Bettaïeb, K.
Osaka J. Math.
46 (2009), 317–326

SUR LES REPRÉSENTATIONS ELLIPTIQUES DU GROUPE $SL(n)$ p-ADIQUE

KAREM BETTAÏEB

(Received January 8, 2008)

Abstract

The paper is devoted to classify all irreducible tempered representations of $SL(n)$ p-adic which appear in the spectral side of J. Arthur's local trace formula. We give description of such representations which are elliptic or irreducibly induced from elliptic representations of proper Levi subgroups with certain condition on the Weyl group.

1. Introduction

Soit G le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique réductif connexe p-adique. Notons G^e l'ensemble des points réguliers elliptiques de G. Une représentation irréductible π de G est dite elliptique si elle est tempérée et si la restriction de son caractère à G^e est non nulle. Notons $\mathcal{E}_{\text{ell}}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles elliptiques de G.

On se donne une paire discrète (M, σ) de G, c'est-à-dire que M est un sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique rationnel de G et σ une classe de représentation irréductible de carré intégrable de M modulo la composante déployée A_M du centre de M. On dit que σ se ramifie dans G s'il existe un élément non trivial du groupe de Weyl, $W^G(A_M)$, de (G, A_M) qui stabilise σ. D'autre part un élément du groupe $W^G(A_M)$ est dit elliptique s'il ne fixe aucun point du complémentaire de $\mathfrak{a}_G$ dans $\mathfrak{a}_M$. La paire discrète (M, σ) de G est alors dite ramifiée elliptique dans G s'il existe un élément elliptique du groupe de Weyl de (G, A_M) qui stabilise σ.

L'objet, principal de ce papier est la description de l'ensemble des classes d'équivalence des représentations π de $SL(n)$ qui sont composantes irréductibles des représentations induites $\mathcal{I}nd_{P=MN}(\sigma)$, lorsque (M, σ) décrit les paires ramifiées elliptiques dans $SL(n)$, qu'on note $\mathcal{E}_{\text{disc}}(SL(n))$.

Ainsi, on verra (Théorème 2) que toute représentation π de $\mathcal{E}_{\text{disc}}(SL(n))$ est ou bien dans $\mathcal{E}_{\text{ell}}(G)$ ou bien elle est de la forme $i_{G,L}(\tau)$ où L un Lévi propre de G et $\tau \in \mathcal{E}_{\text{ell}}(L)$ vérifiant une certaine condition de ramification elliptique.

2000 Mathematics Subject Classification. 22E35, 22E50.

2. Préliminaire

Soit **G** un groupe algébrique connexe réductif défini sur un corps local non archimédien F de caractéristique 0. Notons $G := G(F)$ l'ensemble des points F-rationnels de **G**. On fixe une composante de Lévi F-rationnelle $\mathbf{M_0}$ d'un certain sous-groupe parabolique minimal P_0 de **G** défini sur F.

Nous appellerons sous-groupe de Lévi de **G** la composante de Lévi **M**, contenant $\mathbf{M_0}$, d'un sous-groupe parabolique rationnel **P** de **G**. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des sous-groupes de Lévi de G contenant M_0 et $\mathcal{L}_0 = \{L \in \mathcal{L} \mid L \neq G\}$. La composante déployée de M (resp. M_0) est notée A_M (resp. A_0) et $\mathfrak{a}_M$ désigne l' "algèbre de Lie" de A_M. On note $\Phi(G, A_0)$ le système des racines de A_0 dans G et $\Delta \subset \Phi(G, A_0)$ un système de racines simples. Lorsque $M = M_\theta$ ($\theta \subset \Delta$) est dans $\mathcal{L}$ et ayant $A = A_\theta =: \bigcap_{\alpha\in\theta}(Ker\, \alpha \cap A_0)^0$ pour composante déployée, on note $W(A) = W^G(A)$ le groupe de Weyl de (G, A). Pour $w \in W(A)$, choisissons $\tilde{w}$ un représentant de w dans $N_G(A)$.

Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de M dans un espace V, on définit une nouvelle représentation ${}^w\pi$ par :

$$ {}^w\pi(m) = \pi(\tilde{w}^{-1} m \tilde{w}) \, ; \quad m \in M. $$

La classe de ${}^w\pi$ est indépendante du représentant $\tilde{w}$. On définit :

$$ W(\pi) := W^G(\pi) = \{w \in W(A) \, ; \, {}^w\pi \cong \pi\} $$

le stabilisateur de π dans $W(A)$. On dit que π se *ramifie* dans G si $W(\pi)$ est non trivial. Notons $\mathcal{I}nd_P^G(\pi)$, $P = P_\theta = M_\theta N_\theta$, la représentation de G unitairement induite par π. Du moment que la classe de cette représentation dépend seulement de M et non de P, elle sera notée $i_{G,M}(\pi)$.

Notons $\mathcal{E}_{\text{temp}}(G)$ l'ensemble de classes d'équivalence des représentations irréductibles *tempérées* de G et $\mathcal{E}_2(G)$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}_{\text{temp}}(G)$, formé des représentations irréductibles de *carré intégrable* de G modulo A_G. On note, aussi, $\mathcal{E}_{\text{ell}}(G)$ le sous-ensemble des éléments *elliptiques* de $\mathcal{E}_{\text{temp}}(G)$, [2] et [7]. On sait que $\mathcal{E}_{\text{ell}}(G)$ est contenu dans $\mathcal{E}_{\text{temp}}(G)$. On dit que (M, σ) est une *paire discrète* de G si $M \in \mathcal{L}$ et $\sigma \in \mathcal{E}_2(M)$.

Fixons une paire discrète (M, σ) de G. Pour tout $w \in W(\sigma)$ on sait construire un opérateur d'entrelacement normalisé $\mathcal{A}(w, \sigma)$ de $\mathcal{I}nd_{P=MN}^G(\sigma)$ dans elle-même [6]. On note $C(\sigma)$ l'algèbre commutante de $\mathcal{I}nd_{P=MN}^G(\sigma)$ et $\mathcal{E}_\sigma(G)$ l'ensemble des constituants irréductibles de $i_{G,M}(\sigma)$. Pour $\beta \in \Phi(P, A)$, soient A_β le tore $(Ker\, \beta \cap A)^0$ et M_β le centralisateur de A_β dans G ; alors M est un sous-groupe de Lévi propre maximal de M_β. Notons $\mu_\beta(\sigma)$ la densité de Plancherel attachée à $i_{M_\beta,M}(\sigma)$ [8]. Définissons :

$$ \Delta'(\sigma) = \{\beta \in \Phi(P, A) \, ; \, \mu_\beta(\sigma) = 0\}, $$
$$ \Re(\sigma) := \Re^G(\sigma) = \{w \in W(\sigma) \, ; \, w\beta > 0, \ \forall \beta \in \Delta'(\sigma)\}. $$

Enfin notons $W'(\sigma)$ le sous-groupe de $W(\sigma)$ engendré par les réflexions s_β ; $\beta \in \Delta'(\sigma)$.

On sait que : $W(\sigma) = \Re(\sigma) \rtimes W'(\sigma)$ [12] et que l'ensemble $\{\mathcal{A}(w, \sigma) ; w \in \Re(\sigma)\}$ forme une base de l'algèbre commutante $C(\sigma)$, [9, 12].

De plus étant donnés $w_1, w_2 \in \Re(\sigma)$, il existe un cocycle

$$\eta : \Re(\sigma) \times \Re(\sigma) \to \mathbb{C}^\times$$

satisfaisant :

$$\mathcal{A}(w_1 w_2, \sigma) = \eta(w_1, w_2)\mathcal{A}(w_1, \sigma)\mathcal{A}(w_2, \sigma).$$

Ainsi, vue comme algèbre, $C(\sigma)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}[\Re(\sigma)]_\eta$ du groupe $\Re(\sigma)$ tordue par le cocycle η [12]. De plus la multiplicité de chaque composante irréductible est égale à 1 si est seulement si $\Re(\sigma)$ est commutatif et η se déploie [9, 10]. Lorsque le cocycle se déploie, on écrira $C(\sigma) \cong \mathbb{C}[\Re(\sigma)]$.

