Journal of the Institute of Polytechnics,
Osaka City University,
Vol. 4, No. 2, Series A

# *Sur l'intégrale d'énergie dans la théorie du potentiel*

Par Nobuyuki NINOMIYA

(Received Sept, 15, 1954)

Dans cette note, on considère les potentiels généralisés dans l'espace euclidien $R^m$ à $m(\geqq 2)$ dimensions. Le $\Phi$-potentiel généralisé d'une distribution de masses $\mu$ (mesure de Radon) est une fonction bien détérminée par l'intégrale de Stieltjes du type

$$U^{\mu}(M)=\int\Phi\,(MQ)\;d\,\mu\,(Q)\,,$$

où $MQ$ désigne la distance du point $M$ au point $Q$. La fonction fondamentale $\Phi$, s'appelée le noyau des potentiels, satisfait aux conditions suivantes[1];

(A) $\Phi(r)$ est la fonction continue et positive pour $0<r<+\infty$, et $\lim\limits_{r\to 0}\Phi(r)=+\infty$.

(B) $$\int_0^1\Phi(r)\cdot r^{m-1}\,dr<+\infty\,.$$

Etant donnée une mesure positive, on appelle son support le complémentaire du plus grand ensemble ouvert sur lequel elle ne porte aucune mesure. Les mesures positives qu'on considère ne seront pas toujours du support compact, mais se restreignent aux cas où les $\Phi$-potentiels sont $\not\equiv+\infty$.

Si l'intégrale d'énergie

$$I(\sigma)=\int U^{\sigma}(P)\;d\sigma(P)=\iint\Phi(PQ)\;d\sigma(Q)\;d\sigma(P)$$

de toute mesure $\sigma$ (signe quelconque) dans $R^m$, lorsqu'elle existe, est toujours $\geqq 0$, le noyau $\Phi(r)$ est dit de type positif dans $R^m$. Encore si, ajoutant à cela, l'égalité n'a lieu qu'au cas de $\sigma\equiv 0$, le noyau $\Phi(r)$ est dit de satisfaire au principe d'énergie dans $R^m$. Par exemple, le noyau d'ordre $\alpha$ $(0<\alpha<3)$ satisfait au principe d'énergie dans $R^3$ [2]. Le noyau $\Phi(r)$ qui est une fonction positive et convexe de $\frac{1}{r}$ pour $0<r<+\infty$ l'est aussi[3]. Plus généralement, le noyau $\Phi(r)$ tel que $\Phi(r)\cdot r^{m-2}$ soit

1) La condition (B) est nécessaire pour que la $\Phi$-capacité des ensembles soit $\not\equiv 0$. K. Kunugui; Etude sur la théorie du potentiel généralisé, Osaka Math. Jour., **2**, 1950, n° 1, pp. 63–103. Voir p. 69.
2) O. Frostman; Potentiel d'équilibre ……, Thèse Lund, 1935, Voir pp. 28–33.
3) K. Kunugui; loc. cit., Voir pp. 88–96.
N. Ninomiya; Equilibrium Potentials and Energy Integrals, Proc. Jap. Acad., **26**, 1950, n° 1, pp. 1–16.

une fonction monotone décroissante et positive pour $0 < r < +\infty$ l'est aussi dans $R^m$[4]. Evidemment, deux résultats contiennent le cas du noyau d'ordre $\alpha$ $(1 \leqq \alpha < 3)$ dans $R^3$. Le but de cette note est d'étudier un critère pour les noyaux de type positif ou satisfaisant au principe d'énergie. Il est désirable sans doute d'exprimer les résultats sous des conditions pour $\Phi(r)$, mais il semble très difficile. On donne les résultats sous une forme du principe du maximum pour les $\Phi$-potentiels.

