. Also gilt $g \circ (a \circ (a \circ g)) = 1$ für alle a aus E und alle g aus G . Daher können wir Satz 5 anwenden; G ist lokal nilpotent und daher nilpotent, denn G ist endlich erzeugt.

ZUSATZ 4. Ist a ein Element aus G und gilt $g^{(3)} \circ a = g^{(3)} \circ a^{-1} = 1$ für alle g aus G , so ist der kleinste a enthaltende Normalteiler N von G lokal nilpotent,

wenn N frei von Elementen der Ordnung 2 ist, falls nicht a von (endlicher) ungerader Ordnung ist.

Der Beweis ergibt sich direkt aus Satz 6.

Im nächsten Abschnitt wird uns das folgende Lemma nützlich sein:

LEMMA 10. Die Gruppe G ist eine E_3 -Gruppe, wenn sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

- (a) G enthält keine Elemente der Ordnung 2.
- (b) Die Menge A der Elemente a aus G mit $g^{(3)} \circ a = g^{(3)} \circ a^{-1} = 1$ für alle g aus G bildet eine Untergruppe von G .
- (c) A ist endlich erzeugbar und G/A ist zyklisch.

Beweis. Wir betrachten den kleinsten Normalteiler H von G , der alle Erzeugenden a_i enthält. Nach (b) gilt $H \subseteq A$. Sei k ein beliebiges Element aus G , so läßt es sich als Produkt $b^m h$ mit h aus H schreiben, da $\{b, H\} = G$. Nun gilt $g^{(3)} \circ h = g^{(3)} \circ h^{-1} = 1$ für alle g aus G , wegen (a) können wir Satz 6 anwenden und erhalten $h^{(3)} \circ g = 1$. Wir können nun Satz 1 anwenden und erhalten, daß $\{b, h\}$ eine E_3 -Gruppe ist; also ist auch

$$(b^m h)^{(3)} \circ b = (b^m h)^{(3)} \circ b^{-1} = 1,$$

daher

$$k^{(3)} \circ b = k^{(3)} \circ b^{-1} = 1 \quad \text{für jedes } k \text{ aus } G.$$

Wir benutzen nun die Bedingung (b) und erhalten, daß G eine E_3 -Gruppe ist, was zu zeigen war.

5. Schranken für die Nilpotenzklasse

Daß E_3 -Gruppen lokal nilpotent sind, war das Ergebnis von Abschnitt 3. In diesem Abschnitt wollen wir nun versuchen, etwas über die obere Schranke der Nilpotenzklasse auszusagen. Wir beginnen vorerst mit der Feststellung einer wahrscheinlich wohlbekannten Tatsache:

LEMMA 11. Sei ε eine Gruppeneigenschaft, die die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

- (α) Hat G die Eigenschaft ε , so hat auch $G/Z(G)$ die Eigenschaft ε .
- (β) Hat G die Eigenschaft ε und ist G nilpotent der Klasse $n + 1$, so ist G nilpotent Klasse n .

Dann gilt: Hat G Eigenschaft ε und ist G nilpotent, so ist G nilpotent der Klasse n .

Beweis. Jede nilpotente ε -Gruppe hat eine n nicht überschreitende Klasse. Ist nämlich G eine ε -Gruppe der Klasse $n + m$, so ist $G/Z_i(G)$ eine ε -Gruppe der Klasse $n + m - i$ wegen (α). Da also $G/Z_{m-1}(G)$ wegen (β) die Klasse $c \leq n$ haben muß, so ist sogar $G = Z_{n+m-1}(G)$, und die Behauptung folgt durch vollständige Induktion.

Bemerkung. Lokal nilpotente ε -Gruppen haben eine n nicht überschreitende Klasse, wenn noch gilt:

(γ) Endlich erzeugbare Untergruppen von ε -Gruppen liegen in endlich erzeugbaren ε -Gruppen.

Lemma 11 gibt uns die Möglichkeit, ein hinreichendes Kriterium dafür anzugeben, daß aus der identisch für alle g aus G erfüllten Relation $g^{(3)} \circ a = 1$ die Bedingung $g^{(3)} \circ a^{-1} = 1$ folgt.

LEMMA 12. Ist a von ungerader Ordnung, so folgt $g^{(3)} \circ a^{-1} = 1$ aus $g^{(3)} \circ a = 1$ für alle g aus G , wenn $\{g, a\}$ nilpotent ist für alle g aus G .

