THEORIE DES SYSTEMES DEMOSIENS DE GROUPOIDES

ALBERT SADE

1. Introduction. L'idée première de ces recherches est dans deux papiers de M. Schauffler consacrés à l'étude des codes avec un vocabulaire ayant un nombre uniforme de figures, [40], [41]. Dans le second, il construit un tel code au moyen d'une population Ω de quasigroupes Q_i, définis sur le même ensemble fini, $E = (1, 2, 3, \cdots, n)$ et satisfaisant à une associativité qu'il appelle "im Ganzen", $\forall x, y, z \in E$, $\forall Q_1, Q_2 \in \Omega$, $\exists Q_3, Q_4 \in \Omega$, $xQ_1(yQ_2z) = (xQ_3y)Q_4z$. Il montre que l'ensemble de tous les quasigroupes construits sur E ne peut être associatif "im Ganzen" si n surpasse 3. Dans le présent travail on se propose, sans préoccupations cryptographiques immédiates, d'étudier systématiquement les ensembles (finis ou non) de groupoïdes construits sur un support commun et satisfaisant à quelque relation *demosienne* analogue à l'associativité "im Ganzen". De telles considérations ont déjà été abordées dans un précédent travail de l'auteur ([35], p. 156, N°2, iv, p. 161, N°8, IV). Elles ne sont pas seulement susceptibles de conduire à des applications dans le domaine du "chiffre", elles présentent encore un intérêt en soi dans le champ de la spéculation pure. De tels *ensembles multistructurés*, c'est-à-dire munis de plusieurs lois de composition, se rencontrent à chaque pas en algèbre. On sait que les *anneaux*, *corps*, *clusters*, *narings* et *neofields* ([32], p. 296, III) possédent deux lois de composition. Skolem ([43], p. 53) donne un système de quatre semigroupes idempotents, abéliens, et qui sont deux à deux mutuellement distributifs. Les ensembles de groupoïdes engendrés par deux *groupoïdes orthogonaux* ([31], p. 231, N°6), les *ringoïdes* ([7], p. 203, N°2) en possèdent un nombre quelconque. Dans [21 b], Hasse, p 27, définite un ensemble muni de quatre opérations.

Le fait que le même ensemble soit muni de toute une population de lois de composition suggère le nom de *demosiennes*, déjà introduit dans [35] pour qualifier les identités entre éléments de tels ensembles. On trouve dans la littérature maints exemples de relations contenant à la fois plusieurs lois de composition. A peu près toutes les égalités de l'algèbre classique font intervenir six opérations usuelles. L'équation d'associativité mutuelle ([36], déf. 17, [43], p. 47), $(x \times y) \ast z = x \times (y \ast z)$, l'équation de Kolmogoroff ([2], équ. I'), $st \times tu = su$, l'équation de Cacciopoli [9], Ghermănescu [15], Gyires [19], Aczél [1], [3], $f(x \times y) = f(x) \ast f(y)$, où f est une application de E sur lui-même, l'équation de Ghermănescu [16], $(x \ast a) \times (y \ast b) = x \times y$, celle de Kurepa [29], $[(a \times b) \ast c] \times (a \ast b) = (b \ast c) \times [a \ast (b \times c)]$, l'équation de distibuti-

Received April 27, 1959.

vité [23], [17], ([43], p. 52, équ. 4), $(x \ast y) \times z = (x \times z) \ast (y \times z)$, l'équation d'Aczél-Hosszú [4], $(x \times y) \times z = x \times (y \circ z)$, contiennent toutes deux opérations différentes. Hosszú ([25], p. 206), considère une identité avec quatre lois de composition, $F[x, G(y, z)] = H[K(x, y), z]$.

Mais la plupart des auteurs qui ont traité de ces relations ont regardé les lois qu'elles contiennent comme des fonctions de deux variables définies sur un corps (celui des réels, en général). Si l'on cesse de considérer ces égalités comme des équations fonctionnelles, pour les interpréter comme des conditions entre éléments d'une même support, muni de plusieurs lois, c'est-à-dire comme des équations entre groupoïdes, alors ce changement de point de vue peut amener, avec une généralité plus grande, des simplifications notables et inattendues. Pareil fait n'est pas nouveau. Scherk [42], développe sur dix pages de pesantes considérations d'analyse pour établir une proposition dont la démonstration directe tient en quelques lignes. Ici, soit par exemple l'équation de Cauchy-Cacciopoli, $f(x \times y) = f(x) \ast f(y)$, qui a fait l'objet de nombreux mémoires couvrant plus d'une centaine de pages. Si E est un ensemble quelconque, muni de deux opérations $(\times)$ et $(\ast)$, cette équation exprime que le groupoïde $G' = E(\ast)$ est homomorphe de $G = E(\times)$. Soit $T = [x \to f(x)]$ l'homomorphisme qui fait passer de G à G' et A le groupe d'automorphisme de G; alors, toutes les solutions en f sont données par les éléments du coset A_T. Le problème n'est possible que si G' est homomorphe de G. L'affirmation d'Aczél [1], que G et G' sont en même temps bissymétriques ou non devient évidente puisque $G \sim G'$. Le théorème d'Aczél ([3], p. 329), que (8) est un groupe continu, devient immédiat puisque G' est alors homomorphe au groupe additif des réels. De même l'équation ci-dessus de Hosszú, mise sous la forme $x \times (y \ast z) = (x \ominus y) \circ z$, a été complètement résolue par Belousov [6], dans le cas des quasigroupes, par Hosszú [26], et par Rado (Cluj). Les quatre quasigroupes sont isotopes d'un même groupe. (Voir, N°7.2 une solution différente de ce problème, et [37] une extension aux multigroupoïdes).[1] On aura un autre exemple de telles simplifications à propos de l'équation de distributivité (Ci-après, N°8) et de celle de transitivité [38].

Il est certain qu'un pareil sujet déborde le cadre d'une simple note; nous nous bornerons à l'esquisser ici. Les questions abordées sont, en se limitant à quelques identités classiques, les systèmes satisfaisant à une équation fonctionnelle ou à une loi demosienne particulière donnée, les conséquences de l'existence de deux lois demosiennes, les systèmes demosiens dont les éléments sont dérivés d'un même groupe par des isotopies ayant pour composantes des translations de ce groupe, (systèmes (G, K, T)), un essai sur les systèmes demosiens organisés au moyen d'une loi de composition entre les groupoïdes qui les forment.

La nomenclature, les définitions et notations sont celles des trois papiers [34], [35], [27], auxquels le lecteur est prié de se reporter. En outre les symboles suivants seront utilisés:

$a \prec b$,	Relation d'ordre,
φ_i,	symbole opératoire d'une loi de composition,
Φ,	ensemble des φ_i, sur un même ensemble E,
$\langle a, b, c, \cdots \rangle$,	ensemble ordonné,
(ξ, η, ζ),	isotopie de composantes ξ, η, ζ.

Un index, avant la bibliographie, renvoie aux N°.

CHAPITRE I

SYSTÈMES ADMETTANT UNE LOI DEMOSIENNE DÉTERMINÉE

2. **Définitions.** Un ensemble quelconque, fini ou non, $E = (x, y, \cdots)$ muni de plusieurs lois de composition φ, formant une population finie ou non, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots)$, est dit *multistructuré* ou *demosien*, et noté (E, Φ). Les lois φ sont supposées partout définies et homogènes ([35], p. 156, N°2, équ. 55) et, sauf stipulation contraire, il n'est fait aucune supposition particulière (commutativité, associativité, axiome d'absorption, [7], p. 18) sur la nature de ces lois. Une *expression sur* (E, Φ) est un assemblage d'éléments $\in E$, séparés par les signes opératoires $\varphi_i \in \Phi$ et par des parenthèses, crochets et accolades. Elle définit une suite d'opérations à effectuer, dans un ordre déterminé, sur ces éléments, aboutissant comme résultat final à un élément bien défini $\in E$. Deux expressions sont *égales* si elles définissent le même élément. Si deux expressions sont égales quels que soient les éléments qu'elles contiennent, elles forment une *identité*. Si l'égalité n'a lieu que pour certains choix des lettres, on obtient une *équation*. Mais les choses dépendent aussi des signes opératoires, et les significations des deux vocables empiètent; il convient de préciser dans chaque cas quels sont les éléments ou symboles qui peuvent, on non, être choisis arbitrairement dans une égalité. De telles relations sont dites *demosiennes* parce qu'elles ont lieu sur toute une population de groupoïdes ([35], p. 156, N°2 iv; p. 161, N°8, IV, p. 172, N°30).

Remarquons qu'un système de groupoïdes homogènes satisfaisant à une identité demosienne, quels que soient les éléments et les symboles, se réduirait en général à un seul groupoïde. Soit par exemple

$$\forall x, y, z \in E , \qquad \forall \varphi_i \in \Phi , \qquad (x\varphi_1 y)\varphi_2 z = x\varphi_3(y\varphi_4 z) .$$

Si les $E(\varphi)$ sont homogènes on peut $\forall a, b \in E$, choisir $x = a$ et y, z tels que $y\varphi_4 z = b$. Laissant tous les φ, sauf φ_3, invariables et posant $(x\varphi_1 y)\varphi_2 z = c$, on aurait donc $\forall \varphi_3 \in \Phi$, $c = a\varphi_3 b$, $a, b, c =$ Constantes. Le produit $a\varphi b$ serait le même dans tous les groupoïdes. Cela pouvant être répété $\forall a, b$, tous les $E(\varphi)$ coïncideraient avec un même groupoïde, qui serait évidemment un semigroupe. Plus généralement, soit A une expression dépendant des éléments $x, y, z, \cdots \in E$, associés au moyen des lois $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots \in \Phi$ et B une expression analogue. Supposons l'identité $A = B$ vérifiée $\forall x, y, \cdots \in E$, $\forall \varphi_1, \varphi_2, \cdots \in \Phi$, Alors, laissant tous les x constants et tous les φ, sauf un, φ_i, invariables, on aura, en désignant par a, b, c trois constantes, $c = a\varphi_i b$. Ainsi, le produit $a\varphi b$ sera le même dans tous les groupoïdes du système, Si toutes les lois de Φ sont homogènes, on pourra toujours choisir les $x, y, \cdots$ de manière à attribuer à a et b deux valeurs choisies d'avance (l'homogénéité n'est même pas toujours nécessaire, comme par exemple dans le cas de la commutativité demosienne). Alors

$$\forall a, b \in E\ , \qquad \forall \varphi_i \in \Phi\ , \qquad a\varphi_i b = \text{constante.}$$

Le produit $a\varphi b$ étant le même dans tous les groupoïdes, Φ se réduit à une seule loi.

3. Commutativite demosienne. DÉFINITION 3.1. *Un système (E, Φ) admet la commutativité demosienne si*

$$\forall x, y \in E\ , \qquad \forall \varphi \in \Phi\ , \qquad \exists \varphi'\ , \qquad x\varphi y = y\varphi' x\ .$$

Quand φ' ne dépend ni de x, ni de y, la commutativité est *forte*. Quand φ' dépend à la fois de φ, de x et de y, la commutativité est *faible*. Il est clair qu'*un système satisfaisant à la commutativité forte contient, avec tout groupoïde, $G = E(\varphi)$, le groupoïde conjoint*, ([35], p. 155, N°2, ii), $x\varphi y = z \rightleftarrows y\varphi' x = z$. Dans le cas fini, les deux tables de Cayley de $G = E(\varphi)$ et de $G' = E(\varphi')$ sont deux matrices dont chacune est transposée de l'autre.

EXEMPLE 3.2. Le système de quasigroupes, défini sur le corps R des réels par $x\varphi_\lambda y \equiv (a\lambda + b)x + (c\lambda + d)y + f\lambda + g$, $a, b, c \cdots, g$, constantes $\in R$, admet la commutativité faible.

DÉFINITION 3.3. *Un sous-système d'un système (E, Φ) satisfaisant à une ou plusieurs relations demosiennes est un système (E', Φ'), avec $E' \subseteq E$, $\Phi' \subseteq \Phi$, et satisfaisant aux mêmes relations demosiennes.*

EXEMPLE 3.4. Dans le système (E, Φ) ci-dessus (3.1), les mêmes équations de définition, appliquées au corps Q des fractions relationnelles, fournissent le sous-système demosien (Q, Φ'), $\lambda, a, b, \cdots, g \in Q$.

Question 3.5. *Un système commutatif faible contient-il toujours deux groupoïdes conjoints* (distincts ou non)?

DÉFINITION 3.6. *Etant donné un quasigroupe $Q(\times)$, l'ensemble $(\cdots, \Delta_i^{-1}\Delta_j, \cdots)$, $i, j \in Q$, où $\Delta_i = (x \rightarrow x \times i)$, s'appelle le complexe* *relatif aux translations à droite, l'ensemble* $(\cdots, \Gamma_i^{-1}\Gamma_j, \cdots)$, *le complexe relatif aux translations à gauche.*

Ces deux complexes engendrent deux groupes qui sont des diviseurs des groupes engendrés par les translations elles-mêmes et introduits par Albert [5], p. 509). L'intérêt de ces deux groupes est qu'ils restent invariants si l'on soumet le quasigroupe Q à une isotopie quelconque de forme $(\xi, \eta, 1)$ Si l'on fait subir à $Q(\times)$ l'isotopie principle $x \times y = x\xi * y\eta$, on aura

$$\Delta_i^{-1}\Delta_j = (x \times i \to x \times j)$$

et

$$\begin{aligned}\Delta_{i\eta}^{-1}\Delta_{j\eta} &= (u * i\eta \to u * j\eta) = (x\xi * i\eta \to x\xi * j\eta)\\ &= (x \times i \to x \times j) = \Delta_i^{-1}\Delta_j\,.\end{aligned}$$

Le calcul est le même à gauche.

THÉORÈME 3.7. *Le système demosien dérivé d'un groupoïde abélien en le soumettant à toutes les isotopies possibles est commutatif demosien fort.*

Preuve. Si G est un groupoïde abélien, les isotopies (ξ, η, ζ) et (η, ξ, ζ) le transforment en deux groupoïdes conjoints. A toute isotopie appliquée à G en correspond une autre (pouvant coïncider avec la première) et pour laquelle les deux isotopes obtenus sont conjoints. Ainsi, le système possède la commutativité forte. La réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant. Soit Q le quasigroupe du 5° ordre défini par ses translations à droite $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = (01)(234)$, $\Delta_2 = (04132)$, $\Delta_3 = (03124)$, $\Delta_4 = (02143)$. Par l'isotopie $(1, 1, (24))$, Q devient son propre conjoint Q'. Si l'on soumet Q et Q' à une commune isotopie on obtiendra deux quasigroupes conjoints et le système (Q, Φ) aura la commutativité forte. Pourtant aucun isotope de Q ne sera abélien. Il suffit pour s'en assurer d'examiner les isotopies $(1, \eta, 1)$; or aucune ne rend Q abélien. On a toutefois la condition.

THÉORÈME 3.8. *Pour que le système obtenu en soumettant un quasigroupe Q à toutes les isotopies admette la commutativité demosienne il faut et il suffit que, dans Q, les complexes relatifs aux translations à droite,* $(\cdots\Delta_i^{-1}\Delta_j\cdots)$ *et à gauche* $(\cdots\Gamma_i^{-1}\Gamma_j\cdots)$, *soient isomorphes.*[2]

Preuve. La condition est nécessaire. Dans toute isotopie, chacun des complexes reste évidemment isomorphe à lui-même. Si (E, Φ) est commutatif demosien, il contient, avec tout quasigroupe K, son conjoint K'. Soient G et D les complexes à gauche et à droite de K, G' et D' ceux de K'. On aura, puisque K et K' sont isotopes, $G \cong G'$, $D \cong D'$. Mais, d'autre part, K et K' étant conjoints, $G = D'$, $D = G'$, donc $D \cong G$.

Elle est suffisante. Soit S la permutation de l'ensemble Q qui projette le premier complexe sur le second. On peut d'abord par une isotopie $(\xi, 1, 1)$ s'arranger de manière que $\forall i, j,\ \Delta_i^{-1}\Delta_j \cong \Gamma_i^{-1}\Gamma_j$; en faisant alors l'isotopie $(1, 1, S)$, le nouveau complexe à gauche deviendra l'ancien complexe à droite. Une dernière isotopie de la forme $(1, \eta, 1)$ fournira le conjoint de Q.