THÉORÈME 1. *Pour que le noyau $\Phi(r)$ soit de type positif dans $R^m$, il faut et il suffit que tout $\Phi$-potentiel possède la propriété suivante;*

*Dans $R^m$, soient $\mu$ et $\nu$ des mesures positives du support compact et d'énergie finie. Si $U^\mu(M) \leqq U^\nu(M)$ presque partout pour $\mu$ sur son support, l'inégalité a lieu aussi au moins en un point du support de $\nu$.*

THÉORÈME 2. *Pour que le noyau $\Phi(r)$ satisfasse au principe d'énergie dans $R^m$, il faut et il suffit que tout $\Phi$-potentiel possède la propriété suivante;*

*Dans $R^m$, soient $\mu$ et $\nu$ des mesures positives distinctes d'énergie finie. Si $U^\mu(M) \leqq U^\nu(M)$ presque partout pour $\mu$ sur son support, on a $U^\mu(M) < U^\nu(M)$ sur un ensemble de mesure positive pour $\nu$.*

En observant l'intégrale d'énergie de $\mu-\nu$, on verra immédiatement que les conditions des théorèmes sont nécessaires. D'autre part, en utilisant l'idée[5] grâce à laquelle j'ai avant montré le principe d'énergie, on peut démontrer que les conditions des théorèmes sont suffisantes.

Soient $E_1$ et $E_2$ deux ensembles boréliens disjoints de $\Phi$-capacité positive. Pour deux mesures positives $\mu$ et $\nu$ portées par $E_1$ et par $E_2$ respectivement, posons

$$G(\mu, \nu) = \frac{\int U^\mu \, d\mu \times \int U^\nu \, d\nu}{\left(\int U^\mu \, d\nu\right)^2} .$$

On appelle une paire minimale sur $E_1$ et $E_2$ $(\mu_0, \nu_0)$ pour laquelle $G(\mu, \nu)$ est minimum parmi toutes les paires $(\mu, \nu)$ de deux mesures susmentionnées. Etant donnée une mesure quelconque $\sigma$ $(\neq 0)$ d'énergie finie, on peut trouver deux ensembles boréliens disjoints $E_1$ et $E_2$ de $\Phi$-capacité positive et deux mesures positives $\mu$ et $\nu$ portées par $E_1$ et par $E_2$ respectivement telles que $\sigma = \mu-\nu$. Pour prouver

$$I(\sigma) = \int U^\mu d\mu - 2\int U^\mu d\nu + \int U^\nu d\nu \geqq 0 \ \ (\text{ou} > 0),$$

il suffit de prouver $G(\mu, \nu) \geqq 1$ (ou $> 1$). Pour cela, voici un lemme rapporté autrefois[6].

4) T. Ugaheri; On the general capacities and potentials, Bull. Tokyo Inst. Tech., 4, 1953, pp. 149-179. Voir pp. 168-179.

5) N. Ninomiya; loc. cit..

6) N. Ninomiya; loc. cit., Voir p. 11.

LEMME. *S'il existe une paire minimale* $(\mu_0, \nu_0)$ *sur* $E_1$ *et* $E_2$, *en posant*

$$a=\int U^{\mu_0}\,d\mu_0\ ,\ b=\int U^{\nu_0}\,d\nu_0\,,\ c=\int U^{\mu_0}\,d\nu_0$$

*et*

$$g_1(M)=c\ U^{\mu_0}(M)-a\ U^{\nu_0}(M)\ ,$$

$$g_2(M)=c\ U^{\nu_0}(M)-b\ U^{\mu_0}(M)$$

*dans la supposition* $0<a,\ b,\ c<+\infty$, $g_1(M)$ *(resp.* $g_2(M)$*) est* $\geqq 0$ *sur* $E_1$ *(resp.* $E_2$*) à l'exception d'un ensemble de* $\Phi$*-capacité nulle et* $\leqq 0$ *sur* $E_1$ *(resp,* $E_2$*) presque partout pour* $\mu_0$ *(resp.* $\nu_0$*).*

*Démonstration du théorème* 1. D'abord, lorsque $E_1$ et $E_2$ sont les compacts, on prouve

$$G_0=\inf\ G(\mu,\ \nu)\geqq 1.$$

Ici, il suffit de prendre *inf* par rapport aux mesures positives de mesure totale unité portées par $E_1$ et par $E_2$ respectivement. Alors, on a deux suites $\{\mu_n\}$ et $\{\nu_n\}$ des mesures positives de mesure totale unité telles que