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\{a, g\}$ nilpotent, wir wollen zuerst beweisen, daß $\{a, g\}$ nilpotent der Klasse 3 ist. Dazu nehmen wir an, daß $\{a, g\}$ nilpotent der Klasse 4 ist. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} 1 &= (ag)^{(3)} \circ a = (ag)^{(2)} \circ (g \circ a) \\ &= (g^{(3)} \circ a)(g \circ (a \circ (g \circ a)))(a \circ (g \circ (g \circ a)))(a \circ (a \circ (g \circ a))) \\ &= (g \circ (a \circ (g \circ a)))(a \circ (g \circ (g \circ a)))(a \circ (a \circ (g \circ a))). \end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= (ag^{-1})^{(3)} \circ a \\ &= (g \circ (a \circ (g \circ a)))(a \circ (g \circ (g \circ a)))(a \circ (a \circ (g \circ a)))^{-1}, \end{aligned}$$

und durch Multiplikation erhalten wir weiter

$$1 = (g \circ (a \circ (g \circ a)))^2 (a \circ (g \circ (g \circ a)))^2.$$

Außerdem gilt aber

$$1 = ((g \circ a) \circ (g \circ a)) = (g \circ (a \circ (g \circ a)))(a \circ (g \circ (g \circ a)))^{-1}$$

und daher ergibt sich

$$1 = (g \circ (a \circ (g \circ a)))^4 = (a \circ (g \circ (g \circ a)))^4.$$

Da jedoch das Element a ungerade Ordnung hat und $\{a, g\}$ nilpotent ist, hat auch der Kommutator $a \circ (g \circ (g \circ a))$ ungerade Ordnung. Es bleibt daher nur

$$1 = (g \circ (a \circ (g \circ a))) = (a \circ (g \circ (g \circ a))) = (a \circ (a \circ (g \circ a))),$$

und $\{a, g\}$ ist nilpotent der Klasse 3, wenn $\{a, g\}$ nilpotent der Klasse 4 ist. Damit ist $\{a, g\}$ aber nach Lemma 11 nilpotent der Klasse 3, was zunächst zu zeigen war.

Ist nun $\{a, g\}$ nilpotent der Klasse 3, so gilt $g^{(3)} \circ a^{-1} = 1$, und Lemma 12 ist bewiesen.

ZUSATZ 5. Ist a aus G von ungerader Ordnung und G lokal noethersch oder lokal auflösbar, so folgt $g^{(3)} \circ a^{-1} = 1$ aus $g^{(3)} \circ a = 1$ für alle g aus G .

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\{a, g\}$ noethersch oder auflösbar, daher ist $\{a, g\}$ nilpotent nach Baer [3, S. 257] bzw. Gruenberg [4, S.160].

In §4, Satz 6 haben wir gezeigt, daß eine Gruppe G nilpotent ist, wenn sie von endlich vielen Elementen a ungerader Ordnung mit

$$g^{(3)} \circ a = g^{(3)} \circ a^{-1} = 1 \quad \text{für alle } g \text{ aus } G$$

erzeugt wird. Diese Aussage wird etwas verallgemeinert im folgenden

LEMMA 13. *Die Gruppe G ist nilpotent, wenn in G keine Elemente der Ordnung 2 vorkommen und $G = \{b, a_1, \dots, a_n\}$ wobei gilt $g^{(3)} \circ a_i = g^{(3)} \circ a_i^{-1} = 1$ für alle g aus G und alle $i = 1, \dots, n$.*

Beweis. Sei H der kleinste alle a_i enthaltende Normalteiler von G . Die Erzeugenden von H sind $a_i, b^{-1}a_i b, b^{-2}a_i b^2$ für $i = 1, \dots, n$. Also ist H endlich erzeugt und nilpotent nach §4, Satz 6. Dann ist aber G nilpotent nach Gruenberg [4, Proposition 1, S. 154].

Eine erste spezielle obere Schranke der Nilpotenzklasse gibt uns

LEMMA 14. *Ist $G = \{x, y, z\}$ und gilt*

$$g^{(3)} \circ y = g^{(3)} \circ y^{-1} = g^{(3)} \circ z = g^{(3)} \circ z^{-1} = 1 \quad \text{für alle } g \text{ aus } G,$$

existieren weiter in G keine Elemente der Ordnungen 2 und 5, so ist G nilpotent der Klasse 4.

Beweis. Nach Lemma 13 ist G nilpotent; nach Lemma 11 genügt es anzunehmen, daß G nilpotent der Klasse 5 ist. Wir führen nun eine längere Rechnung durch, bei der wir die Identität

$$y^{-1}((x \circ y^{-1}) \circ z)yz^{-1}((y \circ z^{-1}) \circ x)zx^{-1}((z \circ x^{-1}) \circ y)x = 1$$

benutzen; sie stammt von Ph. Hall (vgl. etwa [10, S. 150]). Durch Inversion erhalten wir

$$(1) \quad x^{-1}(y \circ (z \circ x^{-1}))xz^{-1}(x \circ (y \circ z^{-1}))zy^{-1}(z \circ (x \circ y^{-1}))x = 1.$$

Wie schon oben erwähnt, setzen wir voraus:

$$(2) \quad G_6 = 1.$$

Da $g^{(3)} \circ y = 1$ ist für alle g aus G , so gilt dies auch für $h^{-1}yh = y(y \circ h)$, und wir erhalten

$$1 = g^{(3)} \circ (h^{-1}yh) = (g^{(3)} \circ y)(g^{(3)} \circ (h \circ y))^{-1}.$$