COROLLAIRE 3.9. *L'ensemble des isotopes d'un groupe possède la commutativité demosienne.*

Car ses deux Cayleyens sont isomorphes.

Remarquons pour terminer que l'image d'un système demosien commutatif par une isotopie de la forme $(\xi, \eta = \xi, \zeta)$, appliquée à tous ses groupoïdes, est encore un système commutatif.

4. Loi des keys. DÉFINITION 4.1. *Un système* (E, Φ) *satisfait à la loi demosienne des keys* (à droite) *si la condition*

$$(4.1) \qquad \forall x, y \in E\,, \qquad \forall \varphi_1 \in \Phi\,, \qquad \exists \varphi_2 \in \Phi\,, \qquad (x\varphi_1 y)\varphi_2 y = x$$

est vérifiée. Cette loi apparaît pour la première fois dans Grassmann ([18], p. 37).

THÉORÈME 4.2. *Pour qu'un système* (E, Φ) *de quasigroupes à gauche satisfasse à la loi demosienne des keys* (*à droite*) *il faut et il suffit qu'il contienne, en même temps que tout quasigroupe* $Q = E(\times)$, *son réciproque* $Q' = E(\ominus)$, *défini par* $x \times y = z \rightleftarrows z \ominus y = x$, ([34], déf. 1.2). Pour les keys à gauche il faudrait $x \times y = z \rightleftarrows x \odot z = y$, ([34], déf. 1.5).

Preuve. En effet (4.1) est équivalente à $\forall x, y \in E$, $\forall \varphi_1 \in \Phi$, $\exists \varphi_2 \in \Phi$, $x\varphi_1 y = z \rightleftarrows z\varphi_2 y = x$. On démontre, comme pour 3.7 que, si un quasigroupe à gauche Q est self-réciproque le système dérivé de Q en le soumettant à toutes les isotopies possibles satisfait à la loi demosienne des keys. Enfin une conséquence du Théorème 3.8 est que, pour que l'ensemble des isotopes d'un quasigroupe Q satisfasse à la loi demosienne des keys (à droite) il faut et il suffit que Q soit parastrophique par $(x \times y = z \rightleftarrows x \odot z = y)$ d'un quasigroupe satisfaisant à la condition du Théorème 3.8. Car, soit $a\psi_i b = c \rightleftarrows a\varphi_i c = b$ et $x\psi_1 y = y\psi_2 x = z$; il en résultera $x\varphi_1 z = y$ et $y\varphi_2 z = x$, d'où, par élimination $(x\varphi_1 z)\varphi_2 z = x$. (Cf N°9.3)

5. Demi-symétrie. DÉFINITION 5.1. *Un système* (E, Φ) *de groupoïdes satisfait à la demi-symétrie demosienne si*

$$\forall x, y \in E\,, \qquad \forall \varphi_1 \in \Phi\,, \qquad \exists \varphi_2 \in \Phi\,, \qquad x\varphi_1(y\varphi_2 x) = y$$

([35], p. 153, N°2, équ. 11), ([34], déf. 18.7).

THÉORÈME 5.2. *Pour qu'un système* (E, Φ) *de quasigroupes à droite* ([34], N°1) *admette la demi-symétrie demosienne il faut et il suffit qu'il contienne, avec tout quasigroupe* $E(\varphi)$, *son parastrophique par* $a\varphi b = c \rightleftarrows b = c \oplus a$, ([34], déf. 1.4), *c'est à dire, avec chaque opération, sa division à gauche* ([11], p. 170).

Preuve. Soit $x\varphi_1 u = y$, donc $u = y \oplus x$; alors $x\varphi_1(y \oplus x) = y$, donc $y \oplus x = y\varphi_2 x$, $E(\varphi_2) = E(\oplus)$. Ainsi le système contient, avec tout quasigroupe à droite $E(\varphi_1)$, son parastrophique $E(\oplus)$. La réciproque est évidente.

On parvient au sujet de la demi-symétrie, à des conclusions analogues à celles des N°3 et 4.

6. **Inversibilité.**[3] DÉFINITION 6.1. ([41], p. 428, dans le cas fini). *Un système* (E, Φ) *admet l'inversibilité demosienne s'il satisfait à*

$$\forall x, y, z \in E\ , \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\ , \qquad \exists \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6 \in \Phi\ ,$$
$$(x\varphi_1 y)\varphi_2 z = (z\varphi_3 y)\varphi_4 x\ , \qquad x\varphi_1(y\varphi_2 z) = z\varphi_5(y\varphi_6 x)\ .$$

Les deux relations sont conjointes. La première est l'extension demosienne de la loi d'Abel-Grassmann ([35], p. 154, N°2, équ. 21).

EXEMPLE 6.2. Sur le corps Q des fractions rationnelles, le système des quasigroupes définis par $x\varphi y = ax + by + c$, $a, b, c \in Q$ est inversible demosien.

7. **Associativité.** DÉFINITION 7.1. *Un système* (E, Φ) *satisfait à l'associativité demosienne si la condition*

$$(7.1) \qquad \forall x, y, z \in E\ , \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\ , \qquad \exists \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6 \in \Phi\ ,$$
$$(x\varphi_1 y)\varphi_2 z = x\varphi_3(y\varphi_4 z)\ , \qquad x\varphi_1(y\varphi_2 z) = (x\varphi_5 y)\varphi_6 z$$

est vérifiée.

Pour approcher de la solution du problème posé par la construction de tels systèmes, on peut d'abord chercher les conditions auxquelles doivent satisfaire quatre groupoïdes pour être solution de (7.1). Cette équation a été étudiée par Evans [13], Belousov [6] et Hosszú [26]. Le premier a montré que, si les $E(\varphi)$ sont isotopes d'un groupoïde fini, avec élément neutre, ce groupoïde est associatif. Le troisième a donné la solution générale de (7.1) dans le cas où les φ sont des fonctions continues, différentiables, strictement monotones ([25], p. 212). Belousov a énoncé et Hosszú [26] a démontré que quatre quasigroupes satisfaisant (7.1) sont isotopes d'un même groupe, théorème que j'ai étendu aux multigroupoïdes [37]. Le théorème suivant donne une solution explicite générale de l'équation demosienne d'associativité lorsque les φ sont des fonctions arbitraires sur un ensemble quelconque, avec fonction inverse uniforme, c'est-à-dire dans le cas des quasigroupes. Cette solution reste valable—mais sans être générale—si les groupoïdes sont quelconques.

THÉORÈME 7.2. *Si E est un ensemble quelconque,* (i) *la solution générale de*

$$(7.2) \qquad \forall x, y, z \in E\,, \qquad (x\varphi_1 y)\varphi_2 z = x\varphi_3(y\varphi_4 z)\,,$$

où les φ sont des lois de quasigroupes, est

$$(\dot{\mathrm{I}})\begin{cases} x\varphi_1 y = x\xi \cdot y\theta\,, \\ x\varphi_2 y = (x \cdot y\lambda)\zeta^{-1}\,, \\ x\varphi_3 y = (x\xi \cdot y\eta)\zeta^{-1}\,, \\ x\varphi_4 y = (x\theta \cdot y\lambda)\eta^{-1}\,, \end{cases}$$

où $\xi, \eta, \zeta, \theta, \lambda$ sont cinq permutations arbitraires de E et $E(\cdot)$ un groupe défini sur E.

(ii) *Quatre groupoïdes quelconques, isotopes d'un même semigroupe $E(\cdot)$ par les isotopies* ($\dot{\mathrm{I}}$), *sont solution de* (7.2).

Preuve. Soient quatre quasigroupes définis sur le même ensemble E par les lois de composition $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ et satisfaisant à l'identité (7.2). Désignons la translation à droite, relative à l'élément a, dans le quasigroupe $E(\varphi_i)$ par Δ_a^i. Faisons décrire E à l'élément générique x et assignons des valeurs fixes, a et b, à y et z respectivement. L'égalité

$$(7.3) \qquad (x\varphi_1 a)\varphi_2 b = x\varphi_3(a\varphi_4 b)$$

s'écrit

$$(7.4) \qquad \Delta_a^1\Delta_b^2 = \Delta_c^3\,, \qquad (c = a\varphi_4 b)\,.$$

Dans (7.4) on peut maintenant supposer a constant et faire décrire à b tout le champ E; alors c, dans le quasigroupe $E(\varphi_4)$, décrira aussi tout l'ensemble E. Donc Δ_c^3 décrira la totalité des translations à droite du quasigroupe $E(\varphi_3)$. En recommençant le même processus à partir d'une autre valeur de $a \in E$, on devra obtenir, chaque fois, le même ensemble de valeurs de Δ_c^3, sans quoi les translations de $E(\varphi_3)$ ne seraient pas définies univoques. Les ensembles

$$\begin{matrix} \Delta_0^1\Delta_0^2, & \Delta_0^1\Delta_1^2, & \Delta_0^1\Delta_2^2, & \Delta_0^1\Delta_3^2, & \cdots, & \Delta_0^1\Delta_i^2, & \cdots \\ \Delta_1^1\Delta_0^2, & \Delta_1^1\Delta_1^2, & \Delta_1^1\Delta_2^2, & \Delta_1^1\Delta_3^2, & \cdots, & \Delta_1^1\Delta_i^2, & \cdots \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ \Delta_j^1\Delta_0^2, & \Delta_j^1\Delta_1^2, & \Delta_j^1\Delta_2^2, & \Delta_j^1\Delta_3^2, & \cdots, & \Delta_j^1\Delta_i^2, & \cdots \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \end{matrix}$$

où l'emploi des indices inférieurs ne signifie pas que ces ensembles soient dénombrables, seront tous identiques. Considérons le groupe symétrique total $\mathscr{S}_E$, et dans ce groupe les deux complexes

$$A = \Delta_0^1, \Delta_1^1, \Delta_2^1, \Delta_3^1, \cdots, \Delta_j^1, \cdots$$
$$B = \Delta_0^2, \Delta_1^2, \Delta_2^2, \Delta_3^2, \cdots, \Delta_i^2, \cdots.$$

D'après ce qui précède, si l'on multiplie à gauche le second complexe B par un élément quelconque Δ_j^1 du premier A, l'ensemble T des permutations obtenues doit rester le même $\forall \Delta_j^1$. Si l'on introduit les nouveaux complexes $C = P^{-1}A$, $D = BQ^{-1}$, $P \in A$, $Q \in B$, on aura par hypothèse

$$CD = P^{-1}ABQ^{-1} = P^{-1}TQ^{-1} .$$

Or C et D contiennent l'unité $P^{-1}P = QQ^{-1} = 1$ de $\mathscr{S}_E$, donc

$$C1 = C = P^{-1}TQ^{-1} , \qquad 1D = D = P^{-1}TQ^{-1}$$

et

$$P^{-1}TQ^{-1} = C = D = CD = CC .$$

Ainsi C est fermé, associatif (puisque c'est un sous ensemble de $\mathscr{S}_E$) et contient l'identique. C'est donc un semigroupe avec élément neutre, contenu dans $\mathscr{S}_E$. Les permutations Δ_a^0, éléments de C, sont les translations à droite d'un semigroupe isomorphe à C, $G = E(\varphi_0)$, avec $\Delta_a^0 = (x \to x\varphi_0 a)$. Donc

$$\exists S \in \mathscr{S}_E , \qquad x\varphi_1 y = x\Delta_y^1 = (xP)\Delta_{yS}^0 = (xP)\varphi_0(yS) , \tag{7.5}$$

ce qui exprime que $E(\varphi_1)$ est isotope de G par $(\xi = P,\ \eta = S,\ \zeta = 1)$ et $E(\varphi_1)$, étant un quasigroupe, G est donc un groupe. De même

$$\exists T \in \mathscr{S}_E , \qquad x\varphi_2 y = x\Delta_y^2 = (x\Delta_{yT}^0)Q = (x\varphi_0 yT)Q , \tag{7.6}$$

ce qui signifie que $E(\varphi_2)$ est isotope de G par $(\xi = 1,\ \eta = T,\ \zeta = Q^{-1})$. L'égalité (7.4) prend la forme $P\Delta_{aS}^0\Delta_{bT}^0Q = \Delta_c^3$,

$$P\Delta_{aS\varphi_0 bT}^0 Q = \Delta_{a\varphi_4 b}^3 . \tag{7.7}$$

Cela entraîne que $(aS\varphi_0 bT \to a\varphi_4 b)$ soit une permutation de E car, d'abord $a\varphi_4 b$ décrit tout le champ E, ensuite, d'après (7.5), $aS\varphi_0 bT$ décrit aussi tout l'ensemble E, enfin, si avec $aS\varphi_0 bT = a'S\varphi_0 b'T$ on avait $a\varphi_4 b \neq a'\varphi_4 b'$, il en résulterait $\Delta_{a'\varphi_4 b'}^3 = \Delta_{a\varphi_4 b}^3$; deux translations distinctes de $E(\varphi_3)$ coïncideraient et φ_3 ne serait plus une loi de quasigroupe. Le même argument est valable en renversant les rôles de φ_0 et de φ_4. On a donc

$$a\varphi_4 b = (aS\varphi_0 bT)R , \tag{7.8}$$

où R est une permutation de E, et $E(\varphi_4)$ est isotope de $E(\varphi_0)$ par ($\xi = S$, $\eta = T$, $\zeta = R^{-1}$). Maintenant (7.7) s'écrit

$$(7.9) \qquad \Delta^3_{cR} = P\Delta^0_c Q \ , \qquad x\varphi_3 cR = (xP\varphi_0 c)Q \ , \qquad x\varphi_3 y = (xP\varphi_0 yR^{-1})Q \ ,$$

ce qui exprime que $E(\varphi_3)$ est isotope de G par ($\xi = P$, $\eta = R^{-1}$, $\zeta = Q^{-1}$). En remplaçant φ_0 par $(\cdot)$ dans les relations (7.5), (7.6), (7.8), (7.9), elles prennent la forme ($\dot{\mathrm{I}}$) de l'énoncé. On vérifie immédiatement que la condition ($\dot{\mathrm{I}}$) est suffisante, même si les $E(\varphi)$ sont des groupoïdes quelconques, pourvu que $E(\cdot)$ soit associatif, ce qui établit (ii).

Exemple 7.3. Sur l'anneau Z des entiers rationnels tous les groupoïdes $x\varphi_i y = x + y + i$ sont des groupes. Si l'on suppose i etj compris entre deux entiers fixes, l'ensemble obtenu aura l'associativité demosienne avec $(x\varphi_i y)\varphi_j z = x\varphi_{i\pm h}(y\varphi_{j\mp h}z)$.

Exemple 7.4. Soit le semigroupe $x \cdot y = x + y$ sur l'ensemble N^+ des entiers naturels; il ne possède ni inverse, ni élément neutre, mais les quatre isotopes $x\varphi_1 y = ax + y$, $x\varphi_2 y = b(x + y)$, $x\varphi_3 y = b(ax + y + c)$, $x\varphi_4 y = x + y - c$, où $a, b, c \in N^+$, vérifient l'équation (7.2).

Exemple 7.5. Sur l'anneau Z/n (et dans tout champ de Galois), l'ensemble des quasigroupes $x\varphi y = ax + by + c$, $(a, n) = (b, n) = 1$, est associatif demosien (Il est aussi reversible). Cet ensemble contient $n[\varphi(n)]^2$ quasigroupes, $\varphi(n)$ étant l'indicateur d'Euler.