Pour tout $w \in \Re(\sigma)$ on définit :

$$\mathfrak{a}_M^w := \{H \in \mathfrak{a}_M \ ; \ wH = H\},$$
$$\Re(\sigma)_{\mathrm{ell}} = \{w \in \Re(\sigma) \ ; \ \mathfrak{a}_M^w = \mathfrak{a}_G\},$$
$$\mathfrak{a}_M^{\Re(\sigma)} := \bigcap_{w \in \Re(\sigma)} \mathfrak{a}_M^w.$$

DÉFINITION 1. Soit (M, σ) une paire discrète de G.

1- Un élément de $W(A)$ est dit elliptique (ou régulier) si ses seuls points fixes dans $\mathfrak{a}_M$ sont ceux de $\mathfrak{a}_G$. Ainsi on définit :

$$W(A)_{\mathrm{ell}} := W^G(A)_{\mathrm{ell}} = \{w \in W(A) \ ; \ \mathfrak{a}_M^w = \mathfrak{a}_G\}$$

l'ensemble des éléments elliptiques dans $W(A)$, et

$$W(\sigma)_{\mathrm{ell}} := W^G(\sigma)_{\mathrm{ell}} = W(\sigma) \cap W(A)_{\mathrm{ell}}.$$

2- La paire (M, σ) est dite ramifiée elliptique dans G si $W(\sigma)_{\mathrm{ell}}$ est non vide.

Dans le paragraphe suivant, on va déterminer la nature des représentations qui sont dans l'ensemble des composantes irréductibles des :

$$\mathcal{I}nd_{P=MN}^G(\sigma)$$

où (M, σ) décrit toutes les paires discrètes ramifiées elliptiques de $SL(n)$.

Appelons cet ensemble $\mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G)$. Il est clair que $\mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G) \subset \mathcal{E}_{\mathrm{temp}}(G)$. L'ensemble $\mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G)$ apparaît dans la partie spectrale de la formule des traces locale de J. Arthur [1].

3. $\mathcal{E}_{\mathbf{disc}}(\mathbf{SL}_n)$

On fixe F comme dans §2, on note $\mathbf{G}_n = \mathbf{SL}_n$, $\tilde{\mathbf{G}}_n = \mathbf{GL}_n$ défini sur F. Aussi on note $G_n = \mathbf{G_n}(F)$, $\tilde{G}_n = \tilde{\mathbf{G}}_n(F)$. Pour n fixé, on note ces deux derniers groupes respectivement G et $\tilde{G}$.

Soit $\tilde{A}_0 \subset \tilde{G}$ le sous-groupe des matrices diagonales ; posons : $A_0 = \tilde{A}_0 \cap G$. Soit U le sous-groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures de $\tilde{G}$, alors $U \subset G$ et $\tilde{B} = \tilde{A}_0 U$ est un sous-groupe de Borel de $\tilde{G}$ tandis que $B = A_0 U$ en est un de G. Notons $\Phi(G, A_0) = \Phi(\tilde{G}, \tilde{A}_0)$ l'ensemble des racines de A_0 dans G et Δ le système de racines simples donné par B.

Soit $\theta \subset \Delta$, notons $\tilde{P}_\theta = \tilde{M}_\theta N_\theta$ le sous-groupe parabolique standard de $\tilde{G}$ associé à θ, alors $P_\theta = \tilde{P}_\theta \cap G = M_\theta N_\theta$ (où $M_\theta = \tilde{M}_\theta \cap G$) est le sous-groupe parabolique standard de G associé à θ.

Rappelons qu'on paramétrise les sous-groupes paraboliques standard de $\tilde{G}$, soit à l'aide des $\theta \subset \Delta$ soit à l'aide des partitions de n.