Daher gilt

$$(3) \quad g^{(3)} \circ (h \circ y) = 1,$$

und entsprechend ergibt sich

$$(4) \quad g^{(3)} \circ (h \circ z) = 1.$$

Außerdem erhalten wir

$$\begin{aligned}
 1 &= (g \circ ((gh)^{(3)} \circ y))(g \circ ((gh^{-1})^{(3)} \circ y)) \\
 &= (g \circ (h^{(3)} \circ y))^2 (g^{(3)} \circ (h \circ y))^2 (g^{(2)} \circ (h \circ (g \circ y)))^2 \\
 &\qquad \qquad \qquad \cdot (g \circ (h \circ (g^{(2)} \circ y)))^2, \\
 1 &= (g^{(2)} \circ (h \circ (g \circ y)))^2 (g \circ (h \circ (g^{(2)} \circ y)))^2,
 \end{aligned}$$

und da nach Voraussetzung keine Elemente der Ordnung 2 existieren, gilt

$$(5) \qquad (g^{(2)} \circ (h \circ (g \circ y)))(g \circ (h \circ (g^{(2)} \circ y))) = 1,$$

wobei man wieder y durch z ersetzen kann.

Nach §4, Satz 6 gilt $y^{(3)} \circ g = 1$ für alle g aus G , wir können daher §1, Satz 1 anwenden und erhalten, daß $\{y, g\}$ nilpotent der Klasse 3 ist, also auch $\{y, xz\}$; daher gilt insbesondere

$$\begin{aligned}
 1 &= y \circ (y \circ ((xz) \circ (y \circ (xz)))) \\
 &= (y^{(2)} \circ (x \circ (y \circ x)))(y^{(2)} \circ (x \circ (y \circ z)))(y^{(2)} \circ (z \circ (y \circ x))) \\
 &\qquad \qquad \qquad \cdot (y^{(2)} \circ (z \circ (y \circ z))) \\
 &= (y^{(2)} \circ (x \circ (y \circ z)))(y^{(2)} \circ (z \circ (y \circ x))), \\
 (6) \qquad (y^{(2)} \circ (x \circ (y \circ z)))(y^{(2)} \circ (z \circ (y \circ x))) &= 1.
 \end{aligned}$$

Nun wenden wir (1) an und erhalten

$$\begin{aligned}
 1 &= (y^{(2)} \circ (x \circ (y \circ z)))(y^{(2)} \circ (y \circ (z \circ x)))(y^{(2)} \circ (z \circ (x \circ y))) \\
 &= (y^{(2)} \circ (x \circ (y \circ z)))(y^{(3)} \circ (x \circ z))^{-1} (y^{(2)} \circ (z \circ (y \circ x)))^{-1} \\
 &= (y^{(2)} \circ (x \circ (y \circ z)))(y^{(2)} \circ (z \circ (y \circ x)))^{-1}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt aber mit (6) und (5):

$$(7) \qquad y^{(2)} \circ (x \circ (y \circ z)) = y \circ (x \circ (y^{(2)} \circ z)) = 1,$$

da keine Elemente der Ordnung 2 existieren.

Wir betrachten nun $G/Z(G)$. Natürlich ist $G/Z(G)$ nilpotent der Klasse 4, und man sieht sofort, daß die Elemente a , die die Bedingung $u^{(3)} \circ a = 1$ für alle u aus $G/Z(G)$ erfüllen, eine Untergruppe bilden. Daher ist $G/Z(G)$ eine E_3 -Gruppe nach Lemma 13, und nach §1, Lemma 4 liegt $x \circ ((yz) \circ (x \circ (yz)))$ in $Z(G)$ und wir erhalten so

$$\begin{aligned}
 1 &= x \circ (x \circ ((yz) \circ (x \circ (yz)))) \\
 &= (x^{(2)} \circ (y \circ (x \circ y)))(x^{(2)} \circ (z \circ (x \circ y)))(x^{(2)} \circ (y \circ (x \circ z))) \\
 &\qquad \qquad \qquad \cdot (x^{(2)} \circ (z \circ (x \circ z))) \\
 &= (x^{(2)} \circ (z \circ (x \circ y)))(x^{(2)} \circ (y \circ (x \circ z))).
 \end{aligned}$$

Mit (1) und (4) erhält man

$$\begin{aligned} 1 &= (x^{(2)} \circ (x \circ (y \circ z)))(x^{(2)} \circ (y \circ (z \circ x)))(x^{(2)} \circ (z \circ (x \circ y))) \\ &= (x^{(2)} \circ (y \circ (x \circ z)))^{-1}(x^{(2)} \circ (z \circ (x \circ y))). \end{aligned}$$

Diese beiden Resultate ergeben mit (5)

$$(8) \quad x^{(2)} \circ (y \circ (x \circ z)) = x \circ (y \circ (x^{(2)} \circ z)) = 1.$$