Remarque 7.6. Pour obtenir toutes les solutions de (7.2) il faut faire parcourir à G l'ensemble de tous les groupes $G = E(\cdot)$, que l'on peut construire sur E. Si deux d'entre eux sont isomorphes, ($G' = G_T$) les formules ($\dot{\mathrm{I}}$) donneront des solutions isomorphes par T. Par conséquent les formes ($\dot{\mathrm{I}}'$)

$$(\dot{\mathrm{I}}') \qquad \begin{aligned} x\varphi_1 y &= (x\xi \cdot y\theta)\mu^{-1} \ , \\ x\varphi_2 y &= (x\mu \cdot y\lambda)\zeta^{-1} \ , \\ x\varphi_3 y &= (x\xi \cdot y\eta)\zeta^{-1} \ , \\ x\varphi_4 y &= (x\theta \cdot y\lambda)\eta^{-1} \ , \end{aligned}$$

ne sont pas plus générales que ($\dot{\mathrm{I}}$).

Théorème 7.7. *Tout système (E, Φ) de groupoïdes satisfaisant aux axiomes,*

(i) *associativité demosienne deux côtés,*
(ii) *élément neutre,*
(iii) *inverse, se réduit à un seul groupe.*

Preuve. Par hypothèse

$$\forall\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\ , \quad \forall x, y, z \in E\ , \quad \exists\varphi_3, \varphi_4 \in \Phi\ , \quad (x\varphi_1 y)\varphi_2 z = x\varphi_3(y\varphi_4 z)\ ,$$
$$\forall\varphi_3, \varphi_4 \in \Phi\ , \quad \forall x, y, z \in E\ , \quad \exists\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\ , \quad (x\varphi_1 y)\varphi_2 z = x\varphi_3(y\varphi_4 z)\ .$$

Il existe au moins un élément neutre à gauche, le même pour tous les groupoïdes, $\forall\varphi \in \Phi$, $\forall x \in E$, $\exists e \in E$, $e\varphi x = x$.

Parmi les e il y en a au moins un tel que chaque élément x de E ait un, ou plusieurs, inverses à gauche, dans tous les groupoïdes, ne dépendant que de x

$$\forall\varphi \in \Phi\ , \qquad \forall x \in E\ , \qquad \exists e, \bar{x} \in E\ , \qquad \bar{x}\varphi x = e\ .$$

(A) Soit $e\varphi a = a$, $\bar{x}\varphi x = e$. Multiplions à droite, les deux membres de la seconde égalité par e, $(\bar{x}\phi x)\varphi_1 e = e\varphi_1 e = e = \bar{x}\varphi x$, donc $(\bar{x}\varphi x)\varphi_1 e = \bar{x}\varphi x$. Par l'associativité demosienne,

$$\bar{x}\varphi x = (\bar{x}\varphi x)\varphi_1 e = \bar{x}\varphi_2(x\varphi_3 e)\ .$$

Posons $y\varphi\bar{x} = e$ et multiplions les deux membres de l'égalité précédente par y, à gauche

$$y\varphi_4(\bar{x}\varphi x) = y\varphi_4[\bar{x}\varphi_2(x\varphi_3 e)]\ ,$$

appliquant l'associativité, $(y\varphi_7\bar{x})\varphi_8 x = (y\varphi_5\bar{x})\varphi_6(x\varphi_3 e)$, ou $e\varphi_8 x = e\varphi_6(x\varphi_3 e)$, et enfin $x = x\varphi_3 e$. Mais, plus haut, φ_3 a été défini par $(a\varphi b)\varphi_1 c = a\varphi_2(b\varphi_3 c)$. L'associativité demosienne étant supposée bilatère, (i), $\forall\varphi_2, \varphi_3 \in \Phi$, $\exists\varphi_1, \varphi \in \Phi$, donc $x\varphi_3 e = x$ est varie quelque soit φ_3. Ainsi e est élément neutre à droite. Si maintenant e et $é$ sont deux éléments neutres, $e\varphi é = e = é$; donc tous les éléments neutres sont égaux et l'unité est unique et bilatère.

(B) Multiplions les deux membres de $\bar{x}\varphi x = e$ par $\bar{x}$; on a $(\bar{x}\varphi x)\varphi_1\bar{x} = e\varphi_1\bar{x} = \bar{x}$. En appliquant l'associativité, $\bar{x}\varphi_2(x\varphi_3\bar{x}) = \bar{x}$. Posons $x'\varphi\bar{x} = e$ et multiplions les deux membres de la dernière égalité par x', à gauche, $x'\varphi_4[\bar{x}\varphi_2(x\varphi_3\bar{x})] = x'\varphi_4\bar{x}$, ou $(x'\varphi_5\bar{x})\varphi_6(x\varphi_3\bar{x}) = e$, ou $e\varphi_6(x\varphi_3\bar{x}) = e$, enfin $x\varphi_3\bar{x} = e$. Mais φ_3 est défini plus haut par $(a\varphi b)\varphi_1 c = a\varphi_2(b\varphi_3 c)$, où $\forall\varphi_2, \varphi_3 \in \Phi$, $\exists\varphi, \varphi_1 \in \Phi$; donc $\bar{x}$ est aussi inverse à droite de x dans tous les groupoïdes et tout inverse à gauche est aussi inverse à droite.

(C) Soit $x\varphi_1\bar{x} = e$ et $x'\varphi_2 x = e$; on a $(x'\varphi_2 x)\varphi_1\bar{x} = x'\varphi_3(x\varphi_4\bar{x})$, ou $e\varphi_1\bar{x} = x'\varphi_3 e$; $\bar{x} = x'$, finalement $\forall\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, $x\varphi_1 x' = x'\varphi_2 x = e$, et tout élément est permutable avec son inverse.

(D) Soit $x\varphi_1 y = z$ et y^{-1} l'inverse de y; alors $(x\varphi_1 y)\varphi_2 y^{-1} = x\varphi_3(y\varphi_4 y^{-1}) = x\varphi_3 e = x$. Ainsi $\forall\varphi_2 \in \Phi$, $z\varphi_2 y^{-1} = x$. Le produit de deux éléments quelconques z et y^{-1} étant égal à x, et par conséquent étant le même dans tous les groupoïdes $E(\varphi_2)$ il s'en suit que tous ces groupoïdes coïncident. Le système se réduit à un seul groupoïde, qui est un groupe.

8. Distributivité. DÉFINITION 8.1. *Un système* (E, Φ) *satisfait à la distributivité demosienne à droite* (généralisation de [22]), *si* $\forall x, y, z \in E$, $\forall \varphi_i, \varphi_j \in \Phi$, $\exists \varphi_k, \varphi_m, \varphi_p \in \Phi$, $(i, j, k, m, p = 1, 2, 3, 4, 5)$

$$(8.1) \qquad (x\varphi_1 y)\varphi_2 z = (x\varphi_3 z)\varphi_4(y\varphi_5 z) .$$

(Définition symétrique à gauche). *Le système est self-distributif si* $\varphi_3 = \varphi_5 = \varphi_2$, $\varphi_1 = \varphi_4$ *et si* $\forall \varphi_1, \exists \varphi_2$.

THÉORÈME 8.2. *Si un système* (E, Φ) *de quasigroupes à gauche est distributif demosien à droite,*

(i) *l'ensemble des réciproques de ces quasigroupes est encore distributif à droite,*

(ii) *l'ensemble des conjoints est distributif à gauche.*

Preuve. (i) Posons $x\varphi_3 z = c$, $y\varphi_5 z = d$, $c\varphi_4 d = b$, $x\varphi_1 y = a$, $a\varphi_2 z = b$. Sur le réciproque, en représentant les nouveaux signes opératoires par ψ, on aura $a\psi_1 y = x$, $b\psi_2 z = a$, $c\psi_3 z = x$, $d\psi_5 z = y$, $b\psi_4 d = c$. Egalant les expressions de x, on a $a\psi_1 y = c\psi_3 z$. Remplaçant a, y et c par leur valeur, $(b\psi_2 z)\psi_1(d\psi_5 z) = (b\psi_4 d)\psi_3 z$. Comme, par hypothèse, deux des φ déterminent les trois autres, il en est de même des ψ et le système (E, Ψ) est encore distributif demosien à droite.

(ii) En représentant par θ les opérations conjointes, on aura, sur le conjoint de (E, Φ), $(z\theta_5 y)\theta_4(z\theta_3 x) = z\theta_2(y\theta_1 x)$.

EQUATION FONCTIONNELLE 8.3. Hosszú ([23], p. 160), envisage l'équation fonctionnelle $F[G(x, y), z] = G[F(x, z), F(y, z)]$, où x, y, z appartiennent à un corps. On peut se proposer de trouver deux groupoïdes $E(\times)$ et $E(\cdot)$, définis sur un même ensemble quelconque E, de manière que

$$(8.2) \qquad \forall x, y, z \in E , \qquad (x \times y) \cdot z = (x \cdot z) \times (y \cdot z) .$$

Par exemple, l'un des groupoïdes étant arbitraire, l'équation sera vérifiée si l'autre satisfait à la loi de translation identique $xy = x$ ([35], p. 153, N°2, équ. 9).

THÉORÈME 8.4. *Etant donné un groupoïde arbitraire* $E(\times)$, *on obtient une solution de l'équation* (8.2) *en prenant pour chacune des translations* Δ_z *de* $E(\cdot)$ *un endomorphisme quelconque de* $E(\times)$.

Preuve. Considérons z comme une constante sur $E(\cdot)$ et soit

$$\Delta_z = (x \to f(x)) = (x \to x \cdot z)$$

la translation relative à z. L'équation (8.2) devient $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$, ce qui définit un endomorphisme de $E(\times)$; ainsi chaque Δ_z est un endomorphisme de $E(\times)$.

EXEMPLE 8.5. Soit sur $Z/3$ le groupe $x \times y = x + y + 1$. Les séries de produits à droite ([33], p. 87), sont (00121102) et (2), les seuls automorphismes sont l'identique et la transposition (01). En se bornant aux quasigroupes à gauche on pourra prendre $\Delta = 1$ ou (01), ce qui donnera huit solutions $E(\cdot)$.

EXEMPLE 8.6. En prenant pour $E(\times)$ un quasigroupe automorphe par le groupe cyclique ([30], p. 321), on pourra prendre pour $E(\cdot)$ le groupe cyclique et chacun de ses isotopes de la forme $(1, \eta, 1)$, avec η arbitraire. Ainsi en prenant ([30], p. 325, ex. 15), on a $13 \times 7 = 11$; $(13 \times 7) \cdot 4 = 11 + 4 = 0$; $13.4 = 2$; $7.4 = 11$; $2 \times 11 = 0$.

EXEMPLE 8.7. En prenant pour $E(\times)$ un groupoïde "endo" ([32], p. 297, N°3), c'est-à-dire satisfaisant, sur un ensemble E de nombres réels, à $x \times y = z \Rightarrow xm \times ym = zm$, la solution $E(\cdot)$ sera fournie par le semigroupe multiplicatif de E. Ainsi, en prenant ([32], p. 298, Ex. II), on a $5 \times 4 = 2$; $2.3 = 6$ et $5.3 = 1$; $4.3 = 5$; $1 \times 5 = 6$.

COROLLAIRE 8.7. *L'ensemble des quasigroupes à gauche construits sur un même ensemble E satisfait à la distributivité demosienne restreinte*

$$(8.3) \quad \forall x, y, z \in E\,, \quad \forall \varphi_1 \in \Phi\,, \quad \exists \varphi_2 \in \Phi\,, \quad (x\varphi_1 y)\varphi_2 z = (x\varphi_2 z)\varphi_1(y\varphi_2 z)\,.$$

Preuve. On a vu, N°8.4, que, si $E(\varphi_1)$ est un groupoïde quelconque sur E, il existe toujours au moins un groupoïde $E(\varphi_2)$, satisfaisant (8.3) et dont les translations sont des endomorphismes de $E(\varphi_1)$. Si $E(\varphi_1)$ est un quasigroupe à gauche quelconque, les translations pourront être choisies parmi les automorphismes de $E(\varphi_1)$; ce seront alors des permutations de E et $E(\varphi_2)$ sera encore un quasigroupe à gauche.

9. Parastrophies. DÉFINITION 9.1. *Le i-parastrophique d'un système demosien (E, Φ) est le système dérivé du premier en soumettant tous les groupoïdes de (E, Φ) à la même i-parastrophie.* Ainsi le conjoint d'un système est le système formé par les conjoints de tous ses groupoïdes; le réciproque d'un système de quasigroupes à gauche est l'ensemble des réciproques de ces quasigroupes, etc. Si (E, Φ) ne contient que des quasigroupes, il pourra prendre six formes parastrophiques.

THÉORÈME 9.2. *Si (E, Ψ) est le conjoint de (E, Φ), il sera en même temps que lui, commutatif, associatif, inversible bilatère, self-distributif* *bilatère demosien.*

Preuve. Si (E, Φ) a la commutativité demosienne (N°3.1)

$$\forall x, y \in E\,, \qquad \forall \varphi_1 \in \Phi\,, \qquad \exists \varphi_2 \in \Phi\,, \qquad x\varphi_1 y = y\varphi_2 x\,.$$

En désignant par ψ les opérations conjointes ([34], N°6),

$$\forall x, y \in E\,, \qquad \forall \psi_1 \in \Psi\,, \qquad \exists \psi_2 \in \Psi\,, \qquad x\psi_2 y = y\psi_1 x\,,$$

donc (E, Ψ) est encore commutatif demosien.

Si (E, Φ) est associatif demosien (N°7.1)

$$\forall x, y, z \in E\,, \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\,, \qquad \exists \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\,,$$
$$(x\varphi_1 y)\varphi_2 z = x\varphi_3(y\varphi_4 z)\,; \qquad x\varphi_1(y\varphi_2 z) = (x\varphi_5 y)\varphi_6 z\,.$$

Donc, sur le système conjoint $(z\psi_4 y)\psi_3 x = z\psi_2(y\psi_1 x)$, et $z\psi_6(y\psi_5 x) = (z\psi_2 y)\psi_1 x$. Ainsi (E, Ψ) est encore associatif demosien.

Le cas de l'inversibilité est analogue; celui de la distributivité résulte de 8.2. On rapprochera ce résultat de ([34], N°14–16). Plus généralement, on verrait que, si $(\dot{\mathrm{I}})$ est une identité self-conjointe ([34], N°19.1), sur un groupoïde, les systèmes (E, Φ) et (E, Ψ) possèdent en même temps la propriété $\dot{\mathrm{I}}$-demosienne.

THÉORÈME 9.3. *Si un système S de quasigroupes satisfait à une identité demosienne, le système dérivé de S en transformant tous les quasigroupes par une même parastrophie satisfait à une identité demosienne dérivée de la première par la même parastrophie.*

Preuve. Supprimons les indices dans les signes opératoires φ_i et ne conservons que les parenthèses, crochets etc, ce qui est évidemment légitime au point de vue formel. Dès lors les calculs qu'il faut effectuer pour trouver ce que devient la relation R demosienne en passant au i-parastrophique, sont précisément ceux que l'on ferait pour passer de la relation R sur un seul quasigroupe à sa i-parastrophique. Soit par exemple un système de quasigroupes à gauche satisfaisant à l'associativité demosienne; on trouve que le systéme réciproque satisfait à la trasitivité demosienne ([24], p. 203, [35], p. 156, N°2, iv, équ. 63). Or la transitivité usuelle est bien réciproque de l'associativité ([35], p. 154, N°2, équ. 25).

Ainsi, *tout système S de quasigroupes à gauche possédant la transitivité demosienne se déduit d'un système associatif S' en remplaçant chaque quasigroupe de S' par son réciproque.* Or S' se compose (ci dessus, Théorème 7.2, [37]), de quasigroupes isomorphes à un groupe G'. Donc S *se compose de quasigroupes isotopes au réciproque d'un* *groupe.* On comparera ce résultat à la solution directe donnée dans [38]. Si G est lui-même un groupe, alors il satisfait à la fois à $(xt)(yt) = xy$ et à l'associativité, donc en faisant $t = y$, on a $(xy)(yy) = xy$, $y^2 = 1$ et tous les les éléments de G sont du second ordre. On obtient le théorème ci-après 22.2. De même *si (E, Φ) est un système commutatif demosien de quasigroupes et si l'on remplace chaque quasigroupe par son réciproque, le nouveau système satisfera à la loi demosienne des keys à gauche* ([35], p. 153, N°2, équ. 5). Soit

$$x\varphi_1 y = z \rightleftarrows z\psi_1 y = x \text{ et } y\varphi_2 x = z \rightleftarrows z\psi_2 x = y\,;$$

alors

$$(\forall \varphi_1 \in \Phi\ ,\ \exists \varphi_2 \in \Phi\ ,\ y\varphi_2 x = x\varphi_1 y) \rightleftarrows$$
$$(\forall \psi_1 \in \Psi\ ,\ \exists \psi_2 \in \Psi\ ,\ z\psi_1(z\psi_2 x) = x)\ .$$

Enfin les conditions exprimant qu'un système satisfait à la commutativité, ou à la loi des keys à gauche démosiennes, doivent être réciproques, au sens des parastrophies. Et en effet, la première (N°3.1) est que le système contienne, avec tout quasigroupe, son conjoint; la seconde (Th. 4.2, in fine), que le système contienne, avec tout quasigroupe, son parastrophique par

$$x \times y = z \leftrightarrows x \odot z = y\ . \tag{9.1}$$

Or si l'on a $xy = z$ et $yx = z$, cela devient, sur les réciproques $zy = x$ et $zx = y$, ce qui est bien la parastrophie (9.1).

