

# Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité

par

JEAN-PIERRE DEMAILLY

*Université de Grenoble I  
Saint Martin d'Hères, France*

## 0. Introduction

Soit  $X$  un espace complexe de Stein,  $T$  un courant positif fermé de bidimension  $(p, p)$  sur  $X$ , et  $\varphi: X \rightarrow [-\infty, +\infty[$  une fonction psh (plurisousharmonique) exhaustive. Nous définissons alors des nombres de Lelong  $\nu(T, \varphi)$  qui généralisent ceux classiques de P. Lelong [Le3] ainsi que ceux introduits récemment par C. O. Kiselman [Ki3]. La définition repose sur l'utilisation des opérateurs de Monge-Ampère de Bedford-Taylor [B-T] et peut s'interpréter en disant que  $\nu(T, \varphi)$  est la masse de la mesure  $T \wedge (dd^c \varphi)^p$  portée par l'ensemble polaire  $\varphi^{-1}(-\infty)$ . Dans ce cadre, nous démontrons que  $\nu(T, \varphi)$  ne dépend que du comportement asymptotique de  $\varphi$  au voisinage des pôles; la méthode utilisée est inspirée de notre article antérieur [De1], mais elle se trouve ici considérablement simplifiée par le fait que l'on peut manipuler des poids  $\varphi$  qui sont seulement continus. La souplesse d'utilisation des nombres de Lelong généralisés permet d'obtenir aussi des démonstrations très simples de résultats classiques concernant les nombres de Lelong usuels; en particulier, ces nombres sont invariants par changement de coordonnées locales (cf. [Siu]). Nous redémontrons ensuite le théorème de P. Thie [Th], suivant lequel le nombre de Lelong d'un ensemble analytique  $X$  en un point  $x \in X$  coïncide avec la multiplicité algébrique de  $X$  en  $x$ ; ce résultat est une conséquence directe du fait que l'on peut représenter le germe  $(X, x)$  comme un revêtement ramifié au dessus de  $\mathbb{C}^p$ , contenu dans un cône convexe de sommet  $x$ . On obtient enfin une version généralisée du théorème de Siu sur l'analyticité des ensembles de niveau associés aux nombres de Lelong; cette version contient comme cas particulier le résultat récent de C. O. Kiselman [Ki3] relatif aux nombres de Lelong directionnels. La démonstration est inspirée de Kiselman [Ki2] et repose essentiellement sur trois ingrédients :

- construction d'un potentiel psh local associé au courant  $T$  et au poids  $\varphi$ ;
- principe du minimum de Kiselman [Ki1];
- estimations  $L^2$  de Hörmander [Hö] et Bombieri [Bo] pour l'opérateur  $\bar{\partial}$ .

Je tiens à remercier ici C. O. Kiselman pour de stimulantes conversations qui ont beaucoup contribué à dégager les idées de ce travail.

### 1. Nombres de Lelong généralisés

Soit  $X$  un espace de Stein de dimension pure  $n$  et  $T$  un courant positif fermé sur  $X$  de bidimension  $(p, p)$ , i.e. de bidegré  $(n-p, n-p)$ . En ce qui concerne les formes et les courants sur un espace analytique, nous utiliserons ici la définition donnée dans [De2]; la plupart des calculs différentiels et intégraux se pratiquent alors comme sur une variété lisse.

Si  $\varphi_1, \dots, \varphi_q$  sont des fonctions psh finies et continues, la méthode de Bedford-Taylor [B-T] permet de définir par récurrence un courant positif fermé  $T \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_q$  en posant

$$T \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_q = dd^c(\varphi_q T \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_{q-1}). \quad (1.1)$$

Pour tous compacts  $K \subset\subset \bar{K} \subset\subset X$ , la masse de (1.1) sur  $K$ , notée  $\| \cdot \|_K$ , vérifie alors les inégalités classiques de Chern–Levine–Nirenberg (cf. [C-L-N], [B-T], [De2]) :

$$\|T \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_q\|_K \leq C_{K, \bar{K}} \|T\|_{\bar{K}} \|\varphi_1\|_{L^\infty(\bar{K})} \dots \|\varphi_q\|_{L^\infty(\bar{K})}; \quad (1.2)$$

on en déduit aisément que le courant  $T \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_q$  est faiblement continu en  $(\varphi_1, \dots, \varphi_q)$  lorsque les  $\varphi_j$  convergent uniformément sur tout compact.

Soit maintenant  $\varphi: X \rightarrow [-\infty, +\infty[$  une fonction psh continue. On suppose que  $\varphi$  est *semi-exhaustive*, c'est-à-dire par définition qu'il existe  $R > 0$  tel que  $\{x \in X; \varphi(x) < R\} \subset\subset X$ . Pour tout réel  $r < R$  on pose

$$\nu(T, \varphi, r) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\varphi < r} T \wedge (dd^c \max(\varphi, s))^p \quad (1.3)$$

où  $s$  est un réel quelconque  $< r$ ; l'hypothèse  $dT=0$  et la formule de Stokes montrent que la quantité  $\nu(T, \varphi, r)$  est bien indépendante de  $s$ . Pour tous réels  $r_1 < r_2 < R$  on obtient par différence l'identité

$$\nu(T, \varphi, r_2) - \nu(T, \varphi, r_1) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{r_1 \leq \varphi < r_2} T \wedge (dd^c \varphi)^p$$

en choisissant  $s < r_1$ . En particulier, la fonction

$$r \mapsto \nu(T, \varphi, r) \tag{1.4}$$

est croissante sur l'intervalle  $]-\infty, R[$ .