Da $\{x, y, z\} \supseteq \{g, y, z\}$ gilt für alle g aus G , kann man in (8) x durch g ersetzen. Damit haben wir auch in G die Eigenschaft gefunden, daß die Menge der Elemente a mit $g^{(3)} \circ a = 1$ für alle g aus G eine Gruppe bildet. Es ist nämlich

$$g^{(3)} \circ (yz) = (g^{(3)} \circ y)(g^{(3)} \circ z)(g^{(2)} \circ (y \circ (g \circ z)))^{-1} = 1.$$

Damit ist G eine E_3 -Gruppe nach Lemma 12, und die Erzeugenden unterscheiden sich nicht mehr wesentlich. Durch Anwendung von (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= (x \circ (y \circ (x \circ (y \circ z))))(x \circ (y \circ (y \circ (z \circ x))))(x \circ (y \circ (z \circ (x \circ y)))) \\ &= (x \circ (y \circ (x \circ (y \circ z))))(x \circ (y^{(2)} \circ (z \circ x)))(x \circ (y \circ (z \circ (y \circ x))))^{-1} \\ &= (x \circ (y \circ (x \circ (y \circ z))))^2(x \circ (y^{(2)} \circ (x \circ z)))^{-1}, \\ (9) \quad &(x \circ (y \circ (x \circ (y \circ z))))^2 = x \circ (y^{(2)} \circ (x \circ z)). \end{aligned}$$

Da weiter $(x^{-1}yx) \circ (z^{(2)} \circ (x^{-1}yx)) = 1$ und $x^{-1}yx = y(y \circ x)$ gilt (durch §1, Lemma 4), erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= (y \circ (z^{(2)} \circ y))((y \circ x) \circ (z^{(2)} \circ y))(y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x))) \\ &\quad \cdot ((y \circ x) \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x))) \\ &= ((y \circ x) \circ (z^{(2)} \circ y))(y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x))) \\ &= (x \circ (y \circ (z^{(2)} \circ y)))^{-1}(y \circ (x \circ (z^{(2)} \circ y)))(y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x))) \\ &= (y^{(2)} \circ (z^{(2)} \circ x))^{-1}(y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x))) \end{aligned}$$

wegen $y \circ (z^{(2)} \circ y) = (xy) \circ (z^{(2)} \circ (xy)) = 1$ (§1, Lemma 4), daher gilt

$$(10) \quad y^{(2)} \circ (z^{(2)} \circ x) = y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x)).$$

Da G eine E_3 -Gruppe ist, gilt

$$\begin{aligned} 1 &= (y \circ ((yz)^{(3)} \circ x))(y \circ ((yz^{-1})^{(3)} \circ x)) \\ &= (y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x)))^2(y \circ (z \circ (y \circ (z \circ x))))^2(y^{(2)} \circ (z^{(2)} \circ x))^2 \\ &= (y \circ (z \circ (y \circ (z \circ x))))^4(y \circ (z \circ (y \circ (z \circ x))))^2(y^{(2)} \circ (z^{(2)} \circ x))^2 \\ &= (y \circ (z \circ (y \circ (z \circ x))))^6(y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x)))^2 \\ &= (y \circ (z \circ (y \circ (z \circ x))))^{10}, \end{aligned}$$

wenn man zunächst (9) und dann (9) und (10) anwendet; da aber in G keine Elemente der Ordnung 2 oder 5 existieren, erhält man sofort

$$(11) \quad y \circ (z \circ (y \circ (z \circ x))) = 1$$

und daher nach (9) und (10)

$$(12) \quad y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x)) = y^{(2)} \circ (z^{(2)} \circ x) = 1.$$

Man beachte, daß nur für den Nachweis von (12) und (11) die Eigenschaft von G gebraucht wurde, daß G keine Elemente der Ordnung 5 enthält, (3)–(10) gelten schon, wenn keine Elemente der Ordnung 2 in G vorhanden sind.

Nun läßt sich aber jeder Kommutator der Länge 5 in G als Produkt der in (3), (4), (7), (11) und (12) behandelten Kommutatoren und derjenigen Kommutatoren schreiben, die man erhält, wenn man in den behandelten Kommutatoren die Erzeugenden vertauscht. Daher haben alle Kommutatoren der Länge 5 in G den Wert 1 und G ist nilpotent von der Klasse 4 höchstens, wie behauptet.

Werden die Elemente der Ordnung 5 nicht ausgeschlossen, so können wir etwas Analoges aussagen. Dies geschieht in

LEMMA 15. *Ist $G = \{x, y, z\}$ eine Gruppe ohne Elemente der Ordnung 2 und gilt $g^{(3)} \circ y = g^{(3)} \circ y^{-1} = g^{(3)} \circ z = g^{(3)} \circ z^{-1} = 1$ für alle g aus G , so ist G nilpotent der Klasse 5.*

Beweis. Nach Lemma 13 ist G nilpotent, nach Lemma 11 genügt es anzunehmen, daß G nilpotent der Klasse 6 ist. Wir müssen also nur die Kommutatoren der Länge 6 betrachten, wobei wir gleichzeitig annehmen, daß die Kommutatoren der Länge 7 den Wert 1 haben.