COROLLAIRE 9.4. *Si une relation R est self-i-parastrophique et si un système $S(E, \Phi)$ de quasigroupes satisfait à la relation R-demosienne, le système i-parastrophique S' de S satisfera encore à la relation R-demosienne.*

Cela résulte immédiatement du théorème 9.3. Par exemple si un système de quasigroupes satisfait à l'entropie demosienne ([35], p. 155, N°2, équ. 38),

$$\forall x, y, z, u \in E\ , \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \Phi\ , \qquad \exists \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6 \in \Phi\ ,$$
$$(x\varphi_1 y)\varphi_2(z\varphi_3 u) = (x\varphi_4 z)\varphi_5(y\varphi_6 u)\ ,$$

alors tous les parastrophiques de ce système satisferont à l'entropie demosienne, puisque tous les parastrophiques d'un quasigroupe entropique, comme le montre un calcul immédiat, sont eux-mêmes entropiques.

10. Immersion. Etant donné un système demosien (E, Φ) est il possible de le plonger dans un système admettant quelque loi demosienne determinée? La réponse à cette question dépend de la nature de cette loi. Il est clair que tout système peut être immergé dans un système demosien commutatif. D'après le Théorème 7.2, pour qu'un ensemble de quasigroupes puisse être un sous-ensemble d'un système associatif demosien il faut que chaque quasigroupe de cet ensemble puisse être obtenu comme isotope de quelque groupe par $x\xi \cdot y\theta = x\varphi_1 y$. Or ce que l'on sait, par exemple, des quasigroupes du 5° ordre, ([35], N°25) suffit à montrer qu'il existe des quasigroupes qui ne sont isotopes d'aucun groupe. Donc, *on ne peut plonger, en général, un système donné dans un système associatif demosien.* En revanche, il pourra être intéressant d'étudier le nucleus [27] formé par tous les $E(\varphi)$ d'un système demosien (E, Φ) qui satisfont localement à une loi déterminée.

11. Associateur. DÉFINITION 11.1. *L'associateur à gauche d'un système $S(E, \Phi)$ de groupoïdes est un sous-ensemble $A \subseteq E$, satisfaisant aux deux conditions*:

$$\forall a \in A\,, \quad \forall x, y \in E\,, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\,, \quad \exists \varphi_3, \varphi_4 \in \Phi\,,$$
$$(a\varphi_1 x)\varphi_2 y = a\varphi_3(x\varphi_4 y)\,;$$
$$\forall a, b \in A\,, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\,, \quad a\varphi_1 b = a\varphi_2 b\,.$$

THÉORÈME 11.2. *L'associateur à gauche d'un système demosien quelconque est un semigroupe,* (sous-groupoïde commun à tous les groupoïdes du système).

Preuve. Soient $a, b \in A$, alors

$$\forall x, y \in E\,, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\,, \quad \exists \varphi_3, \varphi_4 \in \Phi\,,$$
$$(a\varphi_1 x)\varphi_2 y = a\varphi_3(x\varphi_4 y)\,; \qquad (b\varphi_1 x)\varphi_2 y = b\varphi_3(x\varphi_4 y)\,.$$

Considérons le produit $a\varphi b$, $(\varphi \in \Phi)$. On aura

$$\begin{aligned}[(a\varphi b)\varphi_1 x]\varphi_2 y &= [a\varphi_3(b\varphi_4 x)]\varphi_2 y = a\varphi_5[(b\varphi_4 x)\varphi_6 y] = a\varphi_5[b\varphi_7(x\varphi_8 y)] \\ &= (a\varphi_9 b)\varphi_{10}(x\varphi_8 y) = (a\varphi b)\varphi_{10}(x\varphi_8 y)\,.\end{aligned}$$

Donc $a\varphi b \in A$ et A est fermé dans chacun des groupoïdes du système. D'ailleurs

$$(a\varphi_1 b)\varphi_2 c = a\varphi_3(b\varphi_4 c)\,, \qquad \forall a, b, c \in A\,, \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\, \varphi_4 \in \Phi;$$

donc, en particulier $(a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c)$ et A est un semigroupe.

12. Multigroupoïde. DÉFINITION 12.1. *Un multigroupoïde* ([37], [12], p. 183), *est un ensemble, E, muni d'une loi de composition* $(\ast)$, *faisant correspondre à tout couple ordonné $x, y \in E$, un sous-ensemble non vide, $x \ast y = (a, b, c \cdots) \subseteq E$.*

THÉORÈME 12.2. (i) *Tout système demosien S définit un multi-*

groupoïde, M, dans lequel le produit $x \ast y$ est déterminé comme étant l'ensemble $(x\varphi_1 y, x\varphi_2 y, \cdots, x\varphi_i y, \cdots)$ où φ_i décrit Φ.

(ii) *Pour que M soit associatif il faut et il suffit que le système S ait l'associativité demosienne.*

(iii) *Pour que M soit abélien il faut et il suffit que S ait la commutativité demosienne.*

Preuve. Si M est associatif, on a $(x \ast y) \ast z = x \ast (y \ast z)$. Donc

$$(12.1) \qquad \forall i, j,\ \exists k, m \text{ et } \forall k, m\ \exists i, j\ , \qquad (x\varphi_i y)\varphi_j z = x\varphi_k(y\varphi_m z)$$

et S possède l'associativité demosienne. Réciproquement, si le système S est associatif demosien, (12.1) est vérifiée, donc

$$(x \ast y) \ast z \subseteq x \ast (y \ast z) \subseteq (x \ast y) \ast z \text{ et } (x \ast y) \ast z = x \ast\ (y \ast z)\ .$$

La preuve est analogue pour la commutativité. Plus généralement, le multigroupoïde M satisfera à une identité $(\dot{\mathrm{I}})$ en même temps que le système S vérifiera l'identité $(\dot{\mathrm{I}})$-démosienne.

CHAPITRE II

INTERACTION DES LOIS DEMOSIENNES

13. Question. Lorsqu'un groupoïde G satisfait à une ou plusieurs identités, $I, I', \cdots$, il est bien connu ([25], p. 205, équ. 2, $a(bc) = c(ba)$ entraîne l'entropie; [28], $ab = ba$, $(ab)x = (ax)(bx)$, sur un ensemble ordonné à multiplication monotone, entraîne l'entropie; [35], p. 161, N°8, IV, keys et commutativité, N°35 & 36), que, dans certains cas, il existe une nouvelle identité J, conséquence des $I, I', \cdots$, et qui est encore vérifiée sur G. Si un système (E, Φ) satisfait à diverses lois demosiennes, $I, I', \cdots$, cette situation entraîne-*t*-elle, comme dans le cas d'un seul groupoïde, l'existence d'une nouvelle loi demosienne, J, conséquence des $I, I', \cdots$, qui soit encore vérifiée sur (E, Φ)? Dans l'affirmative, la relation $J = f(I, I', \cdots)$ est-elle la même pour un groupoïde isolé et pour un système (E, Φ)? La réponse à cette question ne peut pas être formulée d'une manière générale. Il peut arriver (N°14.2–14.3) qu'elle dépende de conditions supplémentaires à imposer au système et même que le transfert d'une implication du cas uniforme au cas demosien ne soit pas possible. Ainsi, contrairement à ce qui se passe pour un quasigroupe isolé ([8], p. 112), la self-distributivité demosienne n'entraîne pas l'idempotence, comme le montre l'exemple 7.5. Les quasigroupes $x\varphi y = ax + by + c$ ne sont pas idempotents et ils satisfont néanmoins à l'identité demosienne $\forall\varphi_1,\ \exists\varphi_2,\ x\varphi_1(y\varphi_z z) = (x\varphi_1 y)\varphi_2(x\varphi_1 z)$. La solution est $x\varphi_2 y = px + (1-p)y$.

De même, le théorème de Knaster [28], à savoir qu'un quasigroupe abélien self distributif G, muni d'une relation d'ordre total et d'une multiplication strictement monotone ([14], p. 306) est entropique, ne se laisse pas transmettre au cas des systèmes demosiens. Observons ici que, pour la validité du théorème, la condition que G est un quasigroupe peut être affaiblie et remplacée par cancellabilité de G, condition qui est d'ailleurs entraînée par la stabilité de la relation d'ordre; l'idempotence, puis l'entropie en résultent ensuite, sans considération de continuité. On peut poser cette question:

Le seul systéme demosien sur lequel le théorème de Knaster puisse être transféré se réduit-il à un groupoïde unique?

Dans ce qui suit nous nous bornerons à l'étude de quelques lois particulières.

14. Commutativité-Associativité-Inversibilité.[4] THÉORÈME 14.1. *Si* (E, Φ) *est commutatif demosien, pour qu'il ait l'associativité demosienne il faut et il suffit qu'il soit inversible demosien.* ([41] dans le cas fini).

Preuve. (i) Si le système est associatif et commutatif, on aura

$$\forall x, y, z \in E\,, \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\,, \qquad (x\varphi_1 y)\varphi_2 z = x\varphi_3(y\varphi_4 z) = (z\varphi_5 y)\varphi_6 x\,,$$
$$x\varphi_1(y\varphi_2 z) = (x\varphi_7 y)\varphi_8 z = z\varphi_9(y\varphi_{10} x)\,,$$

où $\varphi_3, \varphi_4, \cdots, \varphi_{10}$ sont des éléments déterminés de Φ. Ainsi (E, Φ) est inversible des deux côtés.

(ii) Réciproquement, si (E, Φ) est inversible et commutatif on aura

$$\forall x, y, z \in E\,, \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\,, \qquad \exists \varphi_5, \varphi_6, \cdots, \varphi_{10}\,,$$
$$(x\varphi_1 y)\varphi_2 z = z\varphi_3(y\varphi_4 x) = x\varphi_5(y\varphi_6 z)\,; \quad x\varphi_1(y\varphi_2 z) = (z\varphi_7 y)\varphi_8 x = (x\varphi_9 y)\varphi_{10} z$$

et le système sera associatif demosien.

THÉORÈME 14.2. *Si un semigroupe inversible* S (au sens du N°6), *satisfait à l'une des conditions suivantes,*

(i) *S est homogène,*
(ii) *S est diagonal,*
(iii) *S est un quasigroupe à droite,*
(iv) *S est idempotent,*
(v) *S a un élément neutre bilatère,*

alors il est abélien.

Preuve. (i) S étant homogène, tout élément x peut être obtenu comme un produit $x = ay$; à son tour, y peut être mis sous la forme $y = bc$, d'où $x = abc$. On a alors, z étant un élément quelconque,

$$xz = abcz = (ab)(c)(z) = (z)(c)(ab) = z(ca)b = b(ca)z$$
$$= (bc)(a)(z) = (z)(a)(bc) = z(abc) = zx\,, \qquad \forall x, z\,.$$

(ii) $\forall x, y,\ xyy = yyx$, ou $x(yy) = (yy)x$. On tire d'abord de là que, dans tout semigroupe inversible (au sens du N°6), *l'ensemble des* (xx), c'est-à-dire la diagonale, *est contenu dans le centre*. Si S est diagonal, cet ensemble coïncide avec S et S est abélien.

(iii) On a $\forall x, y,\ (xy)(xy) = (x)(y)(xy) = (xy)(y)(x)$, cancellant par xy à gauche, $xy = yx$.

(iv) résulte de (ii) car l'idempotence entraîne la diagonalité.

(v) Si u est l'unité, on a $xyu = uyx$, ou $xy = yx$.

Chacune de ces conditions est d'ailleurs une conséquence de la première car tout groupoïde diagonal, ou avec quotient à droite, ou idempotent, ou avec unité bilatère est nécessairement homogène. Elles sont toutes suffisantes, mais aucune n'est nécessaire, comme le montre l'exemple du semigroupe additif, N^+, des entiers naturels, qui n'est pas homogène et qui est tout de même abélien. Quelques-unes des conditions précédentes se laissent transférer aux systèmes demosiens; ce sont (ii), (iv) et (v).

THÉORÈME 14.3. *Si tous les groupoïdes d'un système* (E, Φ) *possédant l'associativité et l'inversibilité demosiennes, satisfont à l'une des conditions suivantes*: (ii) *ils sont diagonaux et ont la même diagonale*, $(\forall i, j,\ x\varphi_i x = x\varphi_j x)$, (iv) *ils sont idempotents*, (v) *ils ont une unité bilatère commune, alors* (E, Φ) *aura la commutativité demosienne.*

Preuve. (ii) Par hypothèse $\forall x, y, z \in E$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, $\exists \varphi_3, \varphi_4, \cdots \in \Phi$, $(x\varphi_1 y)\varphi_2 z = x\varphi_3(y\varphi_4 z) = z\varphi_5(y\varphi_6 x)$. Si $x = y$, $x\varphi_1 x = x\varphi_6 x = t$ et $t\varphi_2 z = z\varphi_5 t$. Comme tous les groupoïdes sont diagonaux, $\forall t$, $\exists x$, $x\varphi x = t$, donc (E, Φ) a la commutativité demosienne.

(iv) résulte de (ii).

(v) Si u est élément neutre dans tous les groupoïdes, on a $\forall x, y \in E$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, $\exists \varphi_3, \varphi_4, \cdots \in \Phi$, $(x\varphi_1 y)\varphi_2 u = x\varphi_3(y\varphi_4 u) = u\varphi_5(y\varphi_6 x)$, d'où $x\varphi_1 y = y\varphi_6 x$.

QUESTION 14.4. *Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que, sur un système* (E, Φ), *l'associativité et l'inversibilité demosiennes entraînent la commutativité demosienne?*

15. Distributivité. THÉORÈME 15.1. *Tout système* (E, Φ) *associatif et commutatif demosien, dont tous les groupoïdes sont idempotents, possède la distributivité demosienne.*

Preuve. Par hypothèse $\forall x, y, z \in E$, $\forall \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \in \Phi$, $\exists \varphi_1, \varphi_2, \varphi_6, \cdots \in \Phi$, $(x\varphi_3 z)\varphi_4(y\varphi_5 z) = x\varphi_6[z\varphi_7(y\varphi_5 z)] = x\varphi_6[z\varphi_7(z\varphi_8 y)] = x\varphi_6[(z\varphi_9 z)\varphi_{10} y] = x\varphi_6(z\varphi_{10} y) = x\varphi_6(y\varphi_{11} z) = (x\varphi_1 y)\varphi_2 z$.

16. Keys, transitivité, eingewandter Produkt. THÉORÈME 16.1. *Sur un système (E, Φ) de quasigroupes à gauche, de ces trois lois:*

(i) *la loi demosienne des keys à droite* ([35], p. 153, N°2, équ. 4) & N°4,

$$(16.1) \qquad \forall z, y \in E\,, \quad \forall \varphi_5 \in \Phi\,, \quad \exists \varphi_6 \in \Phi\,, \quad (z\varphi_5 y)\varphi_6 y = z\,;$$

(ii) *la transitivité demosienne* ([35], p. 154, N°2, équ. 25) & N° 9.3, supra,

$$(16.2) \qquad \forall x, y, z \in E\,, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\,, \quad \exists \varphi_3, \varphi_4\,, \quad (x\varphi_1 y)\varphi_2(z\varphi_3 y) = x\varphi_4 z\,.$$

(iii) *le "eingewandte Produkt"* ([35], p. 154, N°2, équ. 22)

$$(16.3) \qquad \forall x, y, t \in E\,, \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi, \ \exists \varphi_3, \varphi_5 \in \Phi, \ (x\varphi_1 y)\varphi_2 t = x\varphi_4(t\varphi_5 y)\,,$$

chacune des deux dernières est entraînée par les deux autres.