Dire $\tilde{M} = \tilde{M}_\theta$ signifie qu'il existe une partition $m_1 + m_2 + \ldots + m_q = n$ telle que :

$$\tilde{M} = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 & & & & \\ 0 & g_2 & & & & 0 \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot & 0 \\ 0 & & & & 0 & g_q \end{pmatrix} ; \; g_i \in \tilde{G}_{m_i},\ 1 \le i \le q \right\}$$

alors que :

$$\begin{aligned} M &= \tilde{M} \cap G \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 & & & & \\ 0 & g_2 & & & & 0 \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & g_q \end{pmatrix} ; \; g_i \in \tilde{G}_{m_i},\ 1 \le i \le q \ \text{ et } \ \det g_1 \ldots \det g_q = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Notons $\tilde{A}$ la composante déployée de $\tilde{M}$ et $A = \tilde{A} \cap G$ celle de M, alors :

$$\tilde{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & & & & 0 \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & 0 \\ 0 & & & & 0 & \lambda_q I_{m_q} \end{pmatrix} ; \lambda_i \in F^\times, \ 1 \leq i \leq q \right\}$$

et

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & & & & 0 \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & 0 \\ 0 & & & & 0 & \lambda_q I_{m_q} \end{pmatrix} ; \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_q^{m_q} = 1 \right\}$$

I_{m_i} étant la matrice unité $m_i \times m_i$.

Un élément de A, sera écrit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ et le groupe de Weyl $W(A) = W(\tilde{A})$ est isomorphe à un sous-groupe de S_q, le groupe des permutations de q éléments. Plus précisément $W(A)$ est engendré par les transpositions (ij) sur $\{1, 2, \ldots, q\}$ pour lesquelles $m_i = m_j$, et alors :

$$(ij) \,.\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_q) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_q).$$

Soit $\sigma \in \mathcal{E}_2(M)$, on sait, [11, Lemma 1.3] et [4], qu'il existe $\pi_\sigma \in \mathcal{E}_2(\tilde{M})$ tel que σ soit un constituant irréductible de la restriction de π_σ à M. De plus si $\pi'_\sigma \in \mathcal{E}_2(\tilde{M})$ est une autre telle représentation, alors il existe un caractère $\mu \in (F^\times)^\wedge$ tel que $\pi'_\sigma \cong \pi_\sigma \otimes \mu(\det)$. Afin de simplifier on écrira $\pi'_\sigma \cong \pi_\sigma \otimes \mu$.

Ecrivons $\pi_\sigma = \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \ldots \otimes \pi_q \in \mathcal{E}_2(\tilde{M})$ où chaque $\pi_i \in \mathcal{E}_2(\tilde{G}_{m_i})$; lorsque $w \in W(A)$ est vu comme une permutation de q lettres alors :

$${}^w\pi_\sigma = \pi_{w(1)} \otimes \pi_{w(2)} \otimes \ldots \otimes \pi_{w(q)}.$$

Soit (M, σ) une paire discrète de G. Alors le groupe de réductibilité $\Re(\sigma)$ est commutatif et $C(\sigma) \cong \mathbb{C}[\Re(\sigma)]$, [5, Corollaire 3-2, Théorème 2.4].

Remarquons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $W^G(A)_{\mathrm{ell}}$ soit non vide est que M doit être associé à une partition homogène de n, i. e. il existe p/n ($n = pq$) tel que $M = M_\alpha$ avec $\alpha = \underbrace{(p, p, \ldots, p)}_{q\text{-fois}}$. Dans toute la suite on notera $M_p = M_p^n$ le Lévi de G associé à la partition homogène de n, dont le pas est p.

Soit $\tau \in \mathcal{E}_{\mathrm{temp}}(L)$ où $L \in \mathcal{L}$. On sait que, modulo conjugaison, il existe une unique paire discrète (M, σ) de L tel que τ soit une composante irréductible de $i_{L,M}(\sigma)$ et par suite, [3, Proposition 3], on peut définir :

$$W'(\tau) := \{w_{|\mathfrak{a}_L} \mid w \in W'(\sigma),\ w(\mathfrak{a}_L) = \mathfrak{a}_L\}$$

ainsi que l'ensemble $W'(\tau)_{\mathrm{ell}} := W'(\tau) \cap W(A_L)_{\mathrm{ell}}$.