Zunächst stellen wir mithilfe von Lemma 14 fest, daß folgende Kongruenzen gelten:

$$(13) \quad g^{(3)} \circ (h \circ z) \equiv g^{(3)} \circ (h \circ y) \equiv 1 \pmod{Z(G)},$$

$$(14) \quad x^{(2)} \circ (y \circ (x \circ z)) \equiv x \circ (y \circ (x^{(2)} \circ z)) \equiv 1 \pmod{Z(G)},$$

$$(15) \quad (x \circ (y \circ (x \circ (y \circ z))))^2 \equiv x \circ (y^{(2)} \circ (x \circ z)) \pmod{Z(G)},$$

$$(16) \quad y^{(2)} \circ (x^{(2)} \circ z) \equiv y \circ (x^{(2)} \circ (y \circ z)) \pmod{Z(G)},$$

wobei x, y und z untereinander vertauscht werden dürfen, denn $G/Z(G)$ ist nilpotent der Klasse 5 und eine E_3 -Gruppe, wie sich aus Lemma 14 ergibt.

Aus (13) und (14) ergibt sich, daß Kommutatoren der Länge 6, in denen ein erzeugendes Element viermal vorkommt, verschwinden. Nun erhalten wir aus §4, Satz 6, daß $y^{(3)} \circ g = z^{(3)} \circ g = 1$ für alle g aus G gilt, darum haben wir

$$(17) \quad \begin{aligned} y^{(3)} \circ (z^{(2)} \circ x) &= y^{(3)} \circ (x^{(2)} \circ z) \\ &= z^{(3)} \circ (y^{(2)} \circ x) = z^{(3)} \circ (x^{(2)} \circ y) = 1. \end{aligned}$$

Das Gleiche erhält man für x , wenn man die folgende Rechnung ausführt:

$$\begin{aligned} 1 &= x^{(3)} \circ ((y \circ z)^{-1} y (y \circ z)) = x^{(3)} \circ (y(y \circ (y \circ z))) \\ &= (x^{(3)} \circ y)(x^{(3)} \circ (y^{(2)} \circ z)) \\ &= x^{(3)} \circ (y^{(2)} \circ z). \end{aligned}$$

Vertauscht man noch y mit z , so erhält man

$$(18) \quad x^{(3)} \circ (y^{(2)} \circ z) = x^{(3)} \circ (z^{(2)} \circ y) = 1.$$

Bedenkt man, daß $G/Z(G)$ eine E_3 -Gruppe ist, so erhält man

$$\begin{aligned} 1 &= (h \circ ((gh)^{(3)} \circ (h \circ k)))(h \circ ((g^{-1}h)^{(3)} \circ (h \circ k))) \\ &= (h \circ (g^{(2)} \circ (h^{(2)} \circ k)))^2 (h^{(2)} \circ (g^{(2)} \circ (h \circ k)))^2 \\ &\quad \cdot (h \circ (g \circ (h \circ (g \circ (h \circ k))))^2. \end{aligned}$$

Hierdurch erhält man zusammen mit (18), (17), (16) und (15), daß alle Kommutatoren, die x , y oder z dreimal enthalten, gleich dem Einselement werden. Damit bleibt uns die Untersuchung von den Kommutatoren, in denen alle drei Erzeugenden je zweimal vorkommen. Nun gilt nach §4, Satz 6 $y^{(3)} \circ g = 1$ für alle g aus G , und §1, Lemma 4 ergibt $y \circ (g \circ (y \circ g)) = 1$. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} 1 &= y \circ ((x \circ z) \circ (y \circ (x \circ z))) \\ &= (y \circ (x \circ (z \circ (y \circ (x \circ z)))))(y \circ (z \circ (x \circ (y \circ (x \circ z))))^{-1} \\ &= (y \circ (x \circ (z \circ (x \circ (z \circ y))))(y \circ (z \circ (x \circ (z \circ (x \circ y)))) \\ &= (y \circ (x \circ (z \circ (x \circ (z \circ y))))^2, \end{aligned}$$

wie man aus $z \circ ((xy)^{(2)} \circ z) \equiv x \circ ((yz) \circ (x \circ (yz))) \equiv 1 \pmod{Z(G)}$ schließt und außerdem die Formeln

$$g \circ (h \circ (g^{(2)} \circ y)) \equiv 1 \pmod{Z(G)} \quad \text{und} \quad g^{(3)} \circ (h \circ y) \equiv 1 \pmod{Z(G)}$$

wie folgt ausnutzt:

$$\begin{aligned} 1 &= (y \circ ((zx) \circ (z \circ ((zx)^{(2)} \circ y))))(y \circ ((zx^{-1}) \circ (z \circ ((zx^{-1})^{(2)} \circ y)))) \\ &= (y \circ (x \circ (z \circ (x \circ (z \circ y))))^2 (y \circ (x \circ (z^{(2)} \circ (x \circ y))))^2 \\ &\quad \cdot (y \circ (z^{(2)} \circ (x^{(2)} \circ y)))^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= (y \circ ((xz)^{(3)} \circ (x \circ y)))(y \circ ((xz^{-1})^{(3)} \circ (x \circ y))) \\ &= (y \circ (z \circ (x \circ (z \circ (x \circ y))))^2 (y \circ (x \circ (z^{(2)} \circ (x \circ y))))^2 \\ &\quad \cdot (y \circ (z^{(2)} \circ (x^{(2)} \circ y)))^2. \end{aligned}$$