*Définition 1.5.* On appelle nombre de Lelong généralisé de  $T$  relativement au poids  $\varphi$  la limite

$$\nu(T, \varphi) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \nu(T, \varphi, r).$$

Les nombres de Lelong généralisés précédents avaient déjà été introduits dans [De1] par une formule légèrement différente que nous rappelons ci-dessous :

$$\nu(T, \varphi, t) = (2\pi e^t)^{-p} \int_{\varphi < t} T \wedge (dd^c e^\varphi)^p, \quad \forall t < R. \tag{1.6}$$

Posons  $\varphi_s = \max(\varphi, s)$  avec  $s < t$ . La formule de Stokes ramène (1.6) à

$$e^{pt} \int_{\varphi < t} T \wedge (dd^c \varphi_s)^p = \int_{\varphi < t} T \wedge (dd^c e^{\varphi_s})^p.$$

Pour vérifier cette dernière égalité, on observe que

$$\begin{aligned} e^{pt}(dd^c \varphi_s)^p - (dd^c e^{\varphi_s})^p &= d[e^{pt}(dd^c \varphi_s)^{p-1} \wedge d^c \varphi_s - (dd^c e^{\varphi_s})^{p-1} \wedge d^c(e^{\varphi_s})] \\ &= d[(e^{pt} - e^{p\varphi_s})(dd^c \varphi_s)^{p-1} \wedge d^c \varphi_s]. \end{aligned}$$

Soit  $\lambda: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction croissante de classe  $C^\infty$  telle que  $\lambda(t) = 0$  pour  $t \leq 1/2$  et  $\lambda(t) = 1$  pour  $t \geq 1$ . Après intégration par parties, on obtient

$$\int_{\varphi < t} T \wedge (e^{pt}(dd^c \varphi_s)^p - (dd^c e^{\varphi_s})^p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \lambda\left(\frac{t - \varphi_s}{\varepsilon}\right) T \wedge (e^{pt}(dd^c \varphi_s)^p - (dd^c e^{\varphi_s})^p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I(\varepsilon)$$

avec

$$I(\varepsilon) = \int T \wedge \frac{1}{\varepsilon} \lambda'\left(\frac{t - \varphi_s}{\varepsilon}\right) (e^{pt} - e^{p\varphi_s})(dd^c \varphi_s)^{p-1} \wedge d\varphi_s \wedge d^c \varphi_s.$$

Le support de la fonction  $\lambda'((t - \varphi_s)/\varepsilon)$  est contenu dans la couronne

$K(\varepsilon) = \{\varepsilon/2 \leq t - \varphi_s \leq \varepsilon\}$ ; comme  $\lambda'$  est bornée et que  $e^{p^l} - e^{p\varphi_s} = O(\varepsilon)$  sur  $K(\varepsilon)$ , on en déduit  $I(\varepsilon) \leq C \|T \wedge (dd^c \varphi_s)^{p-1} \wedge d\varphi_s \wedge d^c \varphi_s\|_{K(\varepsilon)}$ . Soient  $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R})$  des fonctions convexes croissantes uniformément bornées en  $\varepsilon$  telles que  $\chi_\varepsilon'' = 1/\varepsilon$  sur  $[t - \varepsilon, t - \varepsilon/2]$ . L'inégalité (1.2) appliquée avec  $\varphi_1 = \dots = \varphi_{p-1} = \varphi_s$ ,  $\varphi_p = \chi_\varepsilon \circ \varphi_s$  implique  $I(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ , d'où la formule (1.6).

*Exemple 1.7.* Supposons que l'espace  $X$  soit un ouvert de  $\mathbf{C}^n$  et choisissons  $\varphi(z) = \log|z-x|$ ,  $x \in X$ . Alors  $\frac{1}{2} dd^c(e^{2\varphi}) = \frac{1}{2} dd^c|z-x|^2$  est la métrique hermitienne standard de  $\mathbf{C}^n$ , de sorte que la formule (1.6) appliquée à  $2\varphi$  s'écrit

$$\nu(T, \varphi, \log t) = \frac{1}{2^p} \nu(T, 2\varphi, 2 \log t) = \frac{\sigma_T(\{z; |z-x| < t\})}{\pi^p t^{2p}/p!},$$

où  $d\sigma_T = (\frac{1}{2} dd^c|z-x|^2)^p \wedge T/p!$  est la mesure trace de  $T$ . Le nombre de Lelong généralisé  $\nu(T, \varphi)$  coïncide donc avec le nombre de Lelong classique  $\nu(T, x)$ .

*Exemple 1.8.* Soit  $V$  une fonction psh sur un voisinage d'un point  $x \in \mathbf{C}^n$ . Notons  $\theta_{x,R}$  la mesure de moyenne sur le polycercle

$$\Gamma(x, R) := \{z \in \mathbf{C}^n; |z_j - x_j| = e^{R_j}, 1 \leq j \leq n\}.$$

Si  $a = (a_1, \dots, a_n) \in ]0, +\infty[^n$ , C. O. Kiselman [Ki3] considère les nombres de Lelong "directionnels"  $\nu(V, x, a)$  définis par

$$\nu(V, x, a) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \frac{1}{r} \theta_{x,ra}(V).$$

En utilisant les résultats et les notations de [De2], on va montrer que ces nombres sont obtenus en fait pour le choix

$$\varphi(z) = \varphi_{x,a}(z) = \max_j \frac{1}{a_j} \log|z_j - x_j|.$$

Observons que  $\{\varphi < r\}$  est le polydisque admettant  $\Gamma(x, ra)$  pour frontière distinguée. On sait d'après [De2] que la mesure  $(dd^c \varphi)^n$  est bien définie, parce que l'ensemble  $\varphi^{-1}(-\infty)$  est relativement compact dans  $\mathbf{C}^n$ . La quasi-homogénéité de  $\varphi$  donne

$$(dd^c \varphi)^n = (2\pi)^n (a_1 \dots a_n)^{-1} \delta_x,$$

où  $\delta_x$  désigne la mesure de Dirac au point  $x$ . La mesure de Monge-Ampère

$$\mu_r := (dd^c \varphi)^{-1} \wedge d^c \varphi|_{\{\varphi=r\}}$$

est d'autre part portée par  $\Gamma(x, ra)$ , car sur le complémentaire  $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{r \geq -\infty} \Gamma(x, ra)$  la fonction  $\varphi$  ne dépend localement que de  $n-1$  variables complexes et donc  $(dd^c \varphi)^{n-1} = 0$  par raison d'homogénéité. Comme la masse de  $\mu_r$  est égale à celle de  $(dd^c \varphi)^n$  et comme  $\mu_r$  est invariante par le groupe  $U(1)^n$  il vient

$$\mu_r = (2\pi)^n (a_1 \dots a_n)^{-1} \theta_{x, ra}.$$

Grâce à la formule de Lelong-Jensen (cf. [De2], th.3.4), on voit que pour tous réels  $r < r_0$  assez petits on a

$$\int_r^{r_0} \nu(dd^c V, \varphi, t) dt = \frac{\mu_{r_0}(V) - \mu_r(V)}{(2\pi)^{n-1}} = \frac{2\pi}{a_1 \dots a_n} (\theta_{x, r_0 a}(V) - \theta_{x, ra}(V)).$$

