Osaka Mathematical Journal
Vol. 5, No. 2, December, 1953

Beiträge zur Gruppentheorie V[1]
Über endliche p-Gruppen

VON OTTO GRÜN

Diese Arbeit befasst sich mit der Theorie der endlichen p-Gruppen und ist ohne Kenntnis der vorhergehenden Beiträge I-IV verständlich. Dagegen wird die grundlegende Arbeit von P. Hall, A Contribution to the Theory of Groups of Prime-Power Orders,[2] als bekannt vorausgesetzt. Da ich mich ganz auf diese Arbeit stütze, habe ich mich auch in der Bezeichnungsweise völlig an sie angeschlossen und eine Tabelle der benutzten Bezeichnungen vorangestellt. Es zeigt sich auch in dieser Arbeit, welch ausserordentlich glückliche Schöpfung die Hallsche Begriffsbildung der regulären p-Gruppe war: nur mit ihrer Hilfe gelang es, mannigfache, wie ich hoffe, interessante Sätze über beliebige endliche p-Gruppen zu beweisen.

Bei meiner Untersuchung ging ich von dem Grundgedanken aus: Die regulären p-Gruppen sind ein Spezialfall allgemeiner p-Gruppen. Es liegt also nahe, für Begriffe und Sätze aus der Theorie der regulären p-Gruppen solche Begriffe und Sätze über allgemeine endliche p-Gruppen zu suchen, die spezialisiert auf reguläre p-Gruppen gerade die bekannten Sätze liefern. Hierbei zeigt sich, wie auch zu erwarten ist, dass sich die Begriffsbildungen und Sätze der Theorie der regulären p-Gruppen beim Übergang zu allgemeinen p-Gruppen sozusagen verzweigen: z. B. sind die in § 1 definierten Gruppen $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$, sowie die in § 2 definierten Gruppen $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$ sämtlich im Spezialfall der regulären Gruppe $\mathfrak{G}$ die charakteristische Untergruppe $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$. Ebenso sind die in § 1 definierten Gruppen $\mho_\mu(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}(p^\mu)$ im Spezialfall der regulären Gruppe sämtlich die charakteristische Untergruppe $\mho_\mu(\mathfrak{G})$. Die für die genannten Untergruppen im allgemeinen Fall aufgestellten Sätze sind völlig verschieden von einander, liefern aber, auf reguläre Gruppen spezialisiert, bekannte von P. Hall aufgestellte Sätze. Es wird durchweg eine endliche p-Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Exponenten p^κ der Untersuchungen zu Grunde gelegt. In § 1 werden maximale Untergruppen vom Exponenten p^μ betrachtet, d. h. Untergruppen vom Exponenten p^μ, die nicht mehr

1) Anmerkung 1).
2) Anmerkung 2).

echte Untergruppen von Untergruppen vom Exponenten p^μ sind; es ergeben sich Sätze über ihre Durchschnitte, Normalisatoren usw. und schliesslich sehr allgemeine Vertauschbarkeitssätze. Weiter werden maximale Untergruppen untersucht, deren Elemente sämtliche p^μte Potenzen in $\mathfrak{G}$ sind. Auch über Durchschnitte und Normalisatoren können Angaben gemacht werden. Schliesslich ergeben sich neue Reihen charakteristischer Untergruppen, die in interessanten Beziehungen zur Struktur von $\mathfrak{G}$ stehen. In § 2 werden neue charakteristische Untergruppen $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$, $\mu = 1, 2, \ldots$ definiert. $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$ ist die Gruppe aller Elemente $T \in \mathfrak{G}$, die mit jedem Element $S \in \mathfrak{G}$ erfüllen: $(ST)^{p^\mu} = S^{p^\mu} T^{p^\mu}$, $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$ die Gruppe aller $T \in \mathfrak{G}$, die mit jedem $S \in \mathfrak{G}$ die Gleichung $(ST)^{p^\mu} = S^{p^\mu}$ erfüllen. Es ist $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}) \geqq \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$ besteht nicht nur trivialerweise aus den Elementen der Ordnung $\leq p^\mu$ aus $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$, sondern ist $\geqq \Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$. Es ergibt sich eine Fülle von Vertauschbarkeitsbeziehungen, wie z. B. $(\mathfrak{Z}_{\lambda+1}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G})),\ H_{\lambda+1}(\mathfrak{G}(p^\mu, \nu))) = 1$, $(H_{\lambda+1}(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G}))),\ \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{G}(p^\mu, \nu))) = 1$, $\mu = 1, 2, \ldots$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $\lambda = 0, 1, \ldots$. Ein gewisser Dualismus: Ordnung p^μ-p^μte Potenz tritt mehrfach in Erscheinung in der Art, dass gewisse Sätze richtig bleiben, wenn man die Begriffe Ordnung und Potenz vertauscht. In § 3 werden schliesslich Sätze über Beziehungen der aufsteigenden Zentrenreihe zur Reihe der Potenzgruppen $\mathfrak{G}(p^\mu, \nu)$ aufgestellt.

Übersicht über die gebrauchten Bezeichnungen und Zeichen, soweit sie nicht im Text erklärt sind:

Exponent von $\mathfrak{G}$: das kgV der Ordnungen der Elemente von $\mathfrak{G}$

$\mathfrak{K}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{N})$: Ist $\mathfrak{K}(\mathfrak{P})$ eine für alle endlichen Gruppen $\mathfrak{P}$ definierte Untergruppe und $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{K}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{N})$ die eindeutig bestimmte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Bild bei der Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ die Gruppe $\mathfrak{K}(\mathfrak{g})$ ist.

$$H_\gamma(\mathfrak{G}),\ H_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G},\ H_\gamma(\mathfrak{G}) = (H_{\gamma-1}(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}), \qquad \gamma = 2, 3, \ldots$$

$c(\mathfrak{G})$ = Klasse von $\mathfrak{G}$, gleich Anzahl der von der Gruppeneins verschiedenen Untergruppen der auf-(oder ab-) steigenden Zentrenreihe.

$\mathfrak{G}(p^\mu)$ = Gruppe, die von allen p^μten Potenzen aus $\mathfrak{G}$ erzeugt wird.

$\mathfrak{G}(p^\mu, \nu)$: es sei $\mathfrak{G}(p^\mu, 1) = \mathfrak{G}(p^\mu)$, dann ist rekurrent:

$$\mathfrak{G}(p^\mu, \nu) = \{\ldots, X^{p^\mu}, \ldots\},\ X \in \mathfrak{G}(p^\mu, \nu - 1), \qquad \nu = 2, 3, \ldots$$

$\mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{U})$: Gruppe, die von den p^μten Potenzen der Elemente $\in \mathfrak{U}$ wird, wurde nur für $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ verwendet.

$\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{U})$ = Gruppe, die von allen Elementen $T \in \mathfrak{U}$ erzeugt wird, die $T^{p^\mu} = 1$ erfüllen.

Unter $\mathfrak{G}$ ist in dieser Arbeit stets eine endliche p-Gruppe vom Exponenten p^κ verstanden.

§ 1: *Maximale Untergruppen vom Exponenten $p^\mu < p^\kappa$ und maximale Untergruppen von p^μ-ten Potenzen.*

Definition I. Unter einer maximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vom Exponenten p^μ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ von Exponenten p^μ verstanden, die nicht mehr echte Untergruppe einer Untergruppe vom Exponenten p^μ von $\mathfrak{G}$ ist, $\mu \leq \kappa$. Solche Untergruppen mögen mit $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ oder kurz mit Ω_μ, wenn kein Missverständnis möglich ist, bezeichnet werden.

Offenbar gibt es nur eine einzige $\Omega_\kappa(\mathfrak{G})$, nämlich $\mathfrak{G}$ selbst.