So erhält man

$$y \circ (z \circ (x \circ (z \circ (x \circ y)))) = y \circ (x \circ (z \circ (x \circ (z \circ y))))$$

für Gruppen ohne Elemente der Ordnung 2. Wir haben damit

$$(19) \quad y \circ (x \circ (z \circ (x \circ (z \circ y)))) = 1$$

erhalten. Verfährt man nun genauso wie bei (17) und (18), so ergibt sich, daß alle Kommutatoren der Länge 6, die mit y "beginnen" und "enden", den Wert 1 haben. Das Gleiche gilt für mit z "beginnende" und "endende" Kommutatoren, weil man y mit z vertauschen kann. Wir betrachten schließlich $(y \circ x) \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x)) = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned} 1 &= (y \circ x) \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x)) \\ &= (y \circ (x \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x))))(x \circ (y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x))))^{-1} \\ &= (y \circ (x \circ (z^{(2)} \circ (x \circ y))))^{-1}(x \circ (y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x))))^{-1} \\ &= (x \circ (y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x))))^{-1}, \end{aligned}$$

also gilt

$$(20) \quad x \circ (y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x))) = 1.$$

Mit (19) und (20) erhalten wir, daß alle Kommutatoren der zuletzt behandelten Art den Wert 1 haben müssen, denn sie lassen sich entweder auf die in (19) und (20) behandelte Form bringen oder sie sind von der Form $f^{(2)} \circ (a \circ (b \circ (c \circ d)))$, wobei unter $a, b, c,$ und d nur zwei Erzeugende vorkommen und f die dritte Erzeugende ist. Die Kommutatoren dieser Form sind aber wegen $a \circ (b \circ (c \circ d)) = 1$ (§4, Satz 6 in Verbindung mit §1, Satz 1) selbst gleich dem Einselement. Somit sind alle Kommutatoren der Länge 6 nicht von 1 verschieden und wir erhalten, daß G nilpotent der Klasse 5 ist, und das war zu zeigen.

Wir können nun Hauptsatz 3 beweisen.

Beweis von Hauptsatz 3. Es genügt zu zeigen, daß

$$g^{(3)} \circ (xy) = g^{(3)} \circ (xy)^{-1} = 1$$

für alle g aus G gilt, wenn das Gleiche gilt für y und x . Dazu betrachten wir die Untergruppe $U = \{g, x, y\}$. Die Bedingung (I) besagt, daß U keine Elemente der Ordnung 2 enthält und also nach Lemma 15 nilpotent der Klasse 5 ist. Die Gleichungen (3) und (4) in Lemma 14 können hier angewandt werden, weil zu ihrem Beweis die Nichtexistenz von Elementen der Ordnung 2 in U and $U_6 = 1$ genügt; dann ist aber U eine E_3 -Gruppe und wir sind fertig.

Gilt die Bedingung (II) und ist g von endlicher ungerader oder von unendlicher Ordnung, so ist U wiederum frei von Elementen der Ordnung 2 und daher wie oben eine E_3 -Gruppe. Ist g von (endlicher) gerader Ordnung, so enthält jedenfalls der kleinste x und y enthaltende Normalteiler von U keine Elemente der Ordnung 2 und ist daher nilpotent. Dann ist aber nach Gruenberg [4, S. 154] auch U nilpotent. Seien nun g_1 und g_2 Potenzen von g ,

und zwar so, daß g_1 die Ordnung 2^d und g_2 eine ungerade Ordnung hat und daß $g_1 g_2 = g$ gilt. Wegen der Nilpotenz von U gilt, daß U das direkte Produkt von g_1 und $\{g_2, x, y\}$ ist. Da $\{g_2, x, y\}$ keine Elemente der Ordnung 2 enthält, ist diese Gruppe nilpotent der Klasse 5 und eine E_3 -Gruppe. Da g_1 mit x und y vertauschbar ist, erhält man

$$\begin{aligned} g^{(3)} \circ (xy) &= g_2^{(3)} \circ (xy) = 1, \\ g^{(3)} \circ (xy)^{-1} &= g_2^{(3)} \circ (xy)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Hauptsatz 3 abgeschlossen.