On obtient donc l'égalité

$$\nu(V, x, a) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \frac{1}{r} \theta_{x, ra}(V) = a_1 \dots a_n \cdot \nu\left(\frac{1}{2\pi} dd^c V, \varphi_{x, a}\right). \quad (1.9)$$

Nous définirons en général le nombre de Lelong directionnel d'un courant  $T$  par

$$\nu(T, x, a) = a_1 \dots a_n \cdot \nu(T, \varphi_{x, a}); \quad (1.10)$$

ceci donne l'identité

$$\nu(V, x, a) = \nu\left(\frac{1}{2\pi} dd^c V, x, a\right).$$

## 2. Théorème de comparaison

Nous redémontrons ici le résultat de [Siu] sur l'invariance des nombres de Lelong par changement de coordonnées locales. Nous obtenons en fait un résultat beaucoup plus général, permettant de comparer les nombres de Lelong relatifs à des poids  $\varphi, \psi$  différents. Le lecteur pourra comparer avec [De1] pour voir combien la démonstration se trouve simplifiée par la possibilité d'utiliser des poids  $\varphi$  qui sont seulement continus.

**THÉORÈME 2.1.** *Soient  $\varphi, \psi: X \rightarrow [-\infty, +\infty[$  des fonctions psh continues semi-exhaustives. On suppose que*

$$l := \limsup_{\varphi(x) \rightarrow -\infty} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} < +\infty$$

Alors  $\nu(T, \psi) \leq l^p \nu(T, \varphi)$ , et l'égalité a lieu si  $l = \lim \psi/\varphi$ .

*Démonstration.* D'après la définition (1.3) on a

$$\nu(T, \lambda\varphi) = \lambda^p \nu(T, \varphi)$$

pour tout scalaire  $\lambda > 0$ . Il suffit donc de vérifier l'inégalité  $\nu(T, \psi) \leq \nu(T, \varphi)$  sous l'hypothèse  $\limsup \psi/\varphi < 1$ . Pour tout  $c > 0$ , on considère la fonction psh  $u_c = \max(\psi - c, \varphi)$ . Soit  $r < R_\varphi$  fixé et  $a < r$ . Pour  $c > 0$  assez grand, on a  $u_c = \varphi$  sur  $\varphi^{-1}([a, r])$ , donc

$$\nu(T, \varphi, r) = \nu(T, u_c, r) \geq \nu(T, u_c).$$

L'hypothèse  $\limsup \psi/\varphi < 1$  implique d'autre part qu'il existe  $t_0 < 0$  tel que  $u_c = \psi - c$  sur  $\{u_c < t_0\}$ . On en déduit aussitôt

$$\nu(T, u_c) = \nu(T, \psi - c) = \nu(T, \psi),$$

par conséquent  $\nu(T, \psi) \leq \nu(T, \varphi, r)$  et à la limite  $\nu(T, \psi) \leq \nu(T, \varphi)$ .  $\square$

Supposons en particulier que  $X$  soit une variété de Stein lisse et  $x$  un point de  $X$ . Soit  $z^k = (z_1^k, \dots, z_n^k)$ ,  $k=1, 2$ , des systèmes de coordonnées locales centrées au point  $x$  et

$$\varphi_k(z) = \log |z^k| = \log (|z_1^k|^2 + \dots + |z_n^k|^2)^{1/2}.$$

On a  $\lim_{z \rightarrow x} \varphi_2(z)/\varphi_1(z) = 1$ , donc  $\nu(T, \varphi_1) = \nu(T, \varphi_2)$  d'après le théorème 2.1.

**COROLLAIRE 2.2.** *Les nombres de Lelong classiques  $\nu(T, x)$  sont invariants par changement de coordonnées locales.*

De manière générale, si  $X$  est un espace analytique, on définira  $\nu(T, x)$  par

$$\nu(T, x) = \nu \left( T, \frac{1}{2} \log \sum_{1 \leq j \leq N} |g_j|^2 \right),$$

où  $(g_j)_{1 \leq j \leq N}$  est un système générateur de l'idéal maximal  $\mathcal{M}_{X,x} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ ; cette définition est indépendante du choix des  $(g_j)$ .

**COROLLAIRE 2.3.** *Sur un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ , les nombres de Lelong directionnels sont liés aux nombres de Lelong classiques par*

$$\nu(T, x) = \nu(T, x, a_1), \quad a_1 = (1, \dots, 1).$$

*Démonstration.* Par définition, le nombre  $\nu(T, x)$  est associé au poids  $\varphi(z) = \log|z-x|$  et  $\nu(T, x, a_1)$  au poids  $\psi(z) = \log \max |z_j - x_j|$ . Il est clair que  $\lim_{z \rightarrow x} \psi(z)/\varphi(z) = 1$ , d'où la conclusion d'après le théorème 2.1.  $\square$

### 3. Théorème de Thie

On suppose ici que  $X$  est une variété analytique complexe de dimension  $n$  et que  $T$  est le courant d'intégration sur un ensemble analytique fermé  $A \subset X$  de dimension pure  $p$  (cf. P. Lelong [Le1]); on notera suivant l'usage  $T = [A]$ . Nous nous proposons de redémontrer le résultat de P. Thie [Th] donnant l'interprétation des nombres de Lelong  $\nu([A], x)$  comme multiplicités de l'ensemble analytique  $A$ .

Soit  $x \in A$  un point fixé et  $\mathcal{I}_{A,x}$  l'idéal des germes de fonctions holomorphes en  $x$  s'annulant sur  $A$ . On peut alors trouver sur  $X$  des coordonnées locales  $z = (z_1, \dots, z_n)$ , centrées au point  $x$ , telles qu'il existe des polynômes distingués  $P_j \in \mathcal{I}_{A,x}$  en la variable  $z_j$ ,  $p < j \leq n$ , s'écrivant sous la forme

$$P_j(z) = z_j^{d_j} + \sum_{k=1}^{d_j} a_{j,k}(z_1, \dots, z_{j-1}) z_j^{d_j-k}, \quad a_{j,k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}^{j-1}, 0}^k \tag{3.1}$$

Montrons en effet cette propriété par récurrence sur  $\text{codim } X = n - p$ , en identifiant le germe  $(X, x)$  à  $(\mathbb{C}^n, 0)$  grâce à un système de coordonnées locales  $(w_1, \dots, w_n)$  fixé une fois pour toutes.