Définissons :

$\mathcal{E}_{\mathrm{irr,ell}}(G)$ l'ensemble (des classes d'équivalence) des représentations π de G qui sont de la forme $i_{G,L}(\tau)$ où $\tau \in \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(L)$ et $L \in \mathcal{L}_0$ vérifiant $W'(\tau)_{\mathrm{ell}}$ non vide.

Théorème 2.

$$\mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G) = \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G) \cup \mathcal{E}_{\mathrm{irr,ell}}(G).$$

Démonstration. Soit $\pi \in \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)$. on sait, [1, Proposition 2.1], qu'il existe une unique paire (M_p, σ) où M_p est un sous-groupe de Lévi de G correspondant à la partition $\alpha = \underbrace{(p,\ p, \ldots,\ p)}_{q\text{-fois}}$ de n et $\sigma \in \mathcal{E}_2(M_p)$ vérifiant $\Re(\sigma)_{\mathrm{ell}}$ non vide telle que π soit une composante irréductible de $i_{G,M_p}(\sigma)$. Comme $\Re(\sigma)_{\mathrm{ell}} \subset W(\sigma)_{\mathrm{ell}}$, cela implique en particulier que $W(\sigma)_{\mathrm{ell}}$ est non vide, d'où $\pi \in \mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G)$.

Pour compléter la description de $\mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G)$, on va préciser le complémentaire de $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)$ dans $\mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G)$. La démonstration du théorème revient alors de prouver que :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G) \setminus \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G) = \mathcal{E}_{\mathrm{irr,ell}}(G).$$

Montrons l'inclusion : $\mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G) \setminus \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G) \subset \mathcal{E}_{\mathrm{irr,ell}}(G)$.

Soit $\pi \in \mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G) \setminus \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)$, alors modulo conjugaison, il existe une unique paire (M_p, σ), $\sigma \in \mathcal{E}_2(M_p)$ et $M_p \in \mathcal{L}$ correspondent à la partition $\alpha = \underbrace{(p,\ p, \ldots,\ p)}_{q\text{-fois}}$ de n tel que $\pi \in \mathcal{E}_{\sigma}(G)$. Le fait que $\pi \in \mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G) \setminus \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)$ implique que : $W(\sigma)_{\mathrm{ell}}$ est non vide et $\Re(\sigma)_{\mathrm{ell}}$ est vide à partir de la définition de $\mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G)$ et Proposition 2.1 de [1].

Notre premier but est de prouver l'existence de $r_0 \in \Re(\sigma)$ satisfaisant à : $\mathfrak{a}_{M_p}^{r_0} = \mathfrak{a}_{M_p}^{\Re(\sigma)}$.

Fixons une $\pi_\sigma \in \mathcal{E}_2(\tilde{M}_p)$ (voir §2) et prenons $t \in W(\sigma)_{\mathrm{ell}}$. Il existe, alors, $\eta \in (F^\times)^\wedge$ tel que $\pi_\sigma \otimes \eta = {}^t\pi_\sigma$ [5, Lemma 2.3]. Sans perte de généralité supposons que $t = (12 \ldots q)$. Ainsi, [11, Lemme 2-2], il existe $\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}_2(\widetilde{GL}_p)$ vérifiant : $\tilde{\sigma} \otimes \eta^q \cong \tilde{\sigma}$ telle que :

$$\pi_\sigma = \tilde{\sigma} \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta) \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta^2) \otimes \ldots \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta^{q-1}).$$

Décomposons t sous la forme :

$$t = w'r, \quad w' \in W'(\sigma),\ r \in \Re(\sigma),$$

ainsi, w' est forcément non trivial parceque sinon on aurait $t = r$ est donc $r \in \Re(\sigma)_{\mathrm{ell}}$. Comme $\Re(\sigma)_{\mathrm{ell}}$ est vide, on aura $\Delta'(\sigma) \neq \emptyset$, [1, §2].