$$\lim_{n\to\infty} G(\mu_n,\ \nu_n)=G_0\,.$$

A partir de chaque suite, on peut en extraire une suite partielle qui converge (vaguement) vers une mesure positive $\mu_0$ (resp. $\nu_0$). $\mu_0$ (resp. $\nu_0$) est naturellement d'énergie finie, de mesure totale unité et portée par $E_1$ (resp. $E_2$). Encore, puisque

$$G_0\leqq G(\mu_0,\ \nu_0)\leqq\lim_{n\to\infty} G(\mu_n,\ \nu_n)=G_0\,,$$

$(\mu_0,\ \nu_0)$ est une paire minimale sur $E_1$ et $E_2$. Donc, en vertu du lemme, on a

$$(1)\quad c\ U^{\mu_0}(M)\leqq a\ U^{\nu_0}(M)\ \text{sur le support de }\mu_0\,,$$

$$(2)\quad c\ U^{\nu_0}(M)\leqq b\ U^{\mu_0}(M)\ \text{sur le support de }\nu_0\,.$$

Si la condition du théorème 1 ou 2 est remplie, (1) et (2) ont lieu en même temps au moins en un point du support de $\nu_0$, ce qui entraîne

$$G_0=\frac{a\,b}{c^2}\geqq 1\,.$$

Ensuite, bien que $E_1$ ou $E_2$ ne soit pas un compact, on prouve

$$G(\mu,\ \nu)\geqq 1$$

pour toute $(\mu,\ \nu)$ des mesures positives portées par $E_1$ et par $E_2$ respectivement. Soit $\{F_{1n}\}$ une suite des sous-compacts de $E_1$ telle que $\lim_{n\to\infty}\mu(F_{1n})=\mu(E_1)$, et $\{\mu_n\}$ la suite des restrictions de $\mu$ sur $F_{1n}$. Encore, soient $\{F_{2n}\}$ et $\{\nu_n\}$ les suites obtenues de la même façon à partir de $E_2$ et de $\nu$. Alors, on a

$$G(\mu, \nu) = \lim G(\mu_n, \nu_n) \geqq 1.$$

La démonstration du théorème 1 est ainsi achevée.

*Démonstration du théorème* 2. Etant donnés deux ensembles boréliens disjoints $E_1$ et $E_2$ de $\Phi$-capacité positive, on prouve que $G(\mu, \nu)$ est toujours $>1$ pour toute $(\mu, \nu)$ des mesures positives portées par $E_1$ et par $E_2$ respectivement. Si $G(\mu_0, \nu_0) = 1$ pour une paire $(\mu_0, \nu_0)$, $(\mu_0, \nu_0)$ serait une paire minimale sur $E_1$ et $E_2$. Donc, en vertu du lemme, on a

(1) $g_1(M) \leqq 0$ sur $E_1$ presque partout pour $\mu_0$,

(2) $g_2(M) \geqq 0$ sur $E_2$ à l'exception d'un ensemble de $\Phi$-capacité nulle et $g_2(M) \leqq 0$ sur $E_2$ presque partout pour $\nu_0$.

D'autre part, on a

$$c\ g_1(M) + ag_2(M) \equiv 0,$$

car

$$G(\mu_0, \nu_0) = \frac{ab}{c^2} = 1.$$

Par suite, (2) équivaut à

(2′) $g_1(M) \leqq 0$ sur $E_2$ à l'exception d'un ensemble de $\Phi$-capacité nulle et $g_1(M) \geqq 0$ sur $E_2$ presque partout pour $\nu_0$.

D'ailleurs, on a

$$g_1(M) \equiv 0$$

sur $E_2$ presque partout pour $\nu_0$, ce qui est en contradiction avec la condition du théorème 2.

*Remarque.* Rappelons un potentiel généralisé satisfaisant au

Principe du maximum de O. Frostman: Si, $\mu$ étant une mesure positive, $U^\mu(M) \leqq K$ sur le support de $\mu$, l'inégalité a lieu dans l'espace entier.

ou

Principe du maximum de H. Cartan: Si, $\mu$ étant une mesure positive d'énergie finie, $U^\mu(M) \leqq U^\nu(M)$ presque partout pour $\mu$, l'inégalité a lieu dans l'espace entier.

On verra facilement que le noyau $\Phi(r)$ du tel potentiel est nécessairement de type positif.