Ist $\mathfrak{G}$ eine reguläre p-Gruppe, so gibt es zu jedem $\mu < \kappa$ ebenfalls nur eine einzige $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$.[3]

Definition II. Unter einer maximalen Untergruppe $\mho_\mu(\mathfrak{G}) = \mho_\mu$, wenn kein Missverständnis entstehen kann, sei eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ verstanden, deren Elemente sämtlich p^μ-te Potenzen in $\mathfrak{G}$ sind und die nicht mehr echte Untergruppe einer ebensolchen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, $\mu \leq \kappa$.

Offenbar gibt es nur eine einzige $\mho_\kappa(\mathfrak{G})$, nämlich die Einsgruppe $\{1\} = 1$. Ist $\mathfrak{G}$ regulär, so gibt es zu jedem $\mu < \kappa$ ebenfalls nur eine einzige $\mho_\mu(\mathfrak{G})$.[4]

1.1. *Zu jedem $\mu < \kappa$ gibt es wenigstens eine $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ bzw. $\mho_\mu(\mathfrak{G})$.*

Beweis. Da $\mathfrak{G}$ den Exponenten p^κ hat, gibt es in $\mathfrak{G}$ Elemente von der genauen Ordnung p^κ. Ist also $\mu < \kappa$, so gibt es in $\mathfrak{G}$ Elemente von der genauen Ordnung p^μ. S sei ein solches. Dann ist $\{S\}$ eine Untergruppe vom Exponenten p^μ. Entweder ist $\{S\}$ eine $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ oder es gibt eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ vom Exponenten p^μ, $\mathfrak{U} \supset \{S\}$. Dann ist entweder $\mathfrak{U}$ eine $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ oder es gibt Untergruppe $\mathfrak{U}_1$ vom Exponenten p^μ, $\mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}$ u.s.w. Da $\mathfrak{G}$ endlich ist, muss man auf diese Art eine $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ finden.

Da $\mathfrak{G}$ den Exponenten p^κ hat, gibt es in $\mathfrak{G}$ Elemente von der genauen Ordnung p^κ. S sei ein solches. Ist $\mu < \kappa$, so ist $S^{p^\mu} \neq 1$ und $\{S^{p^\mu}\}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Elemente sämtlich p^μ-te Potenzen in $\mathfrak{G}$ sind. Der weitere Beweis verläuft wie vorher für $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$. Aus dem Beweis von 1.1 folgt zugleich:

1.1.2. a) *Jede Untergruppe $\mathfrak{U}$ vom Exponenten p^μ von $\mathfrak{G}$ liegt in wenigstens einer $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$.* b) *Jede Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$, deren Elemente sämtlich p^μ-te Potenzen in $\mathfrak{G}$ sind, liegt in wenigstens einer $\mho_\mu(\mathfrak{G})$.*

1.1.3 *Jede $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ liegt als echte Untergruppe in wenigstens einer*

---

3) Anmerkung 1).

4) Anmerkung 1).

$\Omega_{\mu+1}(\mathfrak{G})$, $\mu < \kappa$.

Beweis. Auf Grund von 1.1.2. genügt es eine Untergruppe $\mathfrak{U} \supset \Omega_\mu(\mathfrak{G})$ nachzuweisen, die den Exponenten $p^{\mu+1}$ hat. $\mathfrak{N}$ sei der Normalisator in $\mathfrak{G}$ von $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$. In $\mathfrak{N}/\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ gibt es Elemente von der genauen Ordnung p. Ist $S\,\Omega_\mu(\mathfrak{G})/\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ ein solches, so hat die Gruppe $\{S, \Omega_\mu(\mathfrak{G})\}$ offenbar den Exponenten $p^{\mu+1}$. Denn jedes ihrer Elemente kann in der Form $S^\lambda T$, $T \in \Omega_\mu(\mathfrak{G})$ geschrieben werden. Da nun $(S^\lambda T)^p = T_1 \in \Omega_\mu(\mathfrak{G})$ ist, wird $(S^\lambda T)^{p^{\mu+1}} = 1$, also hat $\{S, \Omega_\mu(\mathfrak{G})\}$ höchstens den Exponenten $p^{\mu+1}$. Andererseits hat wegen der Maximaleigenschaft von $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ die Gruppe $\{S, \Omega_\mu(\mathfrak{G})\}$ auch mindestens den Exponenten $p^{\mu+1}$; also hat sie genau diesen Exponenten.

1.1.4. *Jede $\mho_\mu(\mathfrak{G})$ liegt in wenigstens einer $\Omega_{\kappa-\mu}(\mathfrak{G})$, $\mu < \kappa$.*

Beweis: Da jedes Element aus $\mho_\mu(\mathfrak{G})$ eine p^μ-te Potenz S^{p^μ} ist und $\mathfrak{G}$ den Exponenten p^κ hat, ist $(S^{p^\mu})^{p^{\kappa-\mu}} = S^{p^\kappa} = 1$, also hat $\mho_\mu(\mathfrak{G})$ höchstens den Exponenten $p^{\kappa-\mu}$, liegt demnach nach 1.1.2. a) in einer $\Omega_{\kappa-\mu}(\mathfrak{G})$.

1.1.5. *Ist $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{G}$ und $\Omega_\mu(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{U}$, so ist $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ eine $\Omega_\mu(\mathfrak{U})$.*

Beweis. $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ müsste jedenfalls in einer $\Omega_\mu(\mathfrak{U})$ enthalten sein. Diese kann aber wegen der Maximalität von $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ nicht $\supset \Omega_\mu(\mathfrak{G})$ sein.

Für die $\mho_\mu(\mathfrak{G})$ gilt kein entsprechender Satz. Denn wenn S^{p^μ} in $\mathfrak{U}$ liegt, braucht es nicht eine p^μ-te Potenz in $\mathfrak{U}$ zu sein.

1.1.6. *Jede $\mho_\mu(\mathfrak{G})$ liegt in weningstens einer $\mho_{\mu-1}(\mathfrak{G})$.*

Beweis. Jede p^μ-te Potenz S^{p^μ} ist eine $p^{\mu-1}$-te Potenz $(S^p)^{p^{\mu-1}}$. Also ist $\mho_\mu(\mathfrak{G})$ eine Gruppe von $p^{\mu-1}$-ten Potenzen und liegt daher in einer $\mho_{\mu-1}(\mathfrak{G})$.

1.1.7 *Es sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{U}_n \supset \mathfrak{U}_{n+1} = 1$ eine beliebige von $\mathfrak{G}$ nach 1 reichende Reihe ineinander geschächtelter Untergruppen. Dann gibt es für jedes $\mu \leqq \kappa$ weningstens eine $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$, so dass für jedes $\lambda = 1, \dots, n+1$: $\Omega_\mu(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{U}_\lambda = \Omega_\mu(\mathfrak{U}_\lambda)$ (d. h. gleich einer $\Omega_\mu(\mathfrak{U}_\lambda)$) ist, und wenigstens eine $\mho_\mu(\mathfrak{G})$, so dass für jedes $\lambda = 1, \dots, n+1$: $\mho_\mu(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{U}_\lambda$ eine $\mho_\mu(\mathfrak{U}_\lambda)$ enthält.*

Hierbei sei die Definition von $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ noch für $\mu > \kappa$ dahingehend erweitert, dass $\Omega_\mu(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$ für $\mu > \kappa$ ist. Entsprechend $\Omega_\mu(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$, wenn p^μ nicht kleiner als der Exponent von $\mathfrak{U}$ ist.