Si  $n - p \geq 1$ , il existe un élément non nul  $f \in \mathcal{I}_{A,x}$ . Soit  $d$  le plus petit entier tel que  $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}^n, 0}^d$  et soit  $e_n \in \mathbb{C}^n$  un vecteur non nul tel que  $\lim_{t \rightarrow 0} f(te_n)/t^d \neq 0$ . Complétons le vecteur  $e_n$  en une base  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-1}, e_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  et notons  $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-1}, z_n)$  les coordonnées correspondantes. Le théorème de préparation de Weierstrass permet de factoriser  $f$  sous la forme  $f = gP$ , où  $P$  est un polynôme distingué de la forme (3.1) en la variable  $z_n$  et où  $g$  est une fonction holomorphe inversible au point  $x$ . Si  $n - p = 1$ , le polynôme  $P_n = P$  répond à la question.

Si  $n - p \geq 2$ ,  $\mathcal{O}_{A,x} = \mathcal{O}_{X,x} / \mathcal{I}_{A,x}$  est un  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}, 0} = \mathbb{C}\{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-1}\}$ -module de type fini, c'est-à-dire que la projection  $\text{pr}: (X, x) \approx (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n-1}, 0)$  est un morphisme fini de  $(A, x)$  sur un germe  $(Z, 0) \subset (\mathbb{C}^{n-1}, 0)$  de dimension  $p$ . L'hypothèse de récurrence appliquée à  $\mathcal{I}_{Z,0} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}, 0} \cap \mathcal{I}_{A,x}$  permet de trouver une nouvelle base  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  de  $\mathbb{C}^{n-1}$  et des polynômes  $P_{p+1}, \dots, P_{n-1} \in \mathcal{I}_{Z,0}$  s'écrivant sous la forme (3.1) dans les coordonnées

$(z_1, \dots, z_{n-1})$  associées à la base  $(e_1, \dots, e_{n-1})$ . Si l'on pose  $P_n = P$ , l'assertion précédente est alors démontrée en codimension  $n-p$ .

Etant donné un polynôme  $Q(w) = w^d + a_1 w^{d-1} + \dots + a_d \in \mathbb{C}[w]$ , toute racine  $w$  de  $Q$  vérifie

$$|w| \leq 2 \max_{1 \leq k \leq d} |a_k|^{1/k}, \quad (3.2)$$

sinon  $Q(w) w^{-d} = 1 + a_1 w^{-1} + \dots + a_d w^{-d}$  serait de module supérieur ou égal à  $1 - (2^{-1} + \dots + 2^{-d}) = 2^{-d}$ , ce qui est absurde. Notons  $z = (z', z'')$  avec  $z' = (z_1, \dots, z_p)$  et  $z'' = (z_{p+1}, \dots, z_n)$ . Comme  $a_{j,k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}^{j-1}, 0}^k$ , on a

$$|a_{j,k}(z_1, \dots, z_{j-1})|^{1/k} = O(|z_1| + \dots + |z_{j-1}|) \quad \text{si } j > p,$$

et on déduit de (3.1), (3.2) que  $|z_j| = O(|z_1| + \dots + |z_{j-1}|)$  sur  $(A, x)$ . Par suite, le germe  $(A, x)$  est contenu dans un cône  $|z''| \leq C|z'|$ .

On va maintenant utiliser cette propriété pour calculer le nombre de Lelong du courant  $[A]$  au point  $x$ . Quand  $z$  tend vers  $x$ , les fonctions

$$\varphi(z) = \log |z| = \log (|z'|^2 + |z''|^2)^{1/2}, \quad \psi(z) = \log |z'|$$

sont équivalentes sur le germe  $(A, x)$ ; d'après le théorème 2.1 ceci entraîne

$$\nu([A], x) = \nu([A], \varphi) = \nu([A], \psi).$$

Soit  $B' \subset \mathbb{C}^p$  la boule de centre 0 et de rayon  $r'$ ,  $B'' \subset \mathbb{C}^{n-p}$  la boule de centre 0 et de rayon  $r'' = Cr'$ . L'inclusion du germe  $(A, x)$  dans le cône  $|z''| \leq C|z'|$  montre que pour  $r'$  assez petit la projection

$$\text{pr}: A \cap (B' \times B'') \rightarrow B'$$

est propre et finie. L'application  $\text{pr}$  est donc un revêtement ramifié ayant un nombre fini  $q$  de feuillets. D'après la formule (1.6) appliquée à  $2\psi$  on a

$$\begin{aligned} \nu([A], \psi, \log t) &= (4\pi t^2)^{-p} \int_{A \cap \{\psi < \log t\}} (dd^c e^{2\psi})^p \\ &= (4\pi t^2)^{-p} \int_{A \cap \{|z'| < t\}} (\text{pr}^* dd^c |z'|^2)^p \\ &= (4\pi t^2)^{-p} \cdot q \cdot \int_{\mathbb{C}^p \cap \{|z'| < t\}} (dd^c |z'|^2)^p = q. \end{aligned}$$

On obtient donc le théorème suivant, dû à P. Thie [Th].