Zum Beweis von Hauptsatz 1 beweisen wir zuerst zwei Lemmata:

LEMMA 16. *Wird die E_3 -Gruppe G von vier Elementen erzeugt und sind in G keine Elemente der Ordnungen 2 und 5 enthalten, so ist G nilpotent der Klasse 4.*

Beweis. Daß G nilpotent ist, ergibt sich aus Hauptsatz 2. Nach Lemma 11 genügt es, $G_6 = 1$ anzunehmen. Nach Lemma 15 verschwinden alle Kommutatoren der Länge 5, in denen nur drei der vier Erzeugenden vorkommen. Seien a, b, c, d vier beliebige Elemente aus G . Wir errechnen

$$(ab) \circ c = (a \circ c)(b \circ (a \circ c))^{-1}(b \circ c).$$

Daher erhält man

$$\begin{aligned} 1 &= (a \circ ((bcd)^{(2)} \circ a))^{-1}(a \circ ((b^{-1}c^{-1}d^{-1})^{(2)} \circ a)) \\ &= (a \circ (b \circ (d \circ (c \circ a))))^2(a \circ (c \circ (d \circ (b \circ a))))^2 \\ &\quad \cdot (a \circ (d \circ (c \circ (b \circ a))))^2(a \circ (d \circ (c \circ (b \circ a))))^2 \\ &\quad \cdot (a \circ (d \circ (b \circ (c \circ a))))^2(a \circ (c \circ (b \circ (d \circ a))))^2. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 14 ist aber

$$(a \circ ((bc) \circ (d \circ ((bc) \circ a)))) = (a \circ ((dc) \circ (b \circ ((dc) \circ a)))) = 1.$$

So kommen wir zu $1 = (a \circ (d \circ (c \circ (b \circ a))))^4$, und daher

$$(21) \quad a \circ (d \circ (c \circ (b \circ a))) = 1.$$

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= ((bcd) \circ (a \circ ((bcd) \circ a)))^{-1}((b^{-1}c^{-1}d^{-1}) \circ (a \circ ((b^{-1}c^{-1}d^{-1}) \circ a))) \\ &= (b \circ (a \circ (d \circ (c \circ a))))^2(c \circ (a \circ (d \circ (b \circ a))))^2 \\ &\quad \cdot (d \circ (a \circ (c \circ (b \circ a))))^2(d \circ (c \circ (a \circ (b \circ a))))^2 \\ &\quad \cdot (d \circ (b \circ (a \circ (c \circ a))))^2(c \circ (b \circ (a \circ (d \circ a))))^2. \end{aligned}$$

Man bekommt dann wegen

$$((bc) \circ (a \circ (d \circ ((bc) \circ a)))) = ((cd) \circ (b \circ (a \circ ((bc) \circ a)))) = 1$$

die Identität

$$1 = (d \circ (a \circ (c \circ (b \circ a))))^2 (d \circ (c \circ (a \circ (b \circ a))))^2,$$

und diese ergibt durch

$$\begin{aligned} 1 &= (d \circ ((ac)^{(3)} \circ b))(d \circ ((a^{-1}c)^{(3)} \circ b)) \\ &= (d \circ (a \circ (a \circ (c \circ b))))^2 (d \circ (c \circ (a \circ (a \circ b))))^2 \\ &\quad \cdot (d \circ (a \circ (c \circ (a \circ b))))^2, \end{aligned}$$

$$(22) \quad d \circ (a \circ (a \circ (b \circ c))) = 1.$$

Nun gilt weiter

$$\begin{aligned} 1 &= (d(b \circ c)) \circ (a^{(2)} \circ (d(b \circ c))) \\ &= (d \circ (a^{(2)} \circ d))(d \circ (a^{(2)} \circ (b \circ c)))(b \circ c \circ (a^{(2)} \circ d)) \\ &= ((b \circ c) \circ (a^{(2)} \circ d)) \\ &= (b \circ (c \circ (a^{(2)} \circ d)))(c \circ (b \circ (a^{(2)} \circ d)))^{-1} \\ &= (b \circ (c \circ (a^{(2)} \circ d)))^2. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$(23) \quad b \circ (c \circ (a \circ (a \circ d))) = 1.$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= a \circ ((d(b \circ c))^{(2)} \circ a) \\ &= (a \circ (d \circ ((b \circ c) \circ a)))(a \circ ((b \circ c) \circ (d \circ a)))(a \circ (d \circ (d \circ a))) \\ &= (a \circ (d \circ (a \circ (b \circ c))))^{-1} (a \circ (b \circ (c \circ (d \circ a)))) \\ &\quad \cdot (a \circ (c \circ (b \circ (d \circ a))))^{-1} \\ &= (a \circ (d \circ (a \circ (b \circ c))))^{-1}, \end{aligned}$$