Bewis. Jede $\Omega_\mu(\mathfrak{U}_n)$ liegt nach 1.1.2. in einer $\Omega_\mu(\mathfrak{U}_{n-1})$, jede $\Omega_\mu(\mathfrak{U}_{n-1})$ in einer $\Omega_\mu(\mathfrak{U}_{n-2})$, u.s.w., jede $\Omega_\mu(\mathfrak{U}_2)$ in einer $\Omega_\mu(\mathfrak{U}_1) = \Omega_\mu(\mathfrak{G})$. Ist $\Omega_\mu(\mathfrak{U}_2) \subseteq \Omega_\mu(\mathfrak{G})$, so ist offenbar $\Omega_\mu(\mathfrak{U}_2) = \Omega_\mu(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{U}_2$ u.s.w.

Demnach gibt es wenigstens eine Reihe $\Omega_\mu(\mathfrak{G}) \geqq \Omega_\mu(\mathfrak{U}_2) = \Omega_\mu(\mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{U}_2 \geqq \Omega_\mu(\mathfrak{U}_3) = \Omega_\mu(\mathfrak{U}_2) \wedge \mathfrak{U}_3 = \Omega_\mu(\mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{U}_3 \geqq \cdots \geqq \Omega_\mu(\mathfrak{U}_n) = \Omega_\mu(\mathfrak{U}_{n-1}) \wedge \mathfrak{U}_n = \cdots = \Omega_\mu(\mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{U}_n$. Ebenso beweist man den zweiten Teil des Satzes, nur wird in diesem Fall $\mho_\mu(\mathfrak{G}) \geqq \mho_\mu(\mathfrak{U}_2) \leqq \mho_\mu(\mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{U}_2$ u.s.w.; denn Elemente aus $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ können in $\mathfrak{U}_2$ liegen, ohne p^μ-te Potenzen in $\mathfrak{U}_2$ zu sein.

1.1.8. *Ist $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und sind $\bar{\Omega}_\mu(\mathfrak{H})$, $\Omega_\mu^*(\mathfrak{H})$ zwei verschiedene $\Omega_\mu(\mathfrak{H})$, so gibt es keine $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$, die gleichzeitig $\bar{\Omega}_n(\mathfrak{H})$, und $\Omega_\mu^*(\mathfrak{H})$ enthält.*

Beweis. Wäre $\bar{\Omega}_\mu(\mathfrak{H}) \leqq \Omega_\mu(\mathfrak{G})$ und $\Omega_\mu^*(\mathfrak{H}) \leqq \Omega_\mu(\mathfrak{G})$, so wäre $\{\bar{\Omega}_\mu(\mathfrak{H}), \Omega_\mu^*(\mathfrak{H})\} \leqq \Omega_\mu(\mathfrak{G})$. Also hätte die Untergruppe $\{\bar{\Omega}_\mu(\mathfrak{H}), \Omega^*(\mathfrak{H})\}$ von $\mathfrak{H}$ den Exponenten p^μ. Das widerspricht der Maximaleigenschaft bezüglich $\mathfrak{H}$ von $\bar{\Omega}_\mu(\mathfrak{H})$, $\Omega_\mu^*(\mathfrak{H})$.

Ein entsprechender Satz für Potenzgruppen $\bar{\mho}_\mu(\mathfrak{H})$, $\mho_\mu^*(\mathfrak{H})$ kann nicht behauptet werden. Denn wenn $\{\bar{\mho}_\mu(\mathfrak{H}), \mho_\mu^*(\mathfrak{H})\} \leqq \mho_\mu(\mathfrak{G})$ ist, folgt noch nicht, dass alle Elemente aus $\{\bar{\mho}_\mu(\mathfrak{H}), \mho_\mu^*(\mathfrak{H})\}$ auch p^μ-te Potenzen in $\mathfrak{H}$ sind.

1.2. *Ist $\mathfrak{A}$ eine abelsche Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})\}$ eine reguläre Gruppe.*

Beweis. Sei $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})\} = \mathfrak{U}$. Dann ist $\mathfrak{U}/\mathfrak{Z}_{p-2}(\mathfrak{G})$ abelsch, da $\mathfrak{A}$ abelsche und $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})/\mathfrak{Z}_{p-2}(\mathfrak{G})$ im Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{p-2}(\mathfrak{G})$ liegt. Also ist $H_2(\mathfrak{U}) \leqq \mathfrak{Z}_{p-2}(\mathfrak{G})$, daher $H_3(\mathfrak{U}) \leqq \mathfrak{Z}_{p-3}(\mathfrak{G}), \ldots, H_p(\mathfrak{U}) \leqq \mathfrak{Z}_0(\mathfrak{G}) = 1$, also hat $\mathfrak{U}$ höchstens die Klasse $p-1$ und ist daher regulär.

1.1.9. *Der Durchschnitt $\mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$ aller $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$, μ fest $= 1, 2, \ldots$, ist $\geqq \Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$. Der Durchschnitt $\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\mathfrak{G})$ aller $\mho_\mu(\mathfrak{G})$, μ fest $= 1, 2, \ldots$, ist $\geqq \mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$ und $\geqq (\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu))$.*

In einer regulären Gruppe $\mathfrak{G}$ ist natürlich $\mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}) = \Omega_\mu(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\mathfrak{G}) = \Omega_\mu(\mathfrak{G})$.

Beweis. Da $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$ regulär ist, existiert für jedes μ jeweils nur eine einzige $\Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$ bzw. $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$. Diese Gruppen sind also eindeutig bestimmt. Wir haben zu zeigen: Ist $S \in \mathfrak{G}$, $Z \in \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$ und $S^{p^\mu} = Z^{p^\mu} = 1$, so ist auch $(SZ)^{p^\mu} = 1$. Daraus ergibt sich nämlich für jede $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$: $\{Z, \Omega_\mu(\mathfrak{G})\}$ hat den Exponenten p^μ, ist also $= \Omega_\mu(\mathfrak{G})$, d.h. Z liegt in allen $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$. Und: ist $S \in \mathfrak{G}$, $Z \in \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$, so ist $S^{p^\mu} Z^{p^\mu} = T^{p^\mu}$, $T \in \{S, Z\}$. Daraus folgt wie oben, dass Z^{p^μ} in allen $\mho_\mu(\mathfrak{G})$ liegen muss. Ist nun $S \in \mathfrak{G}$, so ist nach 1.2. $\{S, \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})\} = \mathfrak{U}$ eine reguläre Gruppe. Hat dann S die Ordnung p^μ, so liegt S in $\Omega_\mu(\mathfrak{U}) \geqq \Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$. Ist also $Z \in \Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1})$, so folgt aus $S^{p^\mu} = 1 = Z^{p^\mu}$ auch $(SZ)^{p^\mu} = 1$. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Der Beweis des zweiten Teiles ist analog, nur haben wir noch $(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu)) \leq \mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\mathfrak{G})$ zu beweisen. Das ist aber bewiesen, sobald wir gezeigt haben: $(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu)) \leq \mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$. Dazu müssen wir nur zeigen: Ist $Z \in \mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})$, $S \in \mathfrak{G}$, so ist $(Z, S^{p^\mu}) = Z_1^{p^\mu}$, $Z_1 \in \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$. Denn dann ist $(Z, S_1^{p^\mu} S_2^{p^\mu}) \equiv (Z, S_2^{p^\mu})(Z, S_1^{p^\mu})(Z, S_1^{p^\mu}, S_2^{p^\mu}) = X_1^{p^\mu} X_2^{p^\mu} X_3^{p^\mu} = Y^{p^\mu}, X_1, X_2, X_3, Y \in \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$. Nun ist $Z^{-1}S^{-p^\mu}ZS^{p^\mu} = ((Z, S)S^{-1})^{p^\mu}S^{p^\mu}$. Da (Z, S) in $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$ liegt, ist $\{(Z, S), S\} = \mathfrak{U}$ eine reguläre Gruppe, also $((Z, S)\cdot S^{-1})^{p^\mu} = (Z, S)^{p^\mu} \cdot S^{-p^\mu} \prod_\nu \mathfrak{k}_\nu((Z, S), S^{-1})^{p^\mu}$. Die Kommutatoren $\mathfrak{k}_\nu$ liegen sämtlich in der regulären Gruppe $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}) \subset \mathfrak{Z}_{p-2}(\mathfrak{G})$. Also ist $\prod_\nu \mathfrak{k}_\nu{}^{p^\mu} = X^{p^\mu}$, $X \in \mathfrak{Z}_{p-2}(\mathfrak{G})$ und daher $(Z, S^{p^\mu}) = (Z, S)^{p^\mu}(S^{-p^\mu} \cdot X \cdot S^{p^\mu})^{p^\mu}$. X Mit liegt auch $S^{-p^\mu} \cdot X \cdot S^{p^\mu}$ in $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}_{p-2}(\mathfrak{G})$. Also ist schliesslich $(Z, S^{p^\mu}) = Y^{p^\mu}$, $Y \in \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$, w.z.b.w.