Or $\Delta'(\sigma) \neq \emptyset$ équivaut à l'existence de $j < q$ tel que $\tilde{\sigma} \otimes \eta^j \cong \tilde{\sigma}$ [5, Corollaire 2-2]. Posons :

$$j_0 = \inf\{j < q \ ; \ \tilde{\sigma} \otimes \eta^j = \tilde{\sigma}\}.$$

Remarquons que j_0 divise q. Supposons que $q = sj_0$, ainsi π_σ s' écrira :

$$\pi_\sigma = \underbrace{[\tilde{\sigma} \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta) \otimes \ldots \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta^{j_0 - 1})]}_{\text{1-fois}} \otimes \ldots \otimes \underbrace{[\tilde{\sigma} \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta) \otimes \ldots \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta^{j_0 - 1})]}_{s\text{-fois}}.$$

Ainsi on retrouve que [5, Théorème 2-6] :

$$\Re(\sigma) = \{w_{\eta^k} \ ; \ 1 \leq k \leq j_0\},$$

où $w_{\eta^k} \in \Re(\sigma)$ est associé à η^k ; $1 \leq k \leq j_0$, [5, Théorème 2-6].

Un calcul facile nous donne que : $\mathfrak{a}_{M_p}^{w_\eta} = \bigcap_{k=1}^{k=j_0} \mathfrak{a}_{M_p}^{w_{\eta^k}}$. De ce fait, [6, Lemma 1.3], π est de la forme $i_{G,L}(\tau)$ où $\tau \in \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(L_{j_0}) \cap \mathcal{E}_\sigma(L_{j_0})$ et $L_{j_0} \in \mathcal{L}_0$. Il nous reste maintenant à montrer que $W'(\tau)_{\mathrm{ell}}$ est non vide. En effet, remarquons que la représentation :

$$\pi_\tau := i_{\tilde{L}_{j_0}, \tilde{M}_p}(\pi_\sigma)$$

est de la forme :

$$\pi_\tau = \underbrace{\tilde{\tau} \otimes \ldots \otimes \tilde{\tau}}_{s\text{-fois}}$$

où :

$$\tilde{\tau} = i_{\tilde{G}_{j_0}, \tilde{M}_p^{j_0}}[\tilde{\sigma} \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta) \otimes \ldots \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta^{j_0 - 1})].$$

De plus on a :

$$\tau \hookrightarrow i_{L_{j_0}, M_p}(\sigma) \hookrightarrow i_{L_{j_0}, M_p}(\pi_{\sigma|M}) \cong i_{\tilde{L}_{j_0}, \tilde{M}_p}(\pi_\sigma)_{|L_{j_0}} = \pi_{\tau|L_{j_0}}$$

ce qui implique que la restriction de π_τ à L_{j_0} contient τ et donc, [11, Lemma 10] :

$$\begin{aligned} W'(\tau) &= \left\{ w_{|\mathfrak{a}_{L_{j_0}}} \ \middle| \ w \in W'(\sigma), \ w(\mathfrak{a}_{L_{j_0}}) = \mathfrak{a}_{L_{j_0}} \right\} \\ &= \left\{ w_{|\mathfrak{a}_{L_{j_0}}} \ \middle| \ {}^w\pi_\sigma \cong \pi_\sigma, \ w(\mathfrak{a}_{L_{j_0}}) = \mathfrak{a}_{L_{j_0}} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi $(12 \ldots s) \in W'(\tau)_{\mathrm{ell}}$.

Ce qui montre bien que $\mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G) \setminus \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G) \subset \mathcal{E}_{\mathrm{irr,ell}}(G)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{E}_{\mathrm{irr,ell}}(G) \subset \mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G) \setminus \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)$.

Soit $\pi = i_{G,L}(\tau) \in \mathcal{E}_{\mathrm{irr,ell}}(G)$. Il est clair que $\pi = i_{G,L}(\tau) \notin \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)$. Montrons que $\pi \in \mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G)$.