$$(24) \quad a \circ (d \circ (a \circ (b \circ c))) = 1.$$

Wenden wir nun (22) an auf die Elemente a , ad , b und c , so erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= a \circ ((ad)^{(2)} \circ (b \circ c)) \\ &= (a \circ (d^{(2)} \circ (b \circ c)))(a \circ (d \circ (a \circ (b \circ c))))(a^{(2)} \circ (d \circ (b \circ c))) \\ &\quad \cdot (a^{(3)} \circ (b \circ c)) \\ &= a^{(2)} \circ (d \circ (b \circ c)), \end{aligned}$$

$$(25) \quad a \circ (a \circ (d \circ (b \circ c))) = 1.$$

Wegen (22) und (23) gilt schließlich

$$\begin{aligned} 1 &= b \circ ((ac)^{(2)} \circ (c \circ d)) \\ &= (b \circ (c^{(3)} \circ d))(b \circ (a \circ (c^{(2)} \circ d)))(b \circ (c \circ (a \circ (c \circ d)))) \\ &\qquad \qquad \qquad \cdot (b \circ (a^{(2)} \circ (c \circ d))) \\ &= b \circ (c \circ (a \circ (c \circ d))). \end{aligned}$$

Daher gilt auch

$$(26) \qquad d \circ (a \circ (c \circ (a \circ b))) = 1.$$

Alle Kommutatoren der Länge 5 in G lassen sich aber als Produkt von Kommutatoren der Formen (21)–(26) schreiben, daher ist G höchstens von Klasse 4.

LEMMA 17. *Wird die E_3 -Gruppe G von 5 Elementen erzeugt und existieren in G keine Elemente der Ordnungen 2 und 5, so ist G nilpotent der Klasse 4.*

Beweis. Es genügt wieder anzunehmen, daß G nilpotent der Klasse 5 ist. Nach Lemma 16 gilt, daß alle Kommutatoren der Länge 5 verschwinden, in denen zweimal das gleiche Element vorkommt. Daher ist

$$\begin{aligned} a \circ ((bc)^{(2)} \circ (d \circ f)) &= (a \circ ((df) \circ (b \circ c))) = 1 \quad \text{und} \\ a \circ ((bd) \circ (c \circ ((bd) \circ f))) &= a \circ (d \circ ((cf) \circ (b \circ (cf)))) = 1, \end{aligned}$$

wobei a, b, c, d und f beliebig aus G sind. Das wird in der folgenden Rechnung der Reihe nach benutzt:

$$\begin{aligned} 1 &= (a \circ ((b \circ c) \circ (d \circ f)))(a \circ ((d \circ f) \circ (b \circ c))) \\ &= (a \circ (b \circ (c \circ (d \circ f))))(a \circ (c \circ (b \circ (d \circ f))))^{-1} \\ &\qquad \qquad \qquad \cdot (a \circ (d \circ (f \circ (b \circ c))))(a \circ (f \circ (d \circ (b \circ c))))^{-1} \\ &= (a \circ (b \circ (c \circ (d \circ f))))^2 (a \circ (d \circ (f \circ (b \circ c))))^2 \\ &= (a \circ (d \circ (c \circ (b \circ f))))^{-2} (a \circ (d \circ (f \circ (b \circ c))))^2 \\ &= (a \circ (d \circ (f \circ (b \circ c))))^4. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$a \circ (d \circ (f \circ (b \circ c))) = 1,$$

und das war zu zeigen.

Dies ermöglicht uns den

Beweis von Hauptsatz 1. Nach Lemma 17 sind alle von fünf Elementen erzeugten Untergruppen von E_3 -Gruppen ohne Elemente der Ordnung 2 und 5 nilpotent der Klasse 4. Da die dazugehörige Relation nur 5 verschiedene Elemente benötigt, ist damit auch G nilpotent der Klasse 4, und das war zu zeigen.

LITERATURVERZEICHNIS

1. R. BAER, *Nilpotent groups and their generalizations*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 47 (1940), pp. 393–434.
2. —, *Nilgruppen*, Math. Zeitschrift, Bd. 62 (1955), S. 402–437.
3. —, *Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen*, Math. Ann., Bd. 133 (1957), S. 256–270.
4. K. W. GRUENBERG, *The Engel elements of a soluble group*, Illinois J. Math., vol. 3 (1959), pp. 151–168.
5. H. HEINEKEN, *Eine Bemerkung über engelsche Elemente*, Arch. Math., Bd. 11 (1960), S. 321.
6. W. KAPPE, *Die A-Norm einer Gruppe*, Illinois J. Math., vol. 5 (1961), pp. 187–197.
7. F. W. LEVI, *Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions*, J. Indian Math. Soc. (N.S.), vol. 6 (1942), S. 87–97.
8. F. W. LEVI UND B. L. VAN DER WAERDEN, *Über eine besondere Klasse von Gruppen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Bd. 9 (1933), S. 154–158.
9. C. R. B. WRIGHT, *On groups of exponent four with generators of order two*, Pacific J. Math., vol. 10 (1960), pp. 1097–1105.
10. M. HALL, *The theory of groups*, New York, Macmillan, 1959.

UNIVERSITÄT FRANKFURT

FRANKFURT AM MAIN, DEUTSCHLAND