Hieraus folgt:

1.1.9.1. *Ist* $\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\mathfrak{G}) = 1$, *so liegt* $\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})$ *im Zentralisator von* $\mathfrak{G}(p^\mu)$, $(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu)) = 1$.

Demnach ist stets $\mathfrak{D}_{1, p^\mu}(\mathfrak{G}) > 1$. Dagegen kann $\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\mathfrak{G}) = 1$ sein, auch wenn $p^\mu < p^\kappa$, der Exponent von $\mathfrak{G}$, ist. Um das zu zeigen, konstruieren wir eine solche Gruppe:

1.1.10. *Es sei* $\overline{\mathfrak{G}}$ *eine endliche p-Gruppe vom Exponenten* $p^\kappa > p^\mu$ *und* $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}})$. *Wir behaupten:* $\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\mathfrak{G}) = 1$.

Beweis. Jede $\mho_\mu(\overline{\mathfrak{G}})/\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}})$ liegt in wenigstens einer $\mho_\mu(\mathfrak{G})$. Wenn wir zeigen können: Jede $\mho_\mu(\overline{\mathfrak{G}})/\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}})$ ist eine $\mho_\mu(\mathfrak{G})$, falls $\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\mathfrak{G}) < \mathfrak{G}(p^\mu)$ ist, so ist die Behauptung bewiesen. Sind nun $S^{p^\mu}\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}})$, $T^{p^\mu}\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}})$ zwei Elemente aus einer $\mho_\mu(\mathfrak{G})$, so besteht eine Gleichung $S^{p^\mu}\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}}) \cdot T^{p^\mu}\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}}) = R^{p^\mu}\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}})$ also in $\overline{\mathfrak{G}}$: $S^{p^\mu}T^{p^\mu}\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}}) = R^{p^\mu}\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}})$. Daher $S^{p^\mu}T^{p^\mu} = R^{p^\mu}D^{p^\mu}$, $D^{p^\mu} \in \mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}})$. R^{p^μ} liegt in einer $\mho_\mu(\overline{\mathfrak{G}})$, $\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}})$ liegt in jeder $\mho_\mu(\overline{\mathfrak{G}})$, also ist $R^{p^\mu}D^{p^\mu} = U^{p^\mu}$, $U \in \overline{\mathfrak{G}}$, demnach $S^{p^\mu}T^{p^\mu} = U^{p^\mu}$. Daraus folgt, dass $\mho_\mu(\mathfrak{G})$ in einer Gruppe $\mho_\mu(\overline{\mathfrak{G}})/\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}})$ liegen, also ihr gleich sein muss, w.z.b.w.

1.1.11. *Ist* $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$ *die von allen Elementen der Ordnung* $\leq p^\mu$ *erzeugte Untergruppe von* $\mathfrak{G}$, *so enthält* $\mathfrak{D}_{1, p^\mu}(\mathfrak{G})$ *die Gruppe* $\Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})))$.

Beweis. Das folgt aus 1.1.9 sofort, denn jede $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ ist auch eine $\Omega_\mu(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}))$.

1.1.12. *Der Durchschnitt der Normalisatoren aller* $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$ *und der Durchschnitt der Normalisatoren aller* $\mho_\mu(\mathfrak{G})$ *enthält* $\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})$ *für jedes* $\mu = 1, 2, \ldots$.

Beweis. Es genügt zu beweisen: Ist $Z \in \mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})$ und a) $S \in \Omega_\mu(\mathfrak{G})$, so ist auch $Z^{-1}SZ \in \Omega_\mu(\mathfrak{G})$, b) $S^{p^\mu} \in \mho_\mu(\mathfrak{G})$, so ist auch $Z^{-1}S^{p^\mu}Z \in \Omega_\mu(\mathfrak{G})$.

a) Es ist $Z^{-1}SZ = S \cdot Z_1$, $Z_1 \in \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$. Also liegen S und $Z^{-1}SZ$ in der regulären Gruppe $\{S, \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})\}$. Daraus folgt, dass Z_1 ebenfalls die Höchstordnung p^μ hat und demnach in $\Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})) \subseteq \Omega_\mu(\mathfrak{G})$ liegt. Also liegt auch $Z^{-1}SZ = SZ_1$ mit S in $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$.

b) $S^{p^\mu} \in \mho_\mu(\mathfrak{G})$. $Z^{-1}SZ = SZ_1$ und S liegen in der regulären Gruppe $\{S, \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})\} = \mathfrak{U}$. Also liegen S^{p^μ} und $Z^{-1}S^{p^\mu}Z = (SZ_1)^{p^\mu}$ in $\mho_\mu(\mathfrak{U})$ $(SZ_1)^{p^\mu}$ kann aber nach den Sätzen über reguläre Gruppen auf die Form $S^{p^\mu}Z_2^{p^\mu}$, $Z_2 \in \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$ gebracht werden. $Z_2^{p^\mu}$ liegt aber in $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$ also in $\mho_\mu(\mathfrak{G})$. Also liegt mit S^{p^μ} auch $Z^{-1}S^{p^\mu}Z$ in $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$.

1. 3. $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$ *liegt im Zentralisator der von allen Elementen der Ordnung* $\leq p^\mu$ *erzeugten charakteristischen Untergruppe* $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$ *von* $\mathfrak{G}$, *d.h.* $(\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})), \mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})) = 1$, *daher auch im Zentralisator der von allen* $p^{\kappa-\mu}$-*ten Potenzen* $\in \mathfrak{G}$ *erzeugten charakteristischen Untergruppe* $\mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu})$ *von* $\mathfrak{G}$. *Ist* $\mu \geq \left[\frac{\kappa+1}{2}\right]$, *so ist* $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$ *abelsch.*

Beweis. Wenn $(\mathfrak{H}_\mu, \mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1})) = 1$ bewiesen ist, folgt die zweite Behauptung des Satzes sofort aus $\mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu}) \subseteq \mathfrak{H}_\mu$; (denn $S^{p^{\kappa-\mu}} = T$ erfüllt $T^{p^\mu} = 1$, also $T \in \mathfrak{H}_\mu$). Ist aber noch $\mu \geq \left[\frac{\kappa+1}{2}\right]$, so ist $\mu \geqq \kappa - \mu$, also $\mathfrak{G}(p^\mu) \subseteq \mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu})$, daher liegt dann $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$ sowohl in $\mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu})$ als auch im Zentralisator von $\mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu})$, also im Zentrum von $\mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu})$. Es ist also nur noch zu beweisen $(\mathfrak{H}_\mu, \mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))) = 1$. Das ist aber bewiesen, wenn für jedes $S \in \mathfrak{G}$, das $S^{p^\mu} = 1$ erfüllt, gezeigt ist $(S, \mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))) = 1$. Nun sei $S^{p^\mu} = 1$, nach 1. 2. ist die Gruppe $\mathfrak{U} = \{S, \mathfrak{Z}_{p-1}\}$ regulär; also ist $(\Omega_\mu(\mathfrak{U}), \mho_\mu(\mathfrak{U})) = 1$. Da $S \in \Omega_\mu(\mathfrak{U})$, $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-}(\mathfrak{G})) \subseteq \mho_\mu(\mathfrak{U})$ ist, folgt $(S, \mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))) = 1$, w.z.b.w.