Preuve. A. Soit un système (E, Φ) satisfaisant (i) et (ii). La première (N°4), exprime que les quasigroupes du système sont deux à deux réciproques; donc $\forall \varphi_3$, $\exists \varphi_7$, $z\varphi_3 y = t \rightleftarrows t\varphi_7 y = z$. Alors (16.2) devient, $\forall x, y, t \in E$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, $\exists \varphi_4, \varphi_7 \in \Phi$, $(x\varphi_1 y)\varphi_2 t = x\varphi_4(t\varphi_7 y)$, ce qui est (iii). Ainsi (i) $\cap$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

B. Supposons (i) et (iii) vérifiées. Comme ci-dessus, (i) exprime que $\forall t, y \in E$, $\forall \varphi_3 \in \Phi$, $\exists \varphi_5 \in \Phi$, $z \in E$, $t = z\varphi_3 y \leftrightarrows t\varphi_5 y = z$; Dès lors (iii) devient $\forall x, y, z \in E$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, $\exists \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \cdots \in \Phi$, $(x\varphi_1 y)\varphi_2(z\varphi_3 y) = x\varphi_4 z$. Ainsi (i) $\cap$ (iii) $\Rightarrow$ (ii).

17. Entropie. THÉORÈME 17.1 ([25], p. 207, Th. 1, dans le cas d'un seul groupoïde). *Tout système (E, Φ) inversible demosien est entropique* ([35], p. 155, N°2, équ. 38).

Preuve. Par hypothèse $\forall x, y, z \in E$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, $\exists \varphi_3, \varphi_4 \in \Phi$, $x\varphi_1(y\varphi_2 z) = z\varphi_3(y\varphi_4 x)$. En appliquant itérativement celle-ci $(x\varphi_1 y)\varphi_2(z\varphi_3 t) = t\varphi_4[z\varphi_5(x\varphi_1 y)] = t\varphi_4[y\varphi_6(x\varphi_7 z)] = (x\varphi_7 z)\varphi_8(y\varphi_9 t)$. Les membres extrèmes sont ceux de l'identité d'entropie demosienne. (cf. [26] p. 55.)[1]

18. Commutativité et loi des keys. THÉORÈME 18.1. *Sur un système (E, Φ) de quasigroupes, deux quelconques des lois demosiennes suivantes entraînent la troisième;*

(i) *commutativité,*
(ii) *loi des keys à droite,*
(iii) *loi des keys à gauche.*

Preuve. L'implication (i) $\cap$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) a déjà été démontrée ([35], p. 161, N°8.4). Par raison de symétrie, (i) $\cap$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) en résulte. Pour établir la dernière, écrivons l'hypothèse sous la forme (ii) $\forall x, y \in E$, $\forall \varphi_1 \in \Phi$, $\exists \varphi_2 \in \Phi$, $(x\varphi_2 y)\varphi_1 y = x$, (iii) $\forall x, y \in E$, $\forall \varphi_2 \in \Phi$, $\exists \varphi_3 \in \Phi$, $x\varphi_3(x\varphi_2 y) = y$. Si l'on choisit arbitrairement y et $z \in E$, puisque les éléments de Φ sont des lois de quasigroupes, l'équation $x\varphi_2 y = z$ a une solution et une seule en x, donc $\forall y, z \in E$, $\forall \varphi_1 \in \Phi$, $\exists \varphi_2 \in \Phi$, $x \in E$, $x\varphi_2 y = z$ et $z\varphi_1 y = x$; $\forall y, z \in E$, $\forall \varphi_1 \in \Phi$, $\exists \varphi_3 \in \Phi$, $x\varphi_3 z = y$. De plus, par hypothèse, $\forall x, y, z \in E$, $\forall \varphi_3 \in \Phi$, $\exists \varphi_4 \in \Phi$, $(x\varphi_3 z)\varphi_4 z = x$. En remplaçant $x\varphi_3 z$ par y, cela devient $y\varphi_4 z = x$, donc $z\varphi_1 y = x = y\varphi_4 z$. Ainsi $\forall y, z \in E$, $\forall \varphi_1 \in \Phi$, $\exists \varphi_4 \in \Phi$, $z\varphi_1 y = y\varphi_4 z$, ce qui est la commutativité demosienne.

QUESTION 18.2. Sur un groupoïde G les identités (α) et (β) entraînent l'identité (γ). Sur l'ensemble (E, Φ) et en particulier sur le système obtenu en soumettant G à toutes les isotopies de quelque groupe d'isotopies, quelle est la condition pour que les identités demosiennes (A), (B) et (C), induites par (α), (β) et (γ) satisfassent à (A) $\cap$ (B) $\Rightarrow$ (C)?

CHAPITRE III

ISOTOPIE. SYSTÈMES (G, K, T)

19. Généralités. QUESTION 19.1. *Un groupoïde G satisfait à une identité (L); on soumet G à toutes les isotopies d'un groupe* (d'isotopie); *on obtient un système de groupoïdes. Quelle est la condition pour que ce système satisfasse à l'identité demosienne induite par (L)?*

Comme au Chapitre II, il n'est pas possible de donner à ce problème une solution générale. Parfois, comme dans le cas de la commutativité, la condition se réduit à quelqu' égalité évidente: "Si un groupoïde G est abélien, le système dérivé de G en le soumettant à toutes les isotopies du groupe (X, X, Z), où X et Z sont deux groupes de permutations quelconques de l'ensemble G, est évidemment commutatif demosien". Mais le plus souvent l'existence de la loi demosienne induite dépend de conditions moins évidentes et peut même être hors de cause. Il est un cas où la question peut recevoir une solution complète, c'est celui où G est un groupe, les composantes des isotopies étant des translations de G. De telles isotopies (ξ, η, ζ), $x\xi \times \eta y = xy\zeta$, ne dépendent en réalité que de deux paramètres et peuvent se mettre sous la forme $x \times y = x\xi y\theta$, $\xi, \theta \in G$. Parmi ces isotopies considérons seulement celles qui dérivent de deux sous-groupes $K, T \subseteq G$, avec $\xi \in K$, $\theta \in T$. Les isotopes ainsi définis sont évidemment des quasigroupes. Désignons un tel quasigroupe par $G(\xi, \theta)$.

DÉFINITION 19.2. *Un système (G, K, T), où K et T sont deux sous-groupes du Groupe G, est l'ensemble des quasigroupes $G(\xi, \theta)$, isotopes* *de G par les isotopies $x \times y = x\xi y\theta$, où $\xi \in K$, $\theta \in T$.* (Cf. [39].)

THÉORÈME 19.3. *La condition nécessaire et suffisante pour que $G(\xi, \theta)$ soit un groupe est que θ soit dans le centre de G. L'unité de ce groupe est alors $u = \xi^{-1}\theta^{-1}$. Si $\theta \notin \mathscr{Z}_G$, le quasigroupe $G(\xi, \theta)$ a seulement une unité à droite, u, (et n'est pas associatif.)*

Preuve. La condition d'associativité est $\forall x, y, z \in G$, $x\xi y\theta\xi z\theta = x\xi y\xi z\theta\theta$, ou $\forall z$, $\theta\xi z = \xi z\theta$. Si $z = 1$ (unité de G), $\theta\xi = \xi\theta$. Ainsi θ et ξ sont permutables, donc $\theta\xi z = \xi\theta z = \xi z\theta$, et, en cancellant par ξ, $\forall z$, $\theta z = z\theta$, ce qui exprime que θ est central dans G. Cette condition contient la précédente; elle est visiblement suffisante.

Soit u une unité à droite de $G(\xi, \theta)$, donc $x \times u = x\xi u\theta = x$, et $u = \xi^{-1}\theta^{-1}$. Pour qu'il existe une unité à gauche v, il faut que $v \times x = v\xi x\theta = x$, où v est indépendant de x. En faisant $x = 1$, $v = \theta^{-1}\xi^{-1}$, d'où $\theta^{-1}\xi^{-1}\xi x\theta = x$, $x\theta = \theta x$ et $\theta \in \mathscr{Z}_G$. Ainsi l'unité bilatère n'existe que si θ est central, c'est-a-dire si $G(\xi, \theta)$ est associatif. Si θ n'est pas dans le centre de G, le quasigroupe $G(\xi, \theta)$ a seulement une unité à droite.

20. **Commutativité.** THÉORÈME 20.1. *Pour que le système (G, K, T) ait la commutativité demosienne il faut et il suffit que G soit abélien.* (Cf N°3, 7, 8, 9)

Preuve. Que le système ait la commutativité demosienne s'écrit $\forall x, y \in G$, $\forall \xi \in K$, $\theta \in T$, $\exists \xi_1 \in K$, $\theta_1 \in T$, $x\xi y\theta = y\xi_1 x\theta_1$. Si $x=y=1$, $\xi\theta = \xi_1\theta_1$. Si $x = 1$, $\xi y\theta = y\xi_1\theta_1 = y\xi\theta$, d'où, en cancellant par θ, $\xi y = y\xi$. Ainsi tout élément $\xi \in K$ est central. Donc $x\xi y\theta = xy\xi\theta = y\xi_1 x\theta_1 = yx\xi_1\theta_1 = yx\xi\theta$. Cancellant par $\xi\theta$, on a $xy = yx$. La condition est évidemment suffisante. Cette conclusion n'est pas en contradiction avec le Corollaire 3.9, car, ici, le groupe G n'est soumis qu'à une partie de toutes les isotopies possibles.

21. **Associativité.** THÉORÈME 21.1. *Tout système (G, K, T) est associatif demosien.*

Preuve. L'associativité demosienne est exprimée par $\forall x, y, z \in G$, $\forall \xi$, $\xi_1 \in K$, θ, $\theta_1 \in T$, $\exists \xi_2$, $\xi_3 \in K$, θ_2, $\theta_3 \in T$.

$$(21.1) \qquad (x\xi y\theta)\xi_1 z\theta_1 = x\xi_2(y\xi_3 z\theta_3)\theta_2 .$$

Si $y = z = 1$, en cancellant par x,

$$(21.2) \qquad \xi\theta\xi_1\theta_1 = \xi_2\xi_3\theta_3\theta_2 .$$

Si $y = 1$,

$$\xi_3^{-1}\xi_2^{-1}\xi\theta\xi_1 z = z\theta_3\theta_2\theta_1^{-1} .$$

Donc $\theta_3\theta_2\theta_1^{-1}$ est dans le centre de G. Si $z = 1$, $y\theta\xi_1\theta_1\theta_2^{-1}\theta_3^{-1}\xi_3^{-1} = \xi^{-1}\xi_2 y$ et $\xi^{-1}\xi_2 \in \mathscr{Z}_G$ Comme $\mathscr{Z}_G$, K et T sont des sous groupes de G, leurs intersections ne sont jamais vides, Soit $t \in T \cap \mathscr{Z}$ et $k \in K \cap \mathscr{Z}$, arbitraires. On prendra $\theta_3\theta_2\theta_1^{-1} = t$, $\theta_3 = t\theta_1\theta_2^{-1}$, avec θ_2 arbitraire dans T. Ensuite $\xi^{-1}\xi_2 = k$ donne $\xi_2 = \xi k$. Enfin ξ_3 est déterminé par la première condition (21.2), $\xi_3 = \xi_2^{-1}\xi\theta\xi_1\theta_1\theta_2^{-1}\theta_3^{-1} = k^{-1}\theta\xi_1 t^{-1}$. Cela fait, l'égalité (21.1) est sûrement vérifiée car

$$x\xi_2(y\xi_3 z\theta_3)\theta_2 = x\xi k y k^{-1}\theta\xi_1 t^{-1} z t\theta_1\theta_2^{-1}\theta_2 = x\xi y k k^{-1}\theta\xi_1 z t^{-1} t\theta_1 = x\xi y\theta\xi_1 z\theta_1 .$$

Cela est conforme au Théorème 7.2, toutefois, si l'on veut que (21.1) ait d'autres solutions que la solution évidente $\xi = \xi_2$; $\xi_3 = \theta\xi_1$; $\theta_3 = \theta_1\theta_2^{-1}$, il faudra supposer $k, t \neq 1$, c'est-à-dire $T \cap \mathscr{Z}\setminus 1 \neq \phi$ et $K \cap \mathscr{Z}\setminus 1 \neq \phi$.

22. Demi-symétrie, keys, transitivité. LEMME 22.1. *S étant un groupe quelconque et G un de ses sous-groupes, on considère le complexe maximum $A \subseteq S$ satisfaisant à $\forall x \in G$, $\forall \alpha \in A$, $x\alpha x = \alpha$* ([35], p. 153, N°2, équ. 11), [27]. *Alors,* (i) *A est vide ou G est abélien,* (ii) *Si $G \neq (C_2)^n$ et si $\mathscr{Z}$ est le centralisateur de G dans S* ([20], p. 470), *on a $\forall\alpha \in A$, $A = \mathscr{Z}\alpha = \alpha\mathscr{Z}$, et $\mathscr{Z} + A$ est un groupe.*

Preuve. (i) Si $A \neq \phi$, soient $x, y \in G$ et $\alpha \in A$, $x\alpha x = \alpha$, et $y\alpha y = \alpha$, donc $x(y\alpha y)x = \alpha$, ou $(xy)\alpha(yx) = \alpha$. Mais $xy \in G$, donc $(xy)\alpha(xy) = \alpha$. En comparant, $xy = yx$.

(ii) Si $\forall x \in G$, $xz = zx$, $(z \in \mathscr{Z})$, alors $xz\alpha x = zx\alpha x = z\alpha$, donc $z\alpha \in A$. Réciproquement, soient $\alpha, \beta \in A$; alors $\forall x \in G$, $x\beta x = \beta$; mais $x^{-1} \in G$, donc $x^{-1}\alpha x^{-1} = \alpha$, d'où $x\beta x x^{-1}\alpha x^{-1} = \beta\alpha = x\beta\alpha x^{-1}$ ou $(\beta\alpha)x = x(\beta\alpha)$ et $\beta\alpha \in \mathscr{Z}$. D'ailleurs $\alpha \in A \rightleftarrows \alpha^{-1} \in A$ car $x\alpha x = \alpha \rightleftarrows x\alpha x\alpha^{-1} = 1 \rightleftarrows x\alpha^{-1} = \alpha^{-1}x^{-1} \rightleftarrows x\alpha^{-1}x = \alpha^{-1}$. Donc $\beta\alpha^{-1} \in \mathscr{Z}$; $\beta\alpha^{-1} = z$, $\beta = z\alpha$. On a donc $\mathscr{Z}\alpha \subseteq A \subseteq \mathscr{Z}\alpha$, d'où $A = \mathscr{Z}\alpha$. Enfin $\beta = z\alpha \rightrightarrows \beta^{-1} = \alpha^{-1}z^{-1}$, et comme $z^{-1} \in \mathscr{Z}$ puisque $\mathscr{Z}$ est un groupe, $A = \alpha^{-1}\mathscr{Z}$, $A = \alpha\mathscr{Z}$. Les égalités $\mathscr{Z}A = A\mathscr{Z} = A$, $AA \subseteq \mathscr{Z}$ montrent que $A + \mathscr{Z}$ est fermé dans S, et comme A contient, avec tout élément α, son inverse α^{-1}, le complexe $A + \mathscr{Z}$ est un sous-groupe de S. Le centralisateur $\mathscr{Z}$ de G est diviseur normal dans $\mathscr{Z} + A$ et le quotient $(\mathscr{Z} + A)/\mathscr{Z}$ est le groupe du second ordre. Pour construire A il suffit de multiplier $\mathscr{Z}$ par une solution particulière en α. Si $x, y \in G$ et si α satisfait à $x\alpha x = \alpha$, $y\alpha y = \alpha$, on aura, puisque G est alors abélien, $xy\alpha xy = xy\alpha yx = x\alpha x = \alpha$. Par suite, pour que α satisfasse $\forall x \in G$, $x\alpha x = \alpha$, il suffit qu'il satisfasse à cette condition quand x parcourt les générateurs de G. En particulier, si G est cyclique, $(G = C = \{c\})$, on pourra prendre pour α la solution du second ordre $\alpha = (C \rightarrow C^{-1})$ et comme dans ce cas G est son propre centralisateur, dans le groupe symétrique $\mathscr{S}_c$, $A = C\alpha$. Exemple $C = \{0123\} = (0123), (02)(13), (0321), (0)(1)(2)(3)$. C est son propre centralisateur dans le groupe symétrique $\mathscr{S}(0, 1, 2, 3)$. En choisissant $\alpha = \binom{0123}{0321} = (13)$, on pourra prendre $A = C(13) = (03)(12), (02), (01)(23), (13)$.