**THÉORÈME 3.3.** *Soit  $A$  un ensemble analytique de dimension  $p$  dans une variété analytique complexe  $X$  de dimension  $n$  et soit  $x \in A$ . Alors il existe au point  $x$  des coordonnées locales*

$$z = (z', z''), \quad z' = (z_1, \dots, z_p), \quad z'' = (z_{p+1}, \dots, z_n)$$

*et des boules  $B' \subset \mathbb{C}^p, B'' \subset \mathbb{C}^{n-p}$ , relatives à ces coordonnées, de rayons respectifs  $r', r''$ , telles que  $A \cap (B' \times B'')$  soit contenu dans le cône d'équation  $|z''| \leq (r''/r')|z'|$ . On définit la multiplicité de  $A$  au point  $x$  comme le nombre  $q$  de feuilletés dans le revêtement ramifié  $A \cap (B' \times B'') \rightarrow B'$ . Alors  $\nu([A], x) = q$ .*

#### 4. Théorème d'analyticité de Siu

On se donne ici un deuxième espace analytique  $Y$  et une fonction  $\varphi: X \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty[$  psh et continue. On suppose que  $\varphi$  est *semi-exhaustive* par rapport à  $X$ , c'est-à-dire que pour tout compact  $L \subset Y$  il existe  $R = R(L) < 0$  tel que

$$\{(x, y) \in X \times L; \varphi(x, y) \leq R\} \subset\subset X \times Y. \quad (4.1)$$

Soit  $T$  un courant positif fermé de bidimension  $(p, p)$  sur  $X$ . Pour tout point  $y \in Y$ , la fonction  $\varphi_y(x) := \varphi(x, y)$  est semi-exhaustive sur  $X$ ; on peut donc associer à  $y$  le nombre de Lelong généralisé  $\nu(T, \varphi_y)$ . La continuité faible de la mesure  $T \wedge (dd^c \max(\varphi_y, a))^p$  par rapport au paramètre  $y$  montre que pour tous  $r_1 < r_2 < R$  on a

$$\limsup_{y \rightarrow y_0} \nu(T, \varphi_y, r_1) \leq \nu(T, \varphi_{y_0}, r_2). \quad (4.2)$$

On en déduit aussitôt que l'application  $y \mapsto \nu(T, \varphi_y)$  est semi-continue supérieurement.

Les ensembles de niveau

$$E_c = \{y \in Y; \nu(T, \varphi_y) \geq c\}, \quad c > 0 \quad (4.3)$$

sont donc fermés. On s'intéresse dans la suite au problème de savoir si  $E_c$  est en général un ensemble analytique. Comme il s'agit d'une question locale, on peut supposer sans perte de généralité que  $Y$  est un espace de Stein. Après addition d'une constante à  $\varphi$ , on peut supposer aussi qu'il existe un compact  $K \subset X$  tel que

$$\{(x, y) \in X \times Y; \varphi(x, y) \leq 0\} \subset K \times Y.$$

*Première étape: construction d'un potentiel psh local.*

Notre objectif est ici de généraliser la construction classique des potentiels psh associés à un courant positif fermé (cf. P. Lelong [Le2] et H. Skoda [Sk]), en remplaçant le noyau standard issu de la métrique hermitienne de  $\mathbf{C}^n$  par un noyau construit à l'aide du poids  $\varphi$ .

D'après le théorème 2.1, seul le comportement asymptotique de  $\varphi$  au voisinage de l'ensemble polaire  $\varphi^{-1}(-\infty)$  entre en jeu. On va donc se permettre de modifier légèrement  $\varphi$  en dehors d'un voisinage de  $\varphi^{-1}(-\infty)$ . Quitte à rétrécir de nouveau  $Y$  si nécessaire, il existe une régularisation  $\psi \in C^\infty(X \times Y)$  de  $\varphi$  telle que  $\psi > \varphi$  sur  $X \times Y$  et  $\psi < \varphi + 1/2$  sur l'ensemble

$$\{(x, y) \in X \times Y; -2 \leq \varphi(x, y) \leq 0\}.$$

Après remplacement de  $\varphi$  par la fonction  $\hat{\varphi}$  telle que

$$\begin{cases} \hat{\varphi} = \varphi & \text{sur } \varphi(x, y) \leq -2 \\ \hat{\varphi} = \max(\varphi, 2\psi + 1) & \text{sur } -2 \leq \varphi(x, y) \leq -1 \\ \hat{\varphi} = 2\psi + 1 & \text{sur } -1 \leq \varphi(x, y) \end{cases}$$

on voit qu'on peut supposer  $\varphi$  de classe  $C^\infty$  au voisinage de  $\{\varphi(x, y) \geq -1\}$ . Soit  $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  une fonction croissante telle que  $\chi(t) = t$  pour  $t \leq -1$  et  $\chi(t) = 0$  pour  $t \geq 0$ . Notons  $H \subset \mathbf{C}$  le demi-plan  $H = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Re} z < -1\}$ . On associe à  $T$  la fonction potentiel  $V$  sur  $Y \times H$  définie par

$$V(y, z) = - \int_{\operatorname{Re} z}^0 \nu(T, \varphi_y, t) \chi'(t) dt. \quad (4.4)$$

La formule (1.3) entraîne pour tout  $t > \operatorname{Re} z$  l'égalité

$$\nu(T, \varphi_y, t) = (2\pi)^{-p} \int_{\varphi(x, y) < t} T(x) \wedge (dd_x^c \tilde{\varphi}(x, y, z))^p$$

avec  $\tilde{\varphi}(x, y, z) := \max(\varphi(x, y), \operatorname{Re} z)$ . Le théorème de Fubini appliqué à (4.4) donne alors

$$V(y, z) = (2\pi)^{-p} \int_{x \in X} T(x) \wedge \chi(\tilde{\varphi}(x, y, z)) (dd_x^c \tilde{\varphi}(x, y, z))^p.$$

Pour toute  $(n-1, n-1)$ -forme  $h$  de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $Y \times H$ , il vient

$$\langle dd^c V, h \rangle = \langle V, dd^c h \rangle = (2\pi)^{-p} \int_{X \times Y \times H} T(x) \wedge \chi(\tilde{\varphi}(x, y, z)) (dd^c \tilde{\varphi}(x, y, z))^p \wedge dd^c h(y, z).$$

La forme  $\chi \circ \tilde{\varphi} \cdot h$  est à support compact dans  $X \times Y \times H$ . On peut donc intégrer par parties pour obtenir

$$\langle dd^c V, h \rangle = (2\pi)^{-p} \int_{X \times Y \times H} T(x) \wedge dd^c(\chi \circ \tilde{\varphi}(x, y, z)) \wedge (dd^c \tilde{\varphi}(x, y, z))^p \cdot h(y, z).$$