Wir können noch hinzufügen:

1. 3. 1. *Ist* $\mu \geqq \left[\frac{\kappa+1}{2}\right]$, *so liegt* $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$ *im Zentrum von* $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$.

Beweis. Nach dem Beweis von 1. 3. ist dann $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})) \subseteq \mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu}) \subseteq \mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$, also liegt dann $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$ in $\mathfrak{H}_\mu$ und im Zentralisator von $\mathfrak{H}_\mu$, also im Zentrum von $\mathfrak{H}_\mu$.

Unmittelbar folgen nun:

1. 3. 2. $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}))) \subseteq \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}))$.

1. 3. 3. $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu}))) \subseteq \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu}))$

1. 3. 4. *Wenn es ein System von Erzeugenden von* $\mathfrak{G}$ *gibt, dessen Elemente sämtlich die Ordnung* $\leq p^\mu$ *haben, so ist* $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})) \subseteq \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$. Denn in diesem Falle ist $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$.

1. 4. *Sind* $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ *zwei Normalteiler von* $\mathfrak{G}$ *und ist* $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2$, *so ist für*

alle λ: $\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{N}_1)\leqq\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{N}_2)$.

Beweis. Ist $T\in\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{N}_1)$, $S\in\mathfrak{G}$, so ist $(T,S)\in\mathfrak{N}_1\subset\mathfrak{N}_2$, also $T\in\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{N}_2)$, daher $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{N}_1)\leqq\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{N}_2)$. Es sei schon bewiesen: $\mathfrak{Z}_{\lambda-1}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{N}_1)\leqq\mathfrak{Z}_{\lambda-1}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{N}_2)$. Da $\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{Z}\div\mathfrak{N})=\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{Z}_{\lambda-1}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{N}))$ ist, folgt die Behauptung sofort.

Wenn $\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\mathfrak{G})=1$ ist, so ist auf Grund von 1.1.9 $\mho_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))=1$, also $\Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))=\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$. Nach 1.1.10 ist nun in $\mathfrak{g}=\mathfrak{G}/\mathfrak{D}^*_{p^\mu}$ $\mathfrak{D}^*_{p^\mu}(\mathfrak{g})=1$, also $\mathfrak{D}_{1,p^{\mu_1}}(\mathfrak{g})\geqq\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{g})$, d.h. $\mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{D}^*_{p^\mu})\geqq\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{D}^*_{p^\mu})\geqq\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$ nach 1.4. Setzen wir also für beliebiges μ_1 die Gruppe $\mathfrak{D}_{1,p^{\mu_1}}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{D}^*_{p^{\mu_1}})=\mathfrak{L}_{\mu_1}(\mathfrak{G})$, so ist $\mathfrak{L}_{\mu_1}(\mathfrak{G})\geqq\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$. Ist μ_2 eine weitere natürliche Zahl, die wir, um keine Trivialität zu erhalten, als $<\kappa$ voraussetzen, so wird in $\mathfrak{g}=\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_{\mu_1}$: $\mathfrak{D}_{1,p^{\mu_2}}(\mathfrak{g}\div\mathfrak{D}^*_{p^{\mu_2}}(\mathfrak{g}))\geqq\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{g})$, also $\mathfrak{L}_{\mu_2}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{L}_{\mu_1}(\mathfrak{G}))\geqq\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{L}_{\mu_1}(\mathfrak{G}))$. Wenn wir diese Gruppe mit $\mathfrak{L}_{\mu_1,\mu_2}(\mathfrak{G})$ bezeichnen und $\mathfrak{L}_{\mu_1}(\mathfrak{G})\geqq\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))=\mathfrak{Z}_{2p-2}(\mathfrak{G})$ berücksichtigen, so wird nach 1.4: $\mathfrak{L}_{\mu_1,\mu_2}\geqq\mathfrak{Z}_{2p-2}(\mathfrak{G})$. Wir definieren entsprechend für beliebiges r: $\mathfrak{L}_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_r}(\mathfrak{G})=\mathfrak{L}_{\mu_r}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{L}_{\mu_1,\dots,\mu_{r-1}})$. Es wird dann offenbar $\mathfrak{L}_{\mu_1,\dots,\mu_r}(\mathfrak{G})\geqq\mathfrak{Z}_{r(p-1)}(\mathfrak{G})$. Ist c die Klasse von $\mathfrak{G}$ und $\left[\frac{c}{p-1}\right]=r_c$, so ist beliebigen $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{r_c+1}$ stets $\mathfrak{L}_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{r_c+1}}(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{r_c}}(\mathfrak{G})$ regulär. Wir haben also:

1.3.5. *Es ist* $\mathfrak{D}_{1,p^{\mu_1}}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{D}^*_{p^{\mu_1}}(\mathfrak{G}))\geqq\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$ *für beliebige* μ_1. *Bezeichnet man diese Gruppe mit* $\mathfrak{L}_{\mu_1}$, *sind* $\mu_2,\mu_3,\dots,\mu_k$ *beliebige natürliche Zahlen und definiert man:* $\mathfrak{L}_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_k}(\mathfrak{G})=\mathfrak{D}_{1,p^{\mu_k}}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{D}^*_{p^{\mu_k}}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{L}_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{k-1}}))$, *so ist* $\mathfrak{L}_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_k}(\mathfrak{G})\geqq\mathfrak{Z}_{k(p-1)}(\mathfrak{G})$; *also wenn* c *die Klasse von* $\mathfrak{G}$ *und* $\left[\frac{c}{p-1}\right]=r_c$ *ist:* $\mathfrak{L}_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{r_c+1}}(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}$.

1.5. *Es ist* $1\subset\mathfrak{D}_{1,p}\leqq\mathfrak{D}_{1,p^2}\leqq\cdots\leqq\mathfrak{D}_{1,p^{\kappa-1}}\leqq\mathfrak{D}_{1,p^\kappa}=\mathfrak{G}$.

Beweis. Es sei $T\in\mathfrak{D}_{1,p^\mu}$, S habe die Ordnung $p^{\mu+1}$. Dann wird $(ST)^{p^{\mu+1}}=(ST)^{p\cdot p^\mu}=(S^pT_1)^{p^\mu}$, $T_1\in\mathfrak{D}_{1,p^\mu}$. Also hat S^pT_1 die Ordnung $\leqq p^\mu$, daher $(ST)^{p^{\mu+1}}=1$; daraus folgt $T\in\mathfrak{D}_{1,p^{\mu+1}}$ also $\mathfrak{D}_{1,p^\mu}\leqq\mathfrak{D}_{1,p^{\mu+1}}$.

Definition III. Es sei für alle $\nu=2,3,\dots$ und alle μ: $\mathfrak{D}_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G})=\mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{D}_{\nu-1,p^\mu})$, m.a.W.: Ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}_{\nu-1,p^\mu}=\overline{\mathfrak{G}}$, so ist $\mathfrak{D}_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G})$ die der Gruppe $\mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\overline{\mathfrak{G}})$ in $\mathfrak{G}$ entsprechende eindeutig bestimmte (charakteristische) Untergruppe.