Par hypothèse $W'(\tau)_{\mathrm{ell}}$ est non vide, donc L est associé à une partition homogène de n ; i. e., $L = L_m = L_\alpha$ où $\alpha = \underbrace{(m, m, \ldots, m)}_{q\text{-fois}}$ avec $n = mq$.

D'autre part $\tau \in \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(L)$, implique l'existence d'une paire discrète (M_β, σ) de L, vérifiant $\Re^L(\sigma)_{\mathrm{ell}}$ non vide et que τ est une composante irréductible de $i_{L_m,M_\beta}(\sigma)$, [1, Proposition 2.1]. Or $\Re^L(\sigma)_{\mathrm{ell}}$ non vide implique que la partition β doit être de la forme :

$$\beta = (\underbrace{d_1, d_1, \ldots, d_1}_{q_1\text{-fois}}, \underbrace{d_2, d_2, \ldots, d_2}_{q_2\text{-fois}}, \ldots, \underbrace{d_p, d_p, \ldots, d_p}_{q_p\text{-fois}})$$

où $d_i/m,\ \forall 1 \leq i \leq p$.

Sans perte de généralité prenons $r = (1\,.\,2 \ldots q_1)(q_1+1\,.\,q_1+2 \ldots q_2) \ldots (q_{p-1}+1 \ldots q_p) \in \Re^L(\sigma)_{\mathrm{ell}}$ et fixons $\pi_\sigma \in \mathcal{E}_2(\tilde{M}_\beta)$ où $M_\beta = \tilde{M}_\beta \cap G$ tel que la restriction de π_σ à M_β contient σ. Ainsi, pour un certain $\eta \in (F^\times)^\wedge$, la représentation π_σ est de la forme :

$$\pi_\sigma = (\tilde{\sigma}_1 \otimes \tilde{\sigma}_1 \otimes \eta \otimes \ldots \otimes \tilde{\sigma}_1 \otimes \eta^{q_1-1}) \otimes \ldots \otimes (\tilde{\sigma}_p \otimes \tilde{\sigma}_p \otimes \eta \otimes \ldots \otimes \tilde{\sigma}_p \otimes \eta^{q_p-1})$$

où $\tilde{\sigma}_i \in \mathcal{E}_2(\tilde{G}_{d_i})$ vérifiant $\tilde{\sigma}_i \otimes \eta^{q_i} \cong \tilde{\sigma}_i$ et $\tilde{\sigma}_i \otimes \eta^{q_i-j} \ncong \tilde{\sigma}_i$; $1 \leq j \leq q_i - 1$, et $1 \leq i \leq p$.

Remarquons que : $\pi_\tau := i_{\tilde{L}_m,\tilde{M}_\beta}(\pi_\sigma) \cong \tilde{\tau}_1 \otimes \tilde{\tau}_2 \otimes \ldots \otimes \tilde{\tau}_p$ où

$$\tilde{\tau}_i \cong i_{\tilde{G}_m,\tilde{M}^m_{d_i}}[\tilde{\sigma}_i \otimes (\tilde{\sigma}_i \otimes \eta) \otimes \ldots \otimes (\tilde{\sigma}_i \otimes \eta^{q_i-1})]$$

or

$$\sigma \hookrightarrow \pi_\sigma|_{M_\beta}$$

ce qui implique :

$$\tau \hookrightarrow i_{L_m,M_\beta}(\sigma) \hookrightarrow i_{L_m,M_\beta}(\pi_\sigma|_{M_\beta}) \cong i_{\tilde{L}_m,\tilde{M}_\beta}(\pi_\sigma)|_{L_m}.$$

D'où

$$\tau \hookrightarrow \pi_\tau|_{L_m}.$$

Or $W'(\tau)_{\mathrm{ell}}$ est non vide, ce qui implique que $\tilde{\tau}_i \cong \tilde{\tau}_j,\ \forall 1 \leq i \leq j \leq p$ et par suite $\sigma_i \cong \sigma_j,\ 1 \leq i \leq j \leq p$.