Si un élément de A est involutif, tous seront du second ordre car $\alpha(x\alpha x) = \alpha\alpha = (\alpha x)(\alpha x)$. Si $\alpha\alpha = 1$, $(\alpha x)(\alpha x) = 1$.

On pourrait appeler A un "anti-centre". Nous ne hasarderons pas ce néologisme.

THÉORÈME 22.2. *Pour que le système* (G, K, T) *satisfasse*

(i) *à la demi-symétrie demosienne* (N°5),

(ii) *ou à la loi demosienne des keys à droite* (N°4),

(iii) *ou à la transitivité demosienne* (N°9.3), *il faut et il suffit que tous les éléments de G soient involutifs.*

Preuve. (iii) (La démonstration est analogue pour les trois parties; démontrons seulement la dernière) La condition $\forall\varphi_1, \varphi_2 \exists \varphi_3, \varphi_4, (x\varphi_1 y)\varphi_2(z\varphi_3 y) = x\varphi_4 z$ prend la forme

$$m = x\xi_1 y\theta_1\xi_2 z\xi_3 y\theta_3\theta_2 = x\xi_4 z\theta_4 .$$

En faisant $y = z = 1$, on a $\xi_1\theta_1\xi_2\xi_3\theta_3\theta_2 = \xi_4\theta_4$, d'où $\theta_1\xi_2\xi_3 = \xi_1^{-1}\xi_4\theta_4\theta_2^{-1}\theta_3^{-1}$. Si $z = 1$, on a $\xi_1 y\theta_1\xi_2\xi_3 y\theta_3\theta_2 = \xi_4\theta_4$, ou $y\theta_1\xi_2\xi_3 y = \xi_1^{-1}\xi_4\theta_4\theta_2^{-1}\theta_3^{-1} = \theta_1\xi_2\xi_3$, donc $\theta_1\xi_2\xi_3 = \alpha$ tel que $y\alpha y = \alpha$. Par suite (Lemme 22.1), G est abélien et comme $\alpha \in G$, $yy\alpha = \alpha$, $yy = 1$. Tous les éléments de G sont involutifs. Cette condition est suffisante car, si elle est vérifiée, $m = x\xi_1 y\theta_1\xi_2 z\xi_3 y\theta_3\theta_2 = xzyy\xi_1\theta_1\xi_2\xi_3\theta_3\theta_2$. On choisit arbitrairement $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ et on détermine ξ_4 par $\xi_1\theta_1\xi_2\xi_3\theta_3\theta_2 = \xi_4\theta_4$; alors $m = xz\xi_4\theta_4 = x\xi_4 z\theta_4$, et la condition du début est vérifiée.

23. Loi de Moufang. THÉORÈME 23.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que le système* (G, K, T) *satisfasse à la loi demosienne de Moufang* ([35], p. 154, N°2, équ. 29), *est que les intersections de K et T avec le centre de G ne se réduisent pas à l'identique,* $K \cap \mathscr{Z} \setminus 1 \neq \phi$, $T \cap \mathscr{Z} \setminus 1 \neq \phi$.

Preuve. La condition $[x\varphi_1(y\varphi_2 x)]\varphi_3 z = x\varphi_4[y\varphi_5(x\varphi_6 z)]$ s'écrit $\forall x, y, z \in G$, $\forall \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in K$, $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in T$, $\exists \xi_4, \xi_5, \xi_6, \theta_4, \theta_5, \theta_6$,

$$[x\xi_1(y\xi_2 x\theta_2)\theta_1]\xi_3 z\theta_3 = x\xi_4[y\xi_5(x\xi_6 z\theta_6)\theta_5]\theta_4 . \tag{23.1}$$

Elle devient, si $y = z = 1 = x$,

$$\xi_1\xi_2\theta_2\theta_1\xi_3\theta_3 = \xi_4\xi_5\xi_6\theta_6\theta_5\theta_4 . \tag{23.2}$$

En faisant seulement $x = y = 1$, $\xi_1\xi_2\theta_2\theta_1\xi_3z\theta_3 = \xi_4\xi_5\xi_6z\theta_6\theta_5\theta_4$, ou

$$\xi_6^{-1}\xi_5^{-1}\xi_4^{-1}\xi_1\xi_2\theta_2\theta_1\xi_3z = z\theta_6\theta_5\theta_4\theta_3^{-1} .$$

Ainsi $\theta_6\theta_5\theta_4\theta_3^{-1}$ est dans le centre. En faisant dans (23.1) $x = z = 1$, on a $\xi_1y\xi_2\theta_2\theta_1\xi_3\theta_3 = \xi_4y\xi_5\xi_6\theta_6\theta_5\theta_4$, ou $y\xi_2\theta_2\theta_1\xi_3\theta_3\theta_4^{-1}\theta_5^{-1}\theta_6^{-1}\xi_6^{-1}\xi_5^{-1} = \xi_1^{-1}\xi_4y$; donc $\xi_1^{-1}\xi_4$ est central.

Réciproquement, si K et T ont des éléments centraux, soient t, k, k', trois d'entre eux, $t \in T$; $k, k' \in K$. Choisissons arbitrairement ξ_1, ξ_2, ξ_3, θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5 et prenons $\theta_6 = t\theta_3\theta_4^{-1}\theta_5^{-1}$, $\xi_4 = \xi_1k$, enfin $\xi_5 = \xi_4^{-1}\xi_1\xi_2k' = k^{-1}\xi_2k'$. La Condition (23.2) donne alors $\xi_6 = \xi_5^{-1}\xi_4^{-1}\xi_1\xi_2\theta_2\theta_1\xi_3\theta_3\theta_4^{-1}\theta_5^{-1}\theta_6^{-1} = k'^{-1}\xi_2^{-1}kk^{-1}\xi_1^{-1}\xi_1\xi_2\theta_2\theta_1\xi_3\theta_3\theta_4^{-1}\theta_5^{-1}\theta_5\theta_4\theta_3^{-1}t^{-1} = k'^{-1}\theta_2\theta_1\xi_3t^{-1}$. Si l'on substitue ces valeurs dans (23.1) elle devient $x\xi_1y\xi_2x\theta_2\theta_1\xi_3z\theta_3 = x\xi_1kyk^{-1}\xi_2k'xk'^{-1}\theta_2\theta_1\xi_3t^{-1}zt\theta_3$, ou, en tenant compte de la permutabilité de t, k et k', $y\xi_2x\theta_2\theta_1\xi_3z = kk^{-1}k'k'^{-1}t^{-1}ty\xi_2x\theta_2\theta_1\xi_3z$, ce qui est une identité. Si l'on ne se contente pas de la solution évidente $\theta_6 = \theta_3\theta_4^{-1}\theta_5^{-1}$, $\xi_4 = \xi_1$, $\xi_5 = \xi_2$, $\xi_6 = \theta_2\theta_1\xi_3$, il faut supposer que les intersections de T et de K avec le centre ne se réduisent pas à l'unité.

24. Remarques. (i) Si l'on soumet tous les groupoïdes d'un système quelconque (E, Φ) à une commune isotopie, le nouveau système ne satisfait plus, en général, aux mêmes identités demosiennes que le premier. (Par exemple les dérivés de deux groupoïdes conjoints par une même isotopie ne sont plus conjoints). A quelles identités obéit le nouveau système?

(ii) M. Schauffler ([41], Th. 2, p. 430) a montré que l'ensemble de tous les quasigroupes finis d'ordre n est associatif demosien seulement pour $n = 2$ et 3. Cette proposition résulte immédiatement du Théorème N°7.2. En effet, d'après 7.2, deux quelconques des quasigroupes du système sont toujours isotopes d'un même groupe. Or on sait ([35], N°25), qu'à partir de $n = 4$ l'ensemble des quasigroupes définis sur un ensemble d'ordre n contient des éléments qui ne coïncident par aucune isotopie.

CHAPITRE IV

COMPOSITION

25. Produit de deux groupoïdes. L'intérêt des système demosiens serait grandement accru si l'on parvenait à les organiser eux-mêmes en groupoïdes en introduisant quelque loi de composition entre les φ, regardés comme des éléments de Φ. On pourrait alors appliquer à de tels systèmes des isomorphismes, homomorphismes, isotopies, isoméries, parastrophies, y définir des relations d'ordre stables, considérer leurs sous-groupoïdes, leurs groupoïdes quotients, etc. et examiner dans chaque cas la nature nouvelle des identités demosiennes obéies par le système, en elles-mêmes et dans leurs connexions avec les identités initiales et les constructions affectuées dans le système primitif. Deux lois de composition entre groupoïdes ont déjà èté introduites par l'auteur: le *produit à droite*, ([36], N°12), le *produit suivant un groupoïde de base donné* $G(\circ)$, ([31], p. 230, N°4). Mais on peut en imaginer d'autres, en particulier sur les systèmes construits par isotopie. Le chapitre se termine par la définition du produit direct de deux systèmes demosiens.

26. Produit à droite. DÈFINITION 26.1. (i) *Etant donnès deux groupoïdes, définis sur le même ensemble E par les lois de composition φ_1 et φ_2, leur produit à droite $\varphi_1 \nabla \varphi_2 = \varphi$ est le groupoïde défini sur E par la relation, $\forall x, y \in E$, $x\varphi y = (x\varphi_1 y)\varphi_2 y$,* ([36], N°12), [27].

(ii) *Le semigroupe défini par $xy = y$ s'appelle le semigroupe à translation identique, ou de Thierrin.*

Ce semigroupe, qui satisfait à la loi de translation identique ([35], p. 153, N°2, équ. 9, [36], N°3, ex. IV), a été étudié par Thierrin ([44], p. 178), sous le nom d'*anti-semigroupe.*

THÉORÈME 26.2. (i) *L'ensemble de groupoïdes, S, engendré par un système (E, Φ) au moyen du produit à droite, est un semigroupe par rapport à ce produit. Le semigroupe $xy = x$ est unité, le semigroupe de Thierrin est idéal nul à droite dans tous les cas et zéro à gauche si tous les $\varphi_i \in \Phi$ sont idempotents.*

(ii) *Pour que S soit un groupe il faut et il suffit,*

(a) *qu'il contienne le semigroupe $xy = x$,*

(b) *que ses générateurs soient des quasigroupes à gauche,*

(c) *que (E, Φ) satisfasse à la loi demosienne des keys* (N°4). *Si E est fini la condition* (b) *entraîne les deux autres.*

Preuve. (i) Par définition $\forall x, y \in E$, $(x\varphi_1 y)\varphi_2 y = x\varphi_3 y \rightleftarrows \varphi_3 = \varphi_1 \nabla \varphi_2$, $(x\varphi_3 y)\varphi_4 y = x\varphi_5 y \rightleftarrows \varphi_5 = (\varphi_1 \nabla \varphi_2) \nabla \varphi_4$, $(x\varphi_2 y)\varphi_4 y = x\varphi_6 y \rightleftarrows \varphi_6 = \varphi_2 \nabla \varphi_4$, $(u\varphi_1 y)\varphi_6 y = u\varphi_7 y \rightleftarrows \varphi_7 = \varphi_1 \nabla \varphi_6 = \varphi_1 \nabla (\varphi_2 \nabla \varphi_4)$. On tire de la 3^{me} équation, en mettant $u\varphi_1 y$ à la place de x, $[(u\varphi_1 y)\varphi_2 y]\varphi_4 y = (u\varphi_1 y)\varphi_6 y = u\varphi_7 y$; donc $(\varphi_1 \nabla \varphi_2) \nabla \varphi_4 = \varphi_7 = \varphi_1 \nabla (\varphi_2 \nabla \varphi_4)$.

Le semigroupe de translation identique, $x\varphi y = x$, est visiblement unité de S car $(x\varphi_1 y)\varphi y = x\varphi_1 y = (x\varphi y)\varphi_1 y$, donc $\varphi_1 \nabla \varphi = \varphi \nabla \varphi_1 = \varphi_1$. Le semigroupe de Thierrin, $x\varphi_0 y = y$, est idéal nul à droite car $(x\varphi_i y)\varphi_0 y = y = x\varphi_0 y$, donc $\varphi_i \nabla \varphi_0 = \varphi_0$. Si tous les $\varphi_i \in \Phi$ sont des groupoïdes idempotents, $x\varphi_i x = x$, il en est de même de tous les $\varphi_i \in \{\Phi\}$ et alors $(x\varphi_0 y)\varphi_i y = y \rightleftarrows y\varphi_i y = y = x\varphi_0 y$, ou $\varphi_0 \nabla \varphi_i = \varphi_0$. Le zéro φ_0 et l'unité φ sont conjoints ([35], p. 155, N°2, ii).

(ii) Pour que S soit un groupe il faut et il suffit qu'il contienne l'unité, φ, et, avec tout groupoïde φ_i, son inverse φ_j, $(\varphi_i \nabla \varphi_j = \varphi)$. Si

S est un groupe et φ_i la loi de composition d'un de ses groupoïdes, l'inverse de φ_i sera φ_j, défini par

$$(26.1) \qquad \varphi_i \nabla \varphi_j = \varphi \ , \quad \text{ou} \quad (x\varphi_i y)\varphi_j y = x\varphi y = x \ .$$

Si $x\varphi_i a = b$, on aura donc $b\varphi_j a = x$; cela signifie que l'équation $x\varphi_i a = b$, $\forall \varphi_i \in \{\Phi\}$, a une solution et une seule en x, $x = b\varphi_j a$. Tous les φ_i, et en particulier $\varphi_i \in \Phi$, sont donc des lois de quasigroupes à gauche. Enfin la relation (26.1) exprime que S satisfait à la loi demosienne des keys à droite (déf. 4.1). Ainsi, les conditions (a), (b), et (c) sont remplies. Réciproquement, supposons (a), (b), (c) vérifiées. Tous les générateurs, $\varphi_i \in \Phi$, de S sont des quasigroupes à gauche et il en sera évidemment de même de tous les φ_j engendrés par Φ au moyen du produit à droite; d'autre part Φ contient, en même temps que tout groupoïde, son inverse car, tout quasigroupe à gauche a un réciproque ([34], déf. 1.2), $x\varphi_i y = z \rightleftarrows z\varphi_j y = x$. Ensuite, en vertu de (c), on a $\forall \varphi_i \in \Phi$, $\exists \varphi_j \in \Phi$, $(x\varphi_i y)\varphi_j y = x$. Ainsi, φ_j, inverse de φ_i, est défini (b) et appartient à Φ, (c). Dès lors, soient φ_i et φ_k deux groupoïdes de Φ, φ_j et φ_t leurs inverses respectifs; alors,

$$(\varphi_i \nabla \varphi_k) \nabla (\varphi_t \nabla \varphi_j) = \varphi_i \nabla (\varphi_k \nabla \varphi_t) \nabla \varphi_j = \varphi_i \nabla \varphi \nabla \varphi_j = \varphi_i \nabla \varphi_j = \varphi \ .$$

Donc les produits $\varphi_i \nabla \varphi_k$ et $\varphi_t \nabla \varphi_j$ sont encore inverses. A toute étape de la construction de $\{\Phi\}$, la partie déjà engendrée contiendra toujours, avec tout groupoïde, son inverse et, d'après la remarque précédente, il sera possible de maintenir cette situation jusqu' au bout en faisant, en même temps que le produit de deux groupoïdes de cette partie déjà construite, celui de leurs inverses. De sorte que S, contenant lui aussi, avec tout groupoïde, son inverse, est un groupe.