Sur la couronne  $\{-1 \leq \varphi(x, y) \leq 0\}$  on a  $\tilde{\varphi}(x, y, z) = \varphi(x, y)$  avec  $\varphi$  de classe  $C^\infty$ , tandis que pour  $\varphi(x, y) < -1$  il vient  $\tilde{\varphi} < -1$  et  $\chi \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}$ . Comme  $\tilde{\varphi}$  est psh, on voit que  $dd^c V(y, z)$  est somme de la (1,1)-forme positive

$$(y, z) \mapsto (2\pi)^{-p} \int_{\{x \in X; \varphi(x, y) < -1\}} T(x) \wedge (dd^c_{x, y, z} \tilde{\varphi}(x, y, z))^{p+1}$$

et de la (1,1)-forme indépendante de  $z$  à coefficients localement bornés

$$y \mapsto (2\pi)^{-p} \int_{\{x \in X; -1 \leq \varphi(x, y) \leq 0\}} T \wedge dd^c_{x, y}(\chi \circ \varphi) \wedge (dd^c_{x, y} \varphi)^p$$

La fonction  $V$  est d'autre part continue sur  $Y \times H$  grâce à la continuité faible de la mesure  $T \wedge (dd^c_{x, y, z} \tilde{\varphi})^p$  par rapport aux variables  $(y, z)$ . On en déduit par conséquent le résultat suivant.

**THÉORÈME 4.5.** *Il existe une fonction psh positive  $\varrho \in C^\infty(Y)$  telle que  $V(y, z) + \varrho(y)$  soit psh sur  $Y \times H$ .*

Si on fait tendre  $\text{Re } z$  vers  $-\infty$ , on voit que la fonction

$$U_0(y) = V(y, -\infty) + \varrho(y) = \varrho(y) - \int_{-\infty}^0 \nu(T, \varphi_y, t) \chi'(t) dt$$

est localement psh ou  $\equiv -\infty$  sur  $Y$ . De plus, il est clair que  $U_0(y) = -\infty$  en tout point  $y$  tel que  $\nu(T, \varphi_y) > 0$ . Si  $Y$  est irréductible et si  $U_0 \not\equiv -\infty$ , on voit donc déjà que l'ensemble de densité  $\bigcup_{c > 0} E_c$  est pluripolaire dans  $Y$ .

*Deuxième étape:* utilisation du principe du minimum de Kiselman.

Soit  $\alpha$  un réel  $\geq 0$  quelconque. La fonction

$$Y \times H \ni (y, z) \mapsto V(y, z) + \varrho(y) - \alpha \text{Re } z$$

est alors psh et indépendante de  $\text{Im } z$ . D'après le principe du minimum de Kiselman [Ki1], la transformée de Legendre

$$U_\alpha(y) = \inf_{r < -1} [V(y, r) + \varrho(y) - \alpha r]$$

est localement psh ou  $\equiv -\infty$  sur  $Y$ .

LEMME 4.6. Soit  $y_0 \in Y$  un point fixé.

(a) Si  $\alpha > \nu(T, \varphi_{y_0})$ , alors  $U_\alpha$  est bornée inférieurement dans un voisinage de  $y_0$ .

(b) Si  $\alpha < \nu(T, \varphi_{y_0})$ , alors  $U_\alpha(y_0) = -\infty$ .

Démonstration. Par définition de  $V$  (cf. (4.4)) on a

$$V(y, r) \leq -\nu(T, \varphi_y, r) \int_r^0 \chi'(t) dt = r\nu(T, \varphi_y, r) \leq r\nu(T, \varphi_y). \quad (4.7)$$

Il en résulte bien que  $U_\alpha(y_0) = -\infty$  si  $\alpha < \nu(T, \varphi_{y_0})$ . D'autre part, si on a  $\nu(T, \varphi_{y_0}) < \alpha$ , il existe  $t_0 < 0$  tel que  $\nu(T, \varphi_{y_0}, t_0) < \alpha$ . Soit  $r_0 < t_0$  fixé. La propriété de semi-continuité (4.2) entraîne qu'il existe un voisinage  $\omega$  de  $y_0$  tel que  $\sup_{y \in \omega} \nu(T, \varphi_y, r_0) < \alpha$ . Pour tout  $y \in \omega$ , on a alors

$$V(y, r) \geq -C - \alpha \int_r^{r_0} \chi'(t) dt = -C + \alpha(r - r_0),$$

ce qui implique  $U_\alpha(y) \geq -C - \alpha r_0$ . □

THÉORÈME 4.8. Si  $Y$  est irréductible et si  $E_c \neq Y$ , alors  $E_c$  est un ensemble fermé pluripolaire complet dans  $Y$ , i.e. il existe une fonction psh continue  $w: Y \rightarrow [-\infty, +\infty[$  telle que  $E_c = w^{-1}(-\infty)$ .

Démonstration. On observe d'abord que la famille  $(U_\alpha)$  est croissante en  $\alpha$ , que  $U_\alpha = -\infty$  sur  $E_c$  pour tout  $\alpha < c$ , et que  $\sup_{\alpha < c} U_\alpha(y) > -\infty$  si  $y \in Y \setminus E_c$  (cf. lemme 4.6). Soit  $(Y_k)_{k \geq 1}$  une suite exhaustive de compacts de  $Y$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , soit  $w_k \in C^\infty(Y)$  une régularisée de  $U_{c-1/k}$  telle que  $w_k \geq U_{c-1/k}$  sur  $Y$  et  $w_k \leq -2^k$  sur  $E_c \cap Y_k$ . Le lemme 4.6 (a) montre que la famille  $(w_k)$  est uniformément minorée sur tout compact de  $Y \setminus E_c$ , et on peut également choisir les  $w_k$  uniformément majorées sur tout compact de  $Y$  puisque  $U_{c-1/k} \leq U_c$ . La fonction

$$w = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} w_k$$

répond alors à la question. □

*Troisième étape: estimation de la singularité des potentiels  $U_\alpha$ .*

Pour pouvoir obtenir une telle estimation, nous avons besoin d'une information sur le comportement de  $\varphi$  au voisinage des pôles. Dans la suite, on considère l'espace  $Y$  comme étant plongé dans un ouvert de Stein  $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ , et on munit  $Y$  de la distance induite par la distance euclidienne de  $\mathbb{C}^N$ .