Ainsi π_σ est de la forme :

$$\pi_\sigma = [\tilde{\sigma} \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta) \otimes \ldots \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta^{q_1-1})] \otimes \ldots \otimes [\tilde{\sigma} \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta) \otimes \ldots \otimes (\tilde{\sigma} \otimes \eta^{q_p-1})]$$

et alors $r = (1\,.\,2 \ldots q_1)(q_1+1\,.\,q_1+2 \ldots q_2) \ldots (q_{p-1}+1 \ldots q_p) \in \Re(\sigma)$, $w_o = (1\,.\,q_1+1\,.\,q_2+1 \ldots q_{p-1}+1) \in W'(\sigma)$ et que $w_0 r \in W(\sigma)_{\mathrm{ell}}$ et alors $\pi \in \mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G)$. $\square$

On vient de voir que $\mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G) = \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G) \cup \mathcal{E}_{\mathrm{irr,ell}}(G)$. Ainsi afin de décrire $\mathcal{E}_{\mathrm{disc}}(G)$ il nous reste à déterminer $\mathcal{E}_{\mathrm{irr,ell}}(G)$.

Proposition 3. *Soit $\pi \in \mathcal{E}_{\mathrm{irr,ell}}(G)$ alors il existe un entier p, $p \neq n$ qui divise n $(n = pq)$, $\tilde{\tau} \in \mathcal{E}_2(GL_p)$ et*

$$\tilde{L} = \underbrace{GL_p \times GL_p \times \ldots \times GL_p}_{q\text{-fois}}$$

tel que π soit une composante irréductible de la restriction de $\pi_{\tilde{\tau}} =: i_{\tilde{G},\tilde{L}}(\underbrace{\tilde{\tau} \otimes \tilde{\tau} \otimes \ldots \otimes \tilde{\tau}}_{q\text{-fois}})$ à G.

Démonstration. Se déduit à partir de la définition de $\mathcal{E}_{\mathrm{irr,ell}}(G)$, de [11, Lemma 1.3] et du fait que $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(GL_p) = \mathcal{E}_2(GL_p)$. □

Références

[1] J. Arthur : *On elliptic tempered characters*, Acta Math. **171** (1993), 73–138.

[2] L. Clozel : *Invariant harmonic analysis on the Schwartz space of a reductive p-adic group*; in Harmonic Analysis on Reductive Groups (Brunswick, ME, 1989), Progr. Math. **101**, Birkhäuser Boston, Boston, MA., 1991, 101–121.

[3] L. Clozel et P. Delorme : *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs* II, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **23** (1990), 193–228.

[4] S.S. Gelbart and A.W. Knapp : *L-indistinguishability and R groups for the special linear group*, Adv. in Math. **43** (1982), 101–121.

[5] D. Goldberg : *R-groups and elliptic representations for* SL_n, Pacific J. Math. **165** (1994), 77–92.

[6] R.A. Herb : *Elliptic representations for* $\mathrm{Sp}(2n)$ *and* $\mathrm{SO}(n)$, Pacific J. Math. **161** (1993), 347–358.

[7] Harish-Chandra : *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Lecture Notes in Math. **162**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[8] Harish-Chandra : *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*; in Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces (Proc. Sympos. Pure Math. **26**, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973, 167–192.

[9] C.D. Keys : *On the decomposition of reducible principal series representations of p-adic Chevalley groups*, Pacific J. Math. **101** (1982), 351–388.

[10] C.D. Keys : *L-indistinguishability and R-groups for quasisplit groups* : *unitary groups in even dimension*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **20** (1987), 31–64.

[11] F. Shahidi : *Some results on L-indistinguishability for* $\mathrm{SL}(r)$, Canad. J. Math. **35** (1983), 1075–1109.

[12] A.J. Silberger : *The Knapp-Stein dimension theorem for p-adic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), 243–246.

Institut de Mathématiques de Jussieu
Laboratoire de théorie des groupes
Représentations-Applications
175, rue de Chevaleret
75013 - Paris
France
e-mail: bettaieb@math.jussieu.fr