Si l'on postule seulement la condition (b), soit φ_i un élément quelconque de $\{\Phi\}$. L'application $\Delta_a = (x \to x\varphi_i a)$ est une permutation de l'ensemble E sur lequel est construit chaque quasigroupe. Les translations Δ_a calculées pour les puissances successives de $\varphi_i : \varphi_i$, $\varphi_i^2 = \varphi_i \nabla \varphi_i$, $\varphi_i^3 = \varphi_i^2 \nabla \varphi_i$, $\cdots$ seront $\Delta_a = (x \to x\varphi_i a)$, $[x \to (x\varphi_i a)\varphi_i a] = (\Delta_a)^2$, $[x \to (x\varphi_i^2 a)\varphi_i a] = (\Delta_a)^3$, $\cdots$ Ce sont les puissances successives de la première. Si E est fini, il existera un entier positif n, tel que $(\Delta_a)^n$ soit identique quel que soit a. Donc $x\varphi_i^n y = x = x\varphi y$ et $\{\Phi\}$ contiendra le semigroupe unité. Enfin l'égalité $\varphi_i^{n-1} \nabla \varphi_i = \varphi$ montre que tout φ_i aura un inverse; donc S sera un groupe. Le raisonnement n'est plus valable si E n'est pas fini. Alors S peut ne pas contenir l'unité. Par exemple si S est engendré par le groupe cyclique $x\varphi_1 y = x + y$ sur l'anneau Z des entiers rationnels, $x\varphi_i y = x + yi$; il n'y a aucune valeur de l'entier positif i pour laquelle $x\varphi_i y$ se réduise à x. Si l'on adjoint à l'ensemble Φ le semigroupe unité $x\varphi y = x$, néanmoins, cet ensemble ne contiendra pas les réciproques de φ_i, $(x\varphi_k y = x - yi)$.

REMARQUE 26.3. Dans tout ce chapitre, certains vocables sont inséparables du contexte. Ainsi quand on dira qu'un groupoïde φ_i est idempotent, cela peut signifier que tous ses éléments sont idempotents $(x\varphi_i x = x)$, ou que l'élément φ_i du semigroupe Φ est idempotent par rapport au produit à droite (∇), c'est-à-dire $\varphi_i \nabla \varphi_i = \varphi_i$, ou $(x\varphi_i y)\varphi_i y = x\varphi_i y$. De même il est très différent de dire que le groupoïde $E(\varphi_i)$ satisfait à la loi des keys, $(x\varphi_i y)\varphi_i y = x$, ou que le système (E, Φ) possède la loi des keys demosienne, $(x\varphi_1 y)\varphi_2 y = x$. Dans le premier cas on pourrait parler de la loi des keys en soi, dans le second de la loi demosienne.

27. Système associatif. THÉORÈME 27.1. *Si (E, Φ) est un système associatif demosien, dont chaque élément est un groupoïde idempotent en soi, alors (E, Φ) est fermé par rapport au produit à droite (∇). Conclusion analogue si le système a l'inversibilité demosienne.*

Preuve. Par définition du produit (∇) de deux groupoïdes, $(x\varphi_1 y)\varphi_2 y = x\varphi_3 y \rightleftarrows \varphi_1 \nabla \varphi_2 = \varphi_3$. Comme (E, Φ) a l'associativité demosienne, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, $\exists \varphi_4, \varphi_5 \in \Phi$, $(x\varphi_1 y)\varphi_2 y = x\varphi_4(y\varphi_5 y)$. Mais puisque tous les groupoïdes de (E, Φ) sont idempotents, $\forall \varphi_5, y\varphi_5 y = y$, d'où $(x\varphi_1 y)\varphi_2 y = x\varphi_4 y$, et $\varphi_3 = \varphi_4$. Donc $\varphi_1 \nabla \varphi_2 \in \Phi$. De plus $\varphi_1 \nabla \varphi_2$ est évidemment idempotent en soi. Ainsi Φ est fermé par rapport au produit (∇).

L'exemple suivant est susceptible d'applications pratiques.

EXEMPLE 27.2. Sur un corps quelconque, K, le système des quasigroupes $x\varphi_a y = ax + (1 - a)y$, $(a, x, y \in K)$, ([8], p. 112) possède l'associativité demosienne et il est fermé par rapport à (∇). Il est isomorphe au groupe multiplicatif du corps.

28. Systèmes unipotents, idempotent, nilpotents. THÉORÈME 28.1. *Etant donné un système (E, Φ) engendré par le produit à droite (∇),* (i) *pourqu'un groupoïde $\varphi_i \in \Phi$ soit unipotent par rapport à ce produit $(\varphi_i \nabla \varphi_i = \varphi,\ x\varphi y = x)$, il faut et il suffit qu'il satisfasse à la loi des keys à droite* (en soi). *Toutes les translations à droite Δ_y sont alors, dans φ_i, des involutions.* (ii) *Pour que φ_i soit idempotent par rapport à (∇),$(\varphi_i \nabla \varphi_i = \varphi_i)$, il faut et il suffit que les éléments de E qui ont une unité à gauche dans $E(\varphi_i)$, $(u\varphi_i x = x, \forall x)$ soient idempotents et que, dans chaque translation $\Delta_y = (x \rightarrow x\varphi_i y)$, tout élément x soit sa propre projection, ou ait comme image un élément se projetant sur lui-même.* (iii) *Pour que φ_i soit nilpotent d'index n, il faut et il suffit qu'il soit idempotent en soi $(x\varphi_i x = x)$ et que chaque translation Δ_y définisse sur E une relation d'ordre partiel $(a \succ b \rightleftarrows a\varphi_i b = b)$ ayant pour diagramme de Hasse* ([21], II, N°17, p. 102, [7], p. 6) *un arbre issu de b y et dont les chaînes maximales aient pour longueur n.*

Preuve. (i) Soit $x\varphi_i y = a$ et $a\varphi_i y = b$, donc $(x\varphi_i y)\varphi_i y = b$. L'unité, $x\varphi y = x$ est le semigroupe conjoint de celui de Thierrin (N°26.1). Pour que $\varphi_i \nabla \varphi_i = \varphi$ il faut et il suffit que $b = x$, ou $(x\varphi_i y)\varphi_i y = x$. C'est la loi des keys à droite (en soi). La translation Δ_y est alors $\Delta_y = (x \rightarrow a)$ et comme $a\varphi_i y = x$, on a aussi $\Delta_y = (a \rightarrow x)$; donc Δ est du second ordre.

(ii) Pour que φ_i soit idempotent il faut et il suffit que $\varphi_i \nabla \varphi_i = \varphi_i$ ou $(x\varphi_i y)\varphi_i y = x\varphi_i y$. Si l'élément a possède une unité gauche x, dans φ_i, $x\varphi_i a = a$, la condition ci-dessus devient, en faisant $y = a$, $a\varphi_i a = a$. L'élément a est donc idempotent dans $E(\varphi_i)$. En particulier, les *zéroïdes* ([10], p. 118, [45], p. 87) à gauche de $E(\varphi_i)$ seront idempotents. D'autre part $x\varphi_i y = a \Rightarrow a\varphi_i y = a$; donc la translation $\Delta_y = (x \rightarrow x\varphi_i y)$ projette chaque élément, soit sur lui-même, soit sur un élément qui est sa propre image par Δ. La condition est visiblement suffisante.

(iii) Supposons φ_i nilpotent d'index $n \neq 1$; soit $x\varphi_i y = a$. Il y a au moins un $x \in E$ pour lequel $a \neq y$, sans quoi on aurait $x\varphi_i y = y$, $\forall x$, $\varphi_i = \varphi_0$ et φ_i serait nul. Il y a de même au moins un b tel que $a\varphi_i y = b \neq y$, $b\varphi_i y = c \neq y, \cdots$, etc. enfin $k\varphi_i y = y$. Il y a donc une chaîne unique $x, a, b, \cdots, y$, définie par les puissances successives de la translation Δ_y, reliant un élément arbitraire de E à y, et dont la longueur est inférieure ou égale à n, le maximum étant atteint au moins une fois. Partant de l'élément a défini ci-dessus, et puisque φ_i est nilpotent d'index n, on devra avoir $[(a\varphi_i y)\varphi_i y \cdots]\varphi_i y = y$. Mais, d'après le choix de a, l'expression entre crochets est égale à $k\varphi_i y$, ou y, d'où $y\varphi_i y = y$, $\forall y$. Ainsi φ_i est idempotent en soi. La réciproque est évidente.

29. Système associatif fermé. THÉORÈME 29.1. *Si $S = (E, \Phi)$ est un système de groupoïdes idempotents ($x\varphi_i x = x$), avec élément neutre à gauche commun, u, et satisfaisant à l'associativité demosienne, alors, tout sous-système $S' = (E, \Phi')$, $\Phi' \subseteq \Phi$, fermé par rapport au produit à droite (∇), possède aussi l'associativité demosienne.*

Preuve. Par hypothèse $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi'$, $\exists \varphi_3, \varphi_4 \in \Phi$, $(x\varphi_1 y)\varphi_2 z = x\varphi_3(y\varphi_4 z)$. Si $z = y$, on a $(x\varphi_1 y)\varphi_2 y = x\varphi_3(y\varphi_4 y)$. Le premier membre est le produit *à* droite $\varphi_1 \nabla \varphi_2$ et, dans le second, $y\varphi_4 y = y$ en vertu de l'idempotence, donc $\forall x, y \in E$, $x(\varphi_1 \nabla \varphi_2)y = x\varphi_3 y$, ou $\varphi_3 = \varphi_1 \nabla \varphi_2$, et puisque Φ' est fermé par rapport à (∇), $\varphi_3 \in \Phi'$. Si $x = u$, l'hypothèse devient $(u\varphi_1 y)\varphi_2 z = y\varphi_2 z = u\varphi_3(y\varphi_4 z) = y\varphi_4 z$, donc $\varphi_4 = \varphi_2 \in \Phi'$. Puisque φ_3 et φ_4 sont dans Φ', le système (E, Φ') est associatif demosien. On aurait un théorème analogue avec la transitivité.

REMARQUE 29.2. La réciproque n'est pas vraie. Ainsi, le système proposé en exemple au N° 27.2 admet le sous-système engendré par les puissances de φ_a, $x\varphi_a^n y = a^n x + (1 - a^n)y$. Ce soussystème est associatif demosien; φ_a^n est idempotent, mais n'a pas d'unité à gauche.

QUESTION 29.3. *On munit un système* (E, Φ), *satisfaisant à l'associativité demosienne, d'une loi de composition* (L) *entre les groupoïdes de ce système. Le système* (E, Φ) *engendre, au moyen de cette loi, un système plus large* (E, Φ'), $\Phi' \supseteq \Phi$. *Quelles sont les lois* (L) *pour lesquelles* (E, Φ') *possède encore l'associativité demosienne?*

30. **Produit suivant un groupoide** $(\ast)$. DEFINITION 30.1. Si $E(\varphi_1)$ et $E(\varphi_2)$ sont deux groupoïdes quelconques sur un ensemble commun E, et $E(\ast)$ un groupoïde fixe (*fondamental*) donné sur E, on *appelle produit des groupoïdes* $E(\varphi_1)$ *par* $E(\varphi_2)$, *selon le groupoïde de base* $E(\ast)$, le groupoïde $E(\varphi_3)$ défini par la relation $x\varphi_3 y = (x\varphi_1 y) \ast (x\varphi_2 y)$, symboliquement $\varphi_3 = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

Cette définition a été donnée à l'occasion des groupoïdes orthogonaux ([31], N°4, p. 230), mais elle est générale quels que soient les composants φ_1, φ_2. Un ensemble demosien est *fermé* par rapport au produit $(\circ)$ selon un groupoïde fondamental $E(\ast)$—appartenant ou non à Φ— si $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in \Phi$. L'ensemble $(E, \{\Phi\})$ engendré par un systéme demosien (E, Φ) au moyen du produit $(\circ)$ est évidemment fermé par rapport à ce produit.

EXEMPLE 30.2. Sur l'anneau Z des entiers rationnels le système demosien dont les éléments sont les groupoïdes $x\varphi y = ax + by + c$, $Z \ni a, b, c =$ Constantes, est fermé par rapport à chacun de ces groupoïdes.

THÉORÈME 30.3. *Tout système* (E, Φ) *dont chaque groupoïde est idempotent en soi* $(x\varphi x = x)$, *et qui possède l'associativité et la commutativité demosiennes, est fermé par rapport à chacun de ses groupoïdes.*

Preuve. Par hypothèse, le groupoïde fondamental, φ_i, appartient au système et si $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ on aura

$$\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi_i = \Phi\ , \qquad \exists \varphi_3, \varphi_4, \cdots, \varphi_{10} \in \Phi\ .$$
$$\begin{aligned} x\varphi x &= (x\varphi_1 y)\varphi_i(x\varphi_2 y) = x\varphi_3[y\varphi_4(x\varphi_2 y)] = x\varphi_3[y\varphi_4(y\varphi_5 x)] \\ &= x\varphi_3[(y\varphi_6 y)\varphi_7 x] = x\varphi_3(y\varphi_7 x) = x\varphi_3(x\varphi_8 y) \\ &= (x\varphi_9 x)\varphi_{10} y = x\varphi_{10} y\ . \end{aligned}$$

Donc
$$\varphi = \varphi_{10} \in \Phi.$$

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple ci dessus, qui est fermé sans que ses groupoïdes soient idempotents en eux-mêmes.

THÉORÈME 30.4. *Si* $G(\ast)$ *est un groupoïde quelconque, appartenant ou non à* (E, Φ), *et fixé sur l'ensemble* E, *le système* $(E, \{\Phi\})$, *engendré* *par le système* (E, Φ) *sous la loi de composition* $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_3 \rightleftarrows \forall x, y, z \in E$, $(x\varphi_1 y) * (x\varphi_2 y) = x\varphi_3 y$, *est un groupoïde* $\Sigma(\circ)$ *par rapport à l'opération* $(\circ)$, *ayant pour éléments les* φ_i, *et* Σ *est* (i) *un quasigroupe,* (ii) *un semigroupe,* (iii) *un groupoïde abélien, en même temps que* $G(*)$.

Preuve. (i) Si $G(*)$ est un quasigroupe, à tous $x\varphi_2 y$ et $x\varphi_3 y$ donnés correspond un $z \in E$, et un seul, tel que $z * (x\varphi_2 y) = x\varphi_3 y$. Maintenant, z étant défini univoque, $\forall x, y \in E$, la fonction $z = x\varphi_1 y$ est déterminée. Ainsi, l'équation $\varphi \circ \varphi_2 = \varphi_3$ a une solution unique φ_1 en φ, $\forall \varphi_2, \varphi_3$ et la loi de composition $(\circ)$ satisfait à l'axiome du quotient à gauche. Le même argument est valable à droite et $\Sigma(\circ)$ est un quasigroupe.

(ii) Si $G(*)$ est associatif, $\forall x, y, z \in E$, $\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \{\Phi\}$, $[(x\varphi_1 y) * (x\varphi_2 y)] * (x\varphi_3 y) = (x\varphi_1 y) * [(x\varphi_2 y) * (x\varphi_3 y)]$, ou $(\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3 = \varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3)$. Donc $\Sigma(\circ)$ est un semigroupe.

(iii) Si $G(*)$ est commutatif, $\forall x, y \in E$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \{\Phi\}$, $(x\varphi_1 y) * (x\varphi_2 y) = (x\varphi_2 y) * (x\varphi_1 y)$, ou $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$, et $\Sigma(\circ)$ est abélien. Les réciproques sont évidentes (Cf [31], p. 233, N°8).