**HYPOTHÈSE 4.9.** *On suppose que  $e^{\varphi(x,y)}$  est localement höldérienne en  $y$  sur  $X \times Y$ , c'est-à-dire que pour tout compact  $K \subset X \times Y$ , il existe des constantes  $M > 0$ ,  $\gamma \in ]0, 1[$  telles que*

$$|e^{\varphi(x,y_1)} - e^{\varphi(x,y_2)}| \leq M|y_1 - y_2|^\gamma \tag{4.10}$$

pour tous  $(x, y_1) \in K, (x, y_2) \in K$ .

On observera que l'hypothèse 4.9 est satisfaite pour toute fonction  $\varphi$  de la forme

$$\varphi = \max_j \log \left( \sum_k |F_{j,k}|^{\gamma_{j,k}} \right)$$

où les  $F_{j,k}$  sont des fonctions holomorphes sur  $X \times Y$  et les  $\gamma_{j,k}$  des constantes réelles  $> 0$ ; dans ce cas  $e^\varphi$  est höldérienne d'ordre  $\gamma = \min(\gamma_{j,k}, 1)$ .

**THÉORÈME 4.11.** *Soit  $y_0 \in Y$  un point fixé,  $L$  un voisinage compact de  $y_0$ ,  $K \subset X$  une partie compacte et  $r_0$  un réel  $< -1$  tels que*

$$\{(x, y) \in X \times L; \varphi(x, y) \leq r_0\} \subset K \times L.$$

*On suppose que  $\varphi$  vérifie l'inégalité (4.10) pour tous  $(x, y_1, y_2) \in K \times L \times L$ . Alors, quel que soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , il existe un réel  $\eta(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $y \in Y$  vérifiant  $|y - y_0| < \eta(\varepsilon)$ , on ait*

$$U_\alpha(y) \leq ((1 - \varepsilon)^p \nu(T, \varphi_{y_0}) - \alpha) \left( \gamma \log |y - y_0| + \log \frac{2eM}{\varepsilon} \right) + \varrho(y).$$

*Démonstration.* On commence par estimer  $\nu(T, \varphi_y, r)$  lorsque  $y \in L$  est voisin de  $y_0$ .

Posons

$$\begin{cases} \psi(x) = (1 - \varepsilon) \varphi_{y_0}(x) + \varepsilon r - \varepsilon/2 & \text{si } \varphi_{y_0}(x) \leq r - 1 \\ \psi(x) = \max(\varphi_y(x), (1 - \varepsilon) \varphi_{y_0}(x) + \varepsilon r - \varepsilon/2) & \text{si } r - 1 \leq \varphi_{y_0}(x) \leq r \\ \psi(x) = \varphi_y(x) & \text{si } r \leq \varphi_{y_0}(x) \leq r_0 \end{cases}$$

et vérifions que cette définition est bien cohérente si  $|y-y_0|$  est assez petit. Par hypothèse

$$|e^{\varphi_y(x)} - e^{\varphi_{y_0}(x)}| \leq M|y-y_0|^\gamma.$$

On en déduit aussitôt les inégalités

$$\varphi_y(x) \leq \varphi_{y_0}(x) + \log(1 + M|y-y_0|^\gamma e^{-\varphi_{y_0}(x)})$$

$$\varphi_y(x) \geq \varphi_{y_0}(x) + \log(1 - M|y-y_0|^\gamma e^{-\varphi_{y_0}(x)}).$$

En particulier, pour  $\varphi_{y_0}(x) = r$  il vient  $(1-\varepsilon)\varphi_{y_0}(x) + \varepsilon r - \varepsilon/2 = r - \varepsilon/2$  et

$$\varphi_y(x) \geq r + \log(1 - M|y-y_0|^\gamma e^{-r}),$$

tandis que pour  $\varphi_{y_0}(x) = r-1$  on a  $(1-\varepsilon)\varphi_{y_0}(x) + \varepsilon r - \varepsilon/2 = r-1 + \varepsilon/2$  et

$$\varphi_y(x) \leq r-1 + \log(1 + M|y-y_0|^\gamma e^{-r}).$$

La définition de  $\psi$  est donc cohérente dès que  $M|y-y_0|^\gamma e^{1-r} \leq \varepsilon/2$ , c'est-à-dire

$$\gamma \log|y-y_0| + \log \frac{2eM}{\varepsilon} \leq r.$$

Dans ce cas  $\psi$  coïncide avec  $\varphi_y$  au voisinage de  $\{\psi=r\}$ , et avec

$$(1-\varepsilon)\varphi_{y_0}(x) + \varepsilon r - \varepsilon/2$$

au voisinage de l'ensemble polaire  $\psi^{-1}(-\infty)$ . Par définition de la quantité  $\nu(T, \psi, r)$  ceci entraîne

$$\nu(T, \varphi_y, r) = \nu(T, \psi, r) \geq \nu(T, \psi) = (1-\varepsilon)^p \nu(T, \varphi_{y_0}).$$

Grâce à (4.7) on obtient  $V(y, r) \leq r\nu(T, \varphi_y, r)$ , d'où

$$U_\alpha(y) \leq V(y, r) + \varrho(y) - \alpha r \leq r\nu(T, \varphi_y, r) - \alpha + \varrho(y), \quad (4.12)$$

$$U_\alpha(y) \leq r((1-\varepsilon)^p \nu(T, \varphi_{y_0}) - \alpha) + \varrho(y).$$

Supposons  $\gamma \log|y-y_0| + \log(2eM/\varepsilon) \leq r_0$ , i.e.  $|y-y_0| \leq (\varepsilon/2eM)^{1/\gamma} e^{r_0/\gamma}$ ; on peut choisir alors  $r = \gamma \log|y-y_0| + \log(2eM/\varepsilon)$ , et d'après (4.12) ceci donne l'inégalité du théorème 4.11.  $\square$

*Quatrième étape:* utilisation des estimations  $L^2$  de Hörmander.

Supposons d'abord que  $Y$  soit une variété de Stein lisse, et notons  $m$  la dimension de  $Y$ . La démonstration repose sur le lemme crucial suivant (cf. Hörmander [Hö], corollary 4.4.6, et Bombieri [Bo]).