Definition IV. Es sei für alle μ_1,μ_2: $\mathfrak{D}_{p^{\mu_1},p^{\mu_2}}=\mathfrak{D}_{1,p^{\mu_2}}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{D}_{1,p^{\mu_1}})$ und entsprechend für alle $\nu=3,4,\dots$: $\mathfrak{D}_{p^{\mu_1},p^{\mu_2},\dots,p^{\mu_\nu}}=\mathfrak{D}_{1,p^{\mu_\nu}}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{D}_{p^{\mu_1},\dots,p^{\mu_{\nu-1}}})$.

Man erkennt aus $\mathfrak{D}_{p^\mu}(\mathfrak{G})\supset 1$ sofort: $\mathfrak{D}_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G})\supset\mathfrak{D}_{\nu-1,p^\mu}(\mathfrak{G})$, falls $\mathfrak{D}_{\nu-1,p^\mu}(\mathfrak{G})\subset\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}_{p^{\mu_1},p^{\mu_2},\dots,p^{\mu_\nu}}(\mathfrak{G})\supset\mathfrak{D}_{p^{\mu_1},p^{\mu_2},\dots,p^{\mu_{\nu-1}}}(\mathfrak{G})$, falls $\mathfrak{D}_{p^{\mu_1},\dots,p^{\mu_{\nu-1}}}(\mathfrak{G})\subset\mathfrak{G}$ ist.

Man könnte also $\mathfrak{D}_{\nu, p^\mu} = \mathfrak{D}_{\underbrace{p^\mu, p^\mu, \ldots, p^\mu}_{\nu}}$ schreiben.

1.5 1. $\mathfrak{D}_{\nu, p^\mu} \geq \Omega_{\nu \cdot \mu}(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$, $\mathfrak{D}_{p^{\mu_1}, p^{\mu_2}, \ldots, p^{\mu_\nu}} \geq \Omega_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu}(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$. (Hierbei ist für $\rho \geq \kappa$: $\Omega_\rho(\mathfrak{Z}_{p-1}) = \Omega_\kappa(\mathfrak{Z}_{p-1}) = \mathfrak{Z}_{p-1}$).

Beweis: Zunächst gilt für beliebige Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ nach 1.4: $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{N}) \geq \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$ ist eine reguläre Gruppe; in jeder regulären Gruppe $\mathfrak{R}$ gilt aber für alle μ_1, μ_2: $\Omega_{\mu_2}(\mathfrak{R} \div \Omega_{\mu_1}) = \Omega_{\mu_1+\mu_2}(\mathfrak{R})$. Damit folgen sofort beide Behauptungen von 1.5.1.

Aus 1.5.1 folgt:

1.5.2. *Ist* $\nu \cdot \mu \geq \kappa$, *so ist* $\mathfrak{D}_{\nu, p^\mu}(\mathfrak{G}) \geq \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$. *Ist* $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu \geq \kappa$, *so ist* $\mathfrak{D}_{p^{\mu_1}, p^{\mu_2}, \ldots, p^{\mu_\nu}} \geq \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$.

Halten wir μ fest, so muss die Reihe 1, $\mathfrak{D}_{1, p^\mu}, \mathfrak{D}_{2, p^\mu}, \ldots$ mit $\mathfrak{G}$ schliessen. Es gibt also für jedes μ einen nur durch μ und $\mathfrak{G}$ bestimmten Index $\nu(\mu)$, so dass $\mathfrak{D}_{\nu(\mu), p^\mu} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}_{\nu(\mu)-1, p^\mu} \subset \mathfrak{G}$ ist. Demnach kann $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}_{\nu(\mu)-1, p^\mu}$ höchstens den Exponenten p^μ haben, also ist $\mathfrak{D}_{\nu(\mu)-1, p^\mu}(\mathfrak{G}) \geq \mathfrak{G}(p^\mu)$. Ferner kann offenbar für beliebiges $l = 1, 2, \ldots$ die Gruppe $\mathfrak{D}_{l+1, p^\mu}/\mathfrak{D}_{l, p^\mu}$ höchstens den Exponenten p^μ haben. Also wird $\mathfrak{D}_{\nu(\mu)-1, p^\mu} \geq \mathfrak{G}(p^\mu)$, $\mathfrak{D}_{\nu(\mu)-2, p^\mu} \geq \mathfrak{G}(p^\mu, p^\mu) = \mathfrak{G}(p^\mu, 2)$ u.s.w. $\mathfrak{D}_{1, p^\mu}(\mathfrak{G}) \geq \mathfrak{G}(p^\mu, \nu(\mu)-1)$. Daher $\mathfrak{G}(p^\mu, \nu(\mu)) = 1$. Demnach gilt:

1.6. *Hat die Reihe* $\mathfrak{D}_{1, p^\mu}, \mathfrak{D}_{2, p^\mu}, \ldots, \mathfrak{G}$ *die genaue Länge* $\nu(\mu)$, *so hat die Reihe* $\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{G}(p^\mu, p^\mu), \ldots, 1$ *höchstens die Länge* $\nu(\mu)$.

Ist nun $\left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1 = \lambda$, so ist nach 1.5.2.: $\mathfrak{D}_{\lambda, p^\mu} \geq \mathfrak{Z}_{p-1}$, also $\mathfrak{D}_{2\lambda, p^\mu} \geq \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{Z}_{p-1}) = \mathfrak{Z}_{2p-2}$, u.s.w. $\mathfrak{D}_{\rho\lambda, p^\mu} \geq \mathfrak{Z}_{\rho(p-1)}$. Ist nun c die Klasse von $\mathfrak{G}$: also $\mathfrak{Z}_c = \mathfrak{G}$ und $\rho = \left[\frac{c-1}{p-1}\right]+1$, so ist $\rho(p-1) \geq c$, also $\mathfrak{Z}_{\rho(p-1)} = \mathfrak{G}$ und daher $\mathfrak{D}_{\rho\lambda, p^\mu} = \mathfrak{G}$.

Es gilt also

1.6.1. $\nu(\mu) \leq \left(\left[\frac{c-1}{p-1}\right]+1\right)\left(\left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1\right)$.

Die hieraus für die Länge der Reihe $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{G}(p^\mu, 2), \ldots$ folgende Einschränkung kann man erheblich verschärfen: Ist wieder $\lambda = \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1$, so ist $\mathfrak{G}(p^\mu, \lambda) \leq H_p(\mathfrak{G})$. Denn $\mathfrak{G}/H_p(\mathfrak{G})$ hat die Klasse $p-1$, ist also regulär, daher $\mathfrak{G}(p^\mu, \lambda) H_p(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}(p^{\mu\lambda}) H_p(\mathfrak{G}) = H_p(\mathfrak{G})$. Ebenso ist $H_p(\mathfrak{G})/H_{p^2}(\mathfrak{G})$ regulär, und aus $\mathfrak{G}(p^\mu, \lambda) \leq H_p(\mathfrak{G})$ folgt also $\mathfrak{G}(p^\mu, 2\lambda) \leq H_{p^2}(\mathfrak{G})$ und allgemein $\mathfrak{G}(p^\mu, \sigma\lambda) \leq H_{p^\sigma}(\mathfrak{G})$. Ist also c die Klasse von $\mathfrak{G}$, d.h. $H_{c+1}(\mathfrak{G}) = 1$ und $\sigma = \left[\frac{\log c}{\log p}\right]+1$, so wird $\mathfrak{G}(p^\mu, \sigma\lambda) = 1$, d.h.