THÉORÈME 30.4.1. *Si chaque groupoïde d'un système associatif et inversible demosien* (E, Φ) *est idempotent en soi,* $(x\varphi_i x = x)$, *alors le système* $(E, \{\Phi\})$, *engendré par* (E, Φ) *sous la loi de composition* $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_3 \rightleftarrows (x\varphi_1 y) * (x\varphi_2 y) = x\varphi_3 y$, $\Phi \ni *$, *fixé, possède encore l'associativité l'inversibilité demosiennes, l'idempotence en soi.*

Preuve. (i) Démontrons l'idempotence par induction. Supposons qu'à une étape donnée de la construction de $(E, \{\Phi\})$ tous les groupoïdes déjà engendrés soient idempotents; alors, $\forall x \in E$, $x\varphi_i x = x$, $x\varphi_j x = x$, où $E(\varphi_i)$ et $E(\varphi_j)$ sont des groupoïdes déjà construits. Le produit $\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_k$ est défini par $x\varphi_k y = (x\varphi_i y) * (x\varphi_j y)$. Si $x = y$, $x\varphi_k x = (x\varphi_i x) * (x\varphi_j x) = x * x = x$; donc φ_k est idempotent.

(ii) Il résulte du N°14.3, iv que (E, Φ) a la commutativité demosienne. Le même argument que ci-dessus montre que cette commutativité se transfère à $(E, \{\Phi\})$. En effet, avec les mêmes notations que plus haut, soit $x\varphi_i y = y\varphi_1 x$, $x\varphi_j y = y\varphi_2 x$, $x\varphi_k y = (x\varphi_i y) * (x\varphi_j y) = (y\varphi_1 x) * (y\varphi_2 x) = y\varphi_3 x$, avec $\varphi_3 = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

(iii) La même induction s'applique à l'inversibilité demosienne. On a successivement

$$\begin{aligned} x\varphi_k y &= (x\varphi_i y) * (x\varphi_j y) = (y\varphi_3 x) * (x\varphi_j y) = y\varphi_4[x\varphi_5(x\varphi_j y)] \\ &= y\varphi_4[(x\varphi_6 x)\varphi_7 y] = y\varphi_4(x\varphi_7 y) = y\varphi_4(y\varphi_8 x) \\ &= (y\varphi_9 y)\varphi_{10} x = y\varphi_{10} x \ . \end{aligned}$$

Donc $(x\varphi_k y)\varphi_{11} z = (y\varphi_{10} x)\varphi_{11} z = (x\varphi_{12} y)\varphi_{11} z = x\varphi_{13}(y\varphi_{14} z)$. La démonstration serait analogue à partir de $(x\varphi_{11}y)\varphi_k z$; par suite, φ_k satisfait à l'associativité demosienne et, en vertu du N° 14.1, le système est aussi inversible demosien.

THÉORÈME 30.5. *Sur un système (E, Φ) associatif inversible demosien, fermé par rapport au semigroupe (avec unité) $* \in \Phi$, l'application $(\varphi_i \to \varphi_2 \circ \varphi_i \circ \varphi_1) \rightleftarrows [x\varphi_i y \to (x\varphi_2 y) * (x\varphi_i y) * (x\varphi_1 y)]$, φ_1, φ_2 fixés, où $(x\varphi_1 y) * (x\varphi_2 y) = u$, unité de $E(*)$, $\forall x, y \in E$, est un endomorphisme.*

Preuve. Soit $\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_k$, ou $(x\varphi_i y) * (x\varphi_j y) = x\varphi_k y$.

$$\begin{aligned}(x\varphi_2 y) * (x\varphi_i y) * (x\varphi_1 y) * (x\varphi_2 y) * (x\varphi_j y) * (x\varphi_1 y) \\ &= (x\varphi_2 y) * (x\varphi_i y) * u * (x\varphi_j y) * (x\varphi_1 y) \\ &= (x\varphi_2 y) * (x\varphi_i y) * (x\varphi_j y) * (x\varphi_1 y) \\ &= (x\varphi_2 y) * (x\varphi_k y) * (x\varphi_1 y)\,.\end{aligned}$$

Donc $(\varphi_2 \circ \varphi_i \circ \varphi_1) \circ (\varphi_2 \circ \varphi_j \circ \varphi_1) = \varphi_2 \circ \varphi_k \circ \varphi_1$. On peut aussi concevoir des endomorphismes s'exerçant par application de E dans lui-même $(x \to x')$, dans chaque groupoïde. Alors, si I_i est le semigroupe d'endomorphisme de $E(\varphi_i)$, celui du système sera évidemment $\cap I_i$.

REMARQUES 30.6. Soient α, β, m, p des constantes quelconques choisies parmi les éléments du E. On peut définir des classes—analogues aux classes d'isonomie ([31], p. 236, N°16)—par la condition que deux groupoïdes $E(\varphi_i)$ et $E(\varphi_j)$ du système (E, Φ) soient dans la même classe K_m si $\alpha\varphi_i\beta = \alpha\varphi_j\beta = m$. Ici ces classes sont nécessairement disjointes et, à chaque classe, correspond univoquement un élément $m \in E$. Une telle partition de (E, Φ) est régulière par rapport au produit selon un groupoïde $G(*)$, car soit $\varphi_3 = \varphi_1 \circ \varphi_2 \rightleftarrows \forall x, y \in E$, $(x\varphi_1 y) * (x\varphi_2 y) = x\varphi_3 y$. Si $\varphi_1 \in K_m$ et $\varphi_2 \in K_p$, on aura $\alpha\varphi_1\beta = m$, $\alpha\varphi_2\beta = p$, et $\alpha\varphi_3\beta = (\alpha\varphi_1\beta) * (\alpha\varphi_2\beta) = m * p = r$. L'élément r ne dépend que de m et de p, donc $K_m \circ K_p = K_{m*p}$. L'application $(\varphi_i \to m) \rightleftarrows \varphi_i \in K_m$ est un homomorphisme de (E, Φ) sur $G(*)$. A chaque choix de (α, β), c'est-à-dire à chaque élément de EE correspond un tel homomorphisme. L'ensemble de tous ces homomorphismes, quand (α, β) décrit EE, muni de la loi de composition $(\alpha, \beta) \circ (\alpha', \beta') = (\alpha * \alpha', \beta * \beta')$, est isomorphe au carré direct de $G(*)$.

On peut imaginer d'autres moyens d'organiser un système demosien en groupoïde. Bornons-nous, pour terminer, à indiquer la construction du produit de deux systèmes demosiens.

31. Produit direct. DÉFINITION 31.1. Soient (E, Φ) et (E', Φ') deux systèmes demosiens, EE' et $\Phi\Phi'$ les ensembles produits. Le produit direct de ces deux systèmes est le système $(EE', \Phi\Phi')$ défini $\forall x, y \in E$,

$x', y' \in E'$, $\varphi_i, \varphi_j \in \Phi$, $\varphi'_i, \varphi'_j \in \varphi'$, et dont les groupoïdes ont pour loi de composition, sur l'ensemble EE', les $[\varphi_i, \varphi'_j] \in \Phi\Phi'$, tels que $(x, x')[\varphi_i, \varphi'_j](y, y') = (x\varphi_i y, x'\varphi'_j y')$. Comme cas particulier, les ensembles peuvent coïncider: $E = E'$, ou $\Phi = \Phi'$. Dans le premier cas $(x, y)[\varphi_i, \varphi'_j](z, t) = (x\varphi_i z, y\varphi'_j t)$. Dans le second cas, on peut prendre $(x, x')\varphi(y, y') = [(x\varphi y), (x'\varphi y')]$, sans modifier φ, ou bien $(x, x')[\varphi_i, \varphi_j](y, y') = (x\varphi_i y, x'\varphi_j y')$ en passant de Φ à $\Phi\Phi$.

THÉORÈME 31.2. *Si deux systèmes satisfont à une même loi demosienne, leur produit direct satisfait aussi à cette loi.*

Bornons nous à exposer les calculs dans le cas de l'associativitè demosienne.

$$\begin{aligned}\{(x, x')[\varphi_i, \varphi'_i](y, y')\}[\varphi_j, \varphi'_j](z, z') &= (x\varphi_i y, x'\varphi'_i y')[\varphi_j, \varphi'_j](z, z') \\ &= [(x\varphi_i y)\varphi_j z, (x'\varphi'_i y')\varphi'_j z'] = [x\varphi_k(y\varphi_m z), x'\varphi'_k(y'\varphi'_m z')] \\ &= (x, x')[\varphi_k, \varphi'_k]((y\varphi_m z), (y'\varphi'_m z')) \\ &= (x, x')[\varphi_k, \varphi'_k]\{(y, y')[\varphi_m, \varphi'_m](z, z')\} .\end{aligned}$$

EXEMPLE 31.3. Le système $E = (0, 1)$, $\Phi = (\times, \ast)$, défini par $0 \times 0 = 1 \times 1 = 0$, $0 \times 1 = 1 \times 0 = 1$, $0 \ast 0 = 1 \ast 1 = 1$, $0 \ast 1 = 1 \ast 0 = 0$, est associatif demosien. Si l'on fait son carré direct, on obtient un système associatif demosien de quatre groupes isomorphes au groupe carré de Klein.

Terminologie

NOTES

1. *Cf. Un theorèm plus général—Entropie demosienne de multigroupoïdes et de quasigroupes*—Ann. Soc. Sci. Bruxelles. **73** (1959), 302–309.
2. *Il faut entendre ici l'isomorphisme de deux complexes comme appliquant les sous-ensembles* $\Sigma_j \Delta_i^{-1} \Delta_j$ (i=constante) *les uns sur les autres.*
8. *Ne pas confondre cette notion, due à Schanffler, avec le concept usuel d'inverse.*
4. *Au sens de Schauffler.*

RÉFÉRENCES

1. Janos Aczél, *Some general methods in the theory of functional equations in one variable; new applications of functional equations*, Uspehi Mat. Nauk. (N.S.) **11** (1956), N°3, (69), 3–68.

2. ———, *Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff*, Publ. Math. Debrecen, **4** (1955), 33–42.

3. ———, *Ueber Additions-und Substraktionstheoreme*, Publ. Math. Debrecen, **4** (1956), 325–333.

4. J. Aczél et Miklós Hosszú, *On transformations with several parameters and operations in multidimensional spaces*, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, **7** (1956), 327–338.

5. Adrian A. Albert, *Quasigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., **54** (1943), 507–519.

6. Belousov, *Associativnye Sistemy* Kvazigrupp, Uspehi Math. Nauk, **13** (1958), fas. 3, (81). 243.

7. Garrett Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloqu. Publ., New-York, **25** (1948).

8. C. Burstin et W. Mayer, *Distributive Gruppen*, Journ. reine angew. Math., **160** (1929), 111–130.

9. R. Cacciopoli, *L'equazione funzionale* $f(x+y) = F[f(x), f(y)]$, Giorn. Mat. Battaglini (3), **66** (1928), 69–74.

10. A. H. Clifford et D. D. Miller, *Semi-groups having zeroïd elements*, Amer. J. Math., **70** (1948), 117–125.

11. P. M. Cohn, *Embeddings in semigroups with one-sided division*, J. London Math. Soc., **31** (1956), 169–181.

12. Karel Drbohlav, *Gruppenartige Multigruppen*, Чехословацкий Математический Журнал, T. 7 (82), (1957), Прага, 183–190.

13. Trevor Evans, *A note on the associative law*, Journ. London Math. Soc., **25** (1950), 196–201.

14. Ladislaus Fuchs, *On mean systems*, Acta. Math. Ac. Sci. Hungaricae, **1** (1950), 303–320.

15. Michel Ghermănescu, *Sur un système d'équations fonctionnelles*, Acad. Republ. Pop. Romîne. Bul. Sti. Sect. Sti. Mat. Fiz., **5** (1953), 575–582,

16. Michel Ghermănescu, *Sur quelques équations fonctionnelles à deux variables*, Ibid., **7** (1955), 963–975.
17. S. Golab, *Zum distributiven Gesetz der reellen Zahlen*, Studia Math., **15** (1956), 353–358.
18. Hermann Grassmann, *Gesammelte Werke*, Leipzig (1894), I, 1.
19. Béla Gyires, *Ueber die Grenzwerte von Matrizen, die den Cauchyschen Funktionalgleichung genügen*, Acta Univers. Debrecen, **1** (1954), 136–144.
20. Philip Hall, *On a theorem of Frobenius*, Proc. London Math. Soc., (2) **40** (1936), 468–501.
21. Helmut Hasse, *Höhere Algebra*, II, Berlin (1951).
21bis. ———, *Jnvariante Kennzeichung Galoischer Körper mit vorgegebener Galoisgruppe*, J. reine angew. Math, **187** (1950), 14–43.
22. Miklós Hosszú, *On the functional equation of auto-distributivity*, Publ. Math. Debrecen, **3** (1953), 83–86.
23. ———, *On the functional equation of distributivity*, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, **4** (1953), 159–167.
24. ———, *On the functional equation of transitivity*, Acta Scientiarum Math., **15** (1954), 203–208.
25. ———, *Some functional equations related with the associative law*, Publ. Math. Debrecen, **3** (1954), 205–214.
26. ———, Lettre à l'auteur du 10 Juillet 1958, et *Belouszov* egy *tételéröl és annak néhány alkalmazásáról*. M. Tud. Akad. Mat. Fiz. Osztály Közleményei, **9** (1959), 51–56.
27. Andor Kertész et Albert Sade, *On some mappings of groupoids into themselves; nuclei and their $\langle\lambda, \mu\rangle$ isotopes*, Publ. Math. Debrecen, **6** (1959), 000–000.
28. Bronislaw Knaster, *Sur une équivalence pour les fonctions*, Colloquium Math., **2** (1949), 1–4.
29. Svetozar Kurepa, *On some functional equations*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. Drustwo Mat. Fiz. Hrvatske, Ser. II, **11** 1956), 3–5.
30. Albert Sade, *Groupoïdes automorphes par le groupe cyclique*, Canadian J. Math., **9** (1957), 321–335.
31. ———, *Groupoïdes orthogonaux*, Publ. Math. Debrecen, **5** (1958), 229–240.
32. ———, *Groupoïdes automorphes par le groupe géométrique et quasigroupes "endo"*, Canadian J. Math., **10** (1958), 294–320.
33. ———, *Quelques remarques sur l'isomorphisme et l'automorphisme des quasigroupes*, Abhand. Math. Semin. Univ. Hamburg, **22** (1958), 84–91.
34. ———, *Quasigroupes parastrophiques. Expressions et identités*, Math. Nachrichten, **20**, (1959), 73-106.
35. ———, *Quasigroupes obéissant à certains lois*, Istanbul üniversitesi Fen Fakültesi Mecmuasi, Ser. A, **22** (1959), 151–184.
36. ———, *Groupoïdes en relation associative et semigroupes mutuellement associatifs*, Publ. Math. Debrecen, **7** (1961).
37. ———, *Système demosien associatif de multigroupoïdes avec un scalaire non singulier*. Ann. Soc. Sci. Bruxelles. **73** (1959), 231–234.
38. ———, *Solution générale de l'équation de transitivité sur un ensemble quelconque avec division bilatère*,Bull. Acad. Roy. Belgique. Classe des Sci., 5e S. **45** (1959), 451–455.
39. ———, *Multigroupoïde sur un système demosien de groupoïdes*, Colloquium Math. Vol. VIII, fasc. 1 (1960).
40. Rudolf Schauffler, *Ueber die Bildung von Codewörtern*, Arch. elektr. Uebertragung, **10** (1956), 303–314.
41. ———, *Die Assoziativität im Ganzen, besonders bei Quasigruppen*, Math. Zeitsch., **67** (1957), 428–435.
42. H. F. Scherk, *Analytisch-combinatorisch Zätze*, Journ. reine angew. Math., **11** (1834), 226–240.

43. Th. Skolem, *The abundance of arithmeticfunctions satisfying some simple functional equations*, Kongelige Norske Vid. Sels. forhandlinger, **29** (1956), 47–53.
44. Gabriel Thierrin, *Sur une classe de demi-groupes inversifs*, C. R. Acad. Sci. Paris, **234** (1952), 177–179.
45. ———, *Demi-groupes inversés et rectangulaires*, Bulletin Acad. Roy. Belgique. Classe des Sci. 5e S., **41** (1955), 83–92.