LEMME 4.13. *Soit  $w$  une fonction psh sur  $Y$ . Alors l'ensemble des points  $y \in Y$  au voisinage desquels  $e^{-w}$  n'est pas localement sommable est un sous-ensemble analytique de  $Y$ .*

La fin de la démonstration reprend l'idée de la méthode de C. O. Kiselman [Ki2]. Pour tous réels  $\alpha, \beta > 0$  notons  $Z_{\alpha, \beta}$  l'ensemble des points  $y \in Y$  au voisinage desquels  $\exp(-U_\alpha/\beta)$  n'est pas localement sommable. Comme la famille  $(U_\alpha)$  est croissante en  $\alpha$ , on a  $Z_{\alpha', \beta'} \supset Z_{\alpha'', \beta''}$  si  $\alpha' \leq \alpha''$  et  $\beta' \leq \beta''$ .

Soit  $y_0$  un point fixé de  $Y$ . Distinguons deux cas suivant que  $y_0$  appartient ou non à  $E_c$ . Si  $y_0 \notin E_c$  alors  $\nu(T, \varphi_{y_0}) < c$  par définition. Choisissons  $\alpha$  tel que  $\nu(T, \varphi_{y_0}) < \alpha < c$ ; d'après le lemme 4.6 (a), la fonction  $U_\alpha$  est bornée inférieurement au voisinage de  $y_0$ , donc  $y_0 \notin Z_{\alpha, \beta}$  pour tout  $\beta > 0$ . Si  $y_0 \in E_c$  et si  $\alpha < c$ , alors le lemme 4.11 implique que pour tout  $\varepsilon > 0$  on a

$$U_\alpha(y) \leq (1-\varepsilon)(c-\alpha)\gamma \log|y-y_0| + C(\varepsilon);$$

cette inégalité entraîne que  $\exp(-U_\alpha/\beta)$  est non sommable au voisinage de  $y_0$  dès que  $\beta < (c-\alpha)\gamma/2m$ . On en déduit donc

$$E_c = \bigcap_{\substack{\alpha < c \\ \beta < (c-\alpha)\gamma/2m}} Z_{\alpha, \beta},$$

ce qui prouve que  $E_c$  est un sous-ensemble analytique de  $Y$ .

Dans le cas où  $Y$  est un espace analytique avec singularités, on peut d'après Hironaka [Hi] trouver une modification lisse  $\pi: \tilde{Y} \rightarrow Y$ . Pour tout  $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ , posons

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, \tilde{y}) &= \varphi(x, \pi(\tilde{y})), \\ \tilde{E}_c &= \{\tilde{y} \in \tilde{Y}; \nu(T, \tilde{\varphi}_{\tilde{y}}) \geq c\}. \end{aligned}$$

Alors  $E_c = \pi(\tilde{E}_c)$ , par suite  $E_c$  est analytique comme image propre d'un ensemble analytique (théorème de Remmert [Re1], [Re2]). On obtient donc l'énoncé suivant, qui généralise à la fois le théorème d'analyticité de [Siu] et celui de Kiselman [Ki3].

THÉORÈME 4.14. Soient  $X, Y$  des espaces analytiques complexes,  $X$  étant de Stein, et  $T$  un courant positif fermé sur  $X$ . Soit

$$\varphi: X \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty[$$

une fonction psh continue. On suppose que  $\varphi$  est semi-exhaustive relativement à  $X$  et que  $e^{\varphi(x,y)}$  est localement höldérienne en  $y$  sur  $X \times Y$ . Alors les ensembles de niveau

$$E_c = \{y \in Y; \nu(T, \varphi_y) \geq c\}$$

sont des sous-ensembles analytiques de  $Y$ .

On peut conjecturer que le théorème 4.14 est encore vrai sans l'hypothèse de continuité höldérienne de  $e^\varphi$ , mais comme la plupart des poids  $\varphi$  intéressants vérifient cette hypothèse, il nous semble que la généralisation ainsi obtenue ne serait pas très significative.

#### Bibliographie

- [B-T] BEDFORD, E. & TAYLOR, B. A., A new capacity for plurisubharmonic functions. *Acta Math.*, 149 (1982), 1–41.
- [Bo] BOMBIERI, E., Algebraic values of meromorphic maps. *Invent. Math.*, 10 (1970), 267–287 and Addendum, *Invent. Math.*, 11 (1970), 163–166.
- [C-L-N] CHERN, S. S., LEVINE, H. I. & NIRENBERG, L., Intrinsic norms on a complex manifold. *Global Analysis* (papers in honor of K. Kodaira), p. 119–139, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1969.
- [De1] DEMAILLY, J.-P., Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 32 (1982), 37–66.
- [De2] — Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, 19 (1985), 1–124.
- [Hi] HIRONAKA, H., Resolution of singularities of an algebraic variety I, II. *Ann. of Math.*, 79 (1964), 109–326.
- [Hö] HÖRMANDER, L., *An introduction to Complex Analysis in several variables*. 2nd edition, North-Holland Math. libr., vol. 7, Amsterdam, London, 1973.
- [Ki1] KISELMAN, C. O., The partial Legendre transformation for plurisubharmonic functions. *Invent. Math.*, 49 (1978), 137–148.
- [Ki2] — Densité des fonctions plurisousharmoniques. *Bull. Soc. Math. France*, 107 (1979), 295–304.
- [Ki3] — Un nombre de Lelong raffiné. Communication orale aux Journées Complexes du Sud de la France (mai 1986).
- [Le1] LELONG, P., Intégration sur un ensemble analytique complexe. *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 239–262.
- [Le2] — Fonctions entières ( $n$  variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans  $\mathbb{C}^n$ . *J. Analyse Math. Jerusalem*, 12 (1964), 365–407.
- [Le3] — *Plurisubharmonic functions and positive differential forms*. Gordon and Breach, New-York, and Dunod, Paris, 1969.

- [Re1] REMMERT, R., Projectionen analytischer Mengen. *Math. Ann.*, 130 (1956), 410–441.
- [Re2] — Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. *Math. Ann.*, 133 (1957), 328–370.
- [Siu] SIU, Y. T., Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents. *Invent. Math.*, 27 (1974), 53–156.
- [Sk] SKODA, H., Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans  $C^n$ . *Bull. Soc. Math. France*, 100 (1972), 353–408.
- [Th] THIE, P., The Lelong number of a point of a complex analytic set. *Math. Ann.*, 172 (1967), 269–312.

*Reçu le 11 juillet, 1986*

*Révisé le 31 octobre, 1986*