1.6.2. *Die Länge der Reihe* $\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{G}(p^\mu, 2), \ldots, 1$ *ist nicht grösser als* $\left(\left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1\right)\left(\left[\frac{\log c}{\log p}\right]+1\right)$, *wenn* $\mathfrak{G}$ *die Klasse* c *hat.*

1.7. *Ist $\mathfrak{N}$ ein beliebiger, $\mathfrak{R}$ ein regulärer Normalteiler von $\mathfrak{G}$ (d.h. ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, der eine reguläre Gruppe ist), so ist* $(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})), \mho_\mu(\mathfrak{R}) = 1$.

Beweis. Zunächst sind $\mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})$, $\mho_\mu(\mathfrak{R})$ charakteristisch in $\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{R}$ ebenfalls Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Nun sei $S \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))$, $T \in \mathfrak{R}$. Dann ist $S^{-1}T^{p^\mu}S = (S^{-1}TS)^{p^\mu} = (T\,(T,S))^{p^\mu}$. $S \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))$ ist, liegt $(T,S) \in \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})$, hat also die Höchstordnung p^μ. Da T in $\mathfrak{R}$ liegt, liegt auch (T,S) in $\mathfrak{R}$, als Element von der Höchstordnung p^μ also in $\Omega_\mu(\mathfrak{R})$. Also wird $S^{-1}T^{p^\mu}S = (T(S,T))^{p^\mu} = T^{p^\mu}$, mithin $(S, T^{p^\mu}) = 1$, w.z.b.w.

$\mathfrak{N}$ kann hierbei jeder beliebige reguläre Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sein. Da stets $(\mho_\mu(\mathfrak{R}), \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))) = 1$, gilt auch für die Vereinigungsgruppe $\bigvee_{\mathfrak{R}} \mho_\mu(\mathfrak{R})$, wobei $\mathfrak{R}$ alle regulären Normalteiler von $\mathfrak{G}$ durchläuft:

1.7.1. $(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})), \bigvee_{\mathfrak{R}} \mho_\mu(\mathfrak{R})) = 1.$

Hier ist folgende Tatsache von Bedeutung:

Jeder Normalteiler > 1 von $\mathfrak{G}$ enthält weningstens einen regulären Normalteiler > 1 von $\mathfrak{G}$.

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei ein beliebiger Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{H}$ regulär, so ist nichts weiter zu beweisen. Ist $\mathfrak{H}$ nicht regulär, so ist die Klasse c von $\mathfrak{H}$ grösser als $p-1$ und dann sind $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{H})$, $H_{\left[\frac{c}{p}\right]+1}(\mathfrak{H})$ reguläre, in $\mathfrak{H}$ enthaltene Normalteiler > 1 von $\mathfrak{G}$.

Demnach wird i.a. die Gruppe $\bigvee_{\mathfrak{R}} \mho_\mu(\mathfrak{R})$ recht umfangreich sein. Es ist klar, dass sie charakteristisch in $\mathfrak{G}$ ist.

$\mathfrak{N}$ kann in 1.7. oder 1.7.1 jeder beliebige Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sein. Also gelten 1.7. und 1.7.1 auch, wenn man in ihnen $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))$ durch die Vereinigungsgruppe $\bigvee_{\mathfrak{N}} \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))$ ersetzt, wobei $\mathfrak{N}$ alle Normalteiler von $\mathfrak{G}$ durchläuft. Natürlich ist diese Vereinigungsgruppe charakteristisch in $\mathfrak{G}$. Also

1.7.2. $(\bigvee_{\mathfrak{N}} \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})), \mho_\mu(\mathfrak{R})) = 1$

1.8. $(\bigvee_{\mathfrak{N}} \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})), \bigvee_{\mathfrak{R}} \mho_\mu(\mathfrak{R})) = 1$

Wir können aus diesen Sätzen weitere Vertauschbarkeitssätze gewinnen mit Hilfe des folgenden allgemeinen Satzes:

1.9. *Sind $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ zwei Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und ist $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = 1$, so ist* $(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{N}_1), H_{\lambda+1}(\mathfrak{N}_2)) = 1$, $\lambda = 0, 1, \ldots$

Beweis. Zunächst gilt der Satz nach Voraussetzung für $\lambda = 0$. Es sei $\lambda \geqq 1$ und der Satz gelte für $\lambda - 1$. Nun ist $(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{N}_1), H_\lambda(\mathfrak{G})) \subseteq \mathfrak{N}_1$;

denn setze man $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{g}$, so ist $\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{N}_1)/\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{g})$ und $H_\lambda(\mathfrak{g}) = H_\lambda(\mathfrak{G})\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_1$, sowie $(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{g}), H_\lambda(\mathfrak{g})) = 1$, woraus $(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{N}_1), H_\lambda(\mathfrak{G})) \leq \mathfrak{N}_1$ folgt. Weiter ist $H_\lambda(\mathfrak{N}_2) \leq H_\lambda(\mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{N}_2$, also $(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{N}_1), H_\lambda(\mathfrak{N}_2)) \leq \mathfrak{N}_1 \wedge \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_1) \wedge \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_2)$ (wegen $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = 1$). Nun sei $Z_\lambda \in \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{N}_1)$, $S \in H_\lambda(\mathfrak{N}_2)$, $T \in \mathfrak{N}_2$. Wir haben $(Z_\lambda, (S, T)) = 1$ zu zeigen, um unsere Behauptung zu beweisen: $(Z_\lambda, S^{-1}T^{-1}ST) = (Z_\lambda, T^{-1}ST)(Z_\lambda, S^{-1})$, da $(Z_\lambda, S^{-1}, T^{-1}ST) = 1$, wegen $(Z_\lambda, S^{-1}) \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_2)$. $(Z_\lambda, T^{-1}ST) = T^{-1}(TZ_\lambda T^{-1}, S)T = (TZ_\lambda T^{-1}, S)$ (da $(TZ_\lambda T^{-1}, S) \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_2)$, $T \in \mathfrak{N}_2$) $((T^{-1}, Z_\lambda^{-1})Z_\lambda, S) = (T^{-1}, Z_\lambda^{-1}, S) \cdot (T^{-1}, Z_\lambda^{-1}, S, Z_\lambda) \cdot (Z_\lambda, S)$. Nun liegt $(T^{-1}, Z_\lambda^{-1}) \in \mathfrak{Z}_{\lambda-1}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{N}_1)$, $S \in H_\lambda(\mathfrak{N}_2)$; also ist nach der Induktionsvoraussetzung $((T^{-1}, Z_\lambda^{-1}), S) = 1$. Damit folgt $(Z_\lambda, T^{-1}ST) = (Z_\lambda, S)$, also $(Z_\lambda, S^{-1}T^{-1}ST) = (Z_\lambda, S)(Z_\lambda, S^{-1}) = 1$, denn $1 = (Z_\lambda, 1) = (Z_\lambda, S^{-1}S) \equiv (Z_\lambda, S)(Z_\lambda, S^{-1})(Z_\lambda, S^{-1}, S) = (Z_\lambda, S)(Z_\lambda, S^{-1})$, da $S \in \mathfrak{N}_2$, $(Z_\lambda, S^{-1}) \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_2)$ ist.

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

In 1.9. ist $\mathfrak{G}$ nicht notwending eine endliche Gruppe.

1.9.1. *Sind $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ zwei Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und ist $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = 1$, so ist die Klasse von $\mathfrak{N}_2$ höchstens um 1 grösser als die Klassen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$ und die Klasse von $\mathfrak{N}_1$ höchstens um 1 grösser als die Klasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_2$.*

Beweis. Ist c die Klasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$, so ist $\mathfrak{Z}_c(\mathfrak{G} \div \mathfrak{N}_1) = \mathfrak{G}$ und nach 1.9. $(\mathfrak{G}, H_{c+1}(\mathfrak{N}_2)) = 1$, also $H_{c+1}(\mathfrak{N}_2) \leq \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$, daher $H_{c+2}(\mathfrak{N}_2) = 1$. Also ist die Klasse von $\mathfrak{N}_2$ dann höchstens $= c+1$.

Die Anwendung von 1.9. auf 1.7, 1.7.1, 1.7.2, 1.8 ergibt:

1.7.3. *Ist $\mathfrak{N}$ ein beliebiger, $\mathfrak{R}$ ein regulärer Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist*
$(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})), H_\lambda \mho_\mu(\mathfrak{R})) = 1 \quad \lambda, \mu = 1, 2, \dots,$
$(H_{\lambda+1}(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mho_\mu(\mathfrak{R}))) = 1 \quad \lambda = 0, 1, \dots; \mu = 1, 2, \dots.$

1.7.4. *Ist $\mathfrak{N}$ ein beliebiger Normalteiler von $\mathfrak{G}$, lässt man $\mathfrak{R}$ alle regulären Normalteiler von $\mathfrak{G}$ durchlaufen und bezeichnet $\mathfrak{V}_\mu(\mathfrak{G})$ die Vereinigungsgruppe aller $\mho_\mu(\mathfrak{R})$, so ist*

$$(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})), H_\lambda(\mathfrak{V}_\mu(\mathfrak{G}))) = 1 \quad \lambda, \mu = 1, 2, \dots$$
$$(H_{\lambda+1}(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{V}_\mu(\mathfrak{G}))) = 1 \quad \lambda = 0, 1, \dots; \mu = 1, 2, \dots.$$

1.7.5. *Ist $\mathfrak{R}$ ein regulärer Normalteiler von $\mathfrak{G}$, lässt man $\mathfrak{N}$ alle Normalteiler von $\mathfrak{G}$ durchlaufen und bezeichnet $\mathfrak{D}_\mu(\mathfrak{G})$ die Vereinigungsgruppe aller $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))$, so ist:*

$$(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_\mu(\mathfrak{G})), H_{\lambda+1}\mho_\mu(\mathfrak{R}))) = 1 \quad \lambda = 0, 1, \dots; \mu = 1, 2, \dots$$
$$(H_{\lambda+1}(\mathfrak{D}_\mu(\mathfrak{G})), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mho_\mu(\mathfrak{R}))) = 1 \quad \lambda = 0, 1, \dots; \mu = 1, 2, \dots$$

1.8.1. *Haben $\mathfrak{D}_\mu(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{V}_\mu(\mathfrak{G})$ die gleiche Bedeutung wie in 1.7.5, 1.7.4, so ist* $(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{D}_\mu(\mathfrak{G})), H_{\lambda+1}(\mathfrak{V}_\mu(\mathfrak{G}))) = 1$, $(H_{\lambda+1}(\mathfrak{D}_\mu(\mathfrak{G})), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{V}_\mu(\mathfrak{G}))) = 1$, $\lambda = 0, 1, \dots; \mu = 1, 2, \dots.$

Auch für die $\mathfrak{G}(p^\mu, \nu)$ können wir hier eine Vertauschbarkeitsrelation aufstellen (im nächsten Paragraphen werden wir weitere solche Beziehungen erhalten).

Es wurde oben festgestellt: Ist $\lambda = \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1$, so liegt $\mathfrak{G}(p^\mu, \sigma\lambda)$ in $H_{p^\sigma}(\mathfrak{G})$, $\sigma = 0, 1, \ldots$. Auf Grund der Hallschen Relation: $(\mathfrak{Z}_\nu(\mathfrak{G}), H_\nu(\mathfrak{G})) = 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$ haben wir also:

1.10. $(\mathfrak{G}(p^\mu, \sigma\lambda), \mathfrak{Z}_{p^\sigma}(\mathfrak{G})) = 1$, $\sigma = 0, 1, \ldots$ *und daher nach* 1.9. $(\mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G} \div \mathfrak{G}(p^\mu, \sigma\lambda), H_{\rho+1}(\mathfrak{Z}_{p^\sigma}(\mathfrak{G}))) = 1$, $(H_{\rho+1}\mathfrak{G}(p^\mu, \sigma\lambda), \mathfrak{Z}_{p^\sigma+\rho}(\mathfrak{G})) = 1$, $\mu = 1, 2 \ldots$; $\rho = 0, 1, \ldots$; $\sigma = 0, 1, \ldots$.

Hat $\mathfrak{G}$ *die Klasse c, so ist für alle* $\nu = 0, 1, \ldots$: $\mathfrak{Z}_\nu(\mathfrak{G}) \geqq H_{c+1-\nu}(\mathfrak{G})$. *Also folgt noch* $(H_{\rho+1}(\mathfrak{G}(p^\mu, \sigma\lambda)), H_{c+1-p^\sigma-\rho}(\mathfrak{G})) = 1$.

§ 2.

In diesem Paragraphen definieren wir neue charakteristische Untergruppen $\mathfrak{U}^*_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G})$, $\nu = 0, 1, \ldots, \mu = 0, 1, \ldots, \kappa$, die eine wichtige Rolle in der Theorie der endlichen p-Gruppen von einem Exponenten p^κ, $\kappa > 1$ spielen. Wenn kein Missverständnis entstehen kann, werden wir für $\mathfrak{U}^*_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G})$ einfach $\mathfrak{U}^*_{\nu,p^\mu}$, $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}$ schreiben.

Die Gruppen $\mathfrak{U}^*_{1,p}$, $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ und Beziehungen zwischen ihnen und $\mathfrak{G}$: Die Menge aller Elemente $T \in \mathfrak{G}$, die mit jedem Element $S \in \mathfrak{G}$ für festes μ die Gleichung $(ST)^{p^\mu} = S^{p^\mu}T^{p^\mu}$ erfüllen, werde mit $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$ bezeichnet, $\mu = 0, 1, \ldots$. Die Menge aller Elemente $T \in \mathfrak{G}$, die mit jedem Element $S \in \mathfrak{G}$ für festes μ die Gleichung $(ST)^{p^\mu} = S^{p^\mu}$ erfüllen, werde mit $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ bezeichnet, $\mu = 0, 1, \ldots$.

2.1.1. $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$ *und* $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ *sind charakteristische Untergruppen von* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu} \geqq \mathfrak{U}_{1,p^\mu}$. $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ *hat höchstens den Exponenten* p^μ.

Beweis. Liegen T_1 und T_2 in $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$, so auch $T_1T_2 \in \mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$, denn für beliebige S aus $\mathfrak{G}$ ist $(ST_1T_2)^{p^\mu} = (ST_1)^{p^\mu}T_2^{p^\mu} = S^{p^\mu}T_1^{p^\mu}T_2^{p^\mu} = S^{p^\mu}(T_1T_2)^{p^\mu}$. Also ist $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$ eine Gruppe. Offenbar führt jeder Automorphismus von $\mathfrak{G}$ diese Gruppe in sich selbst über, also ist sie charakteristisch in $\mathfrak{G}$. Auch $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ ist eine Gruppe, denn für $S \in \mathfrak{G}$, $T_1, T_2 \in \mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ hat man: $(ST_1T_2)^{p^\mu} = (ST_1)^{p^\mu} = S^{p^\mu}$. Es ist klar, dass auch $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ charakteristisch in $\mathfrak{G}$ ist. Wählt man $S = E$ ($=$ Einselement von $\mathfrak{G}$), $T \in \mathfrak{U}_{1,p^\mu}$, so hat man $(ET)^{p^\mu} = E^{p^\mu} = E = T^{p^\mu}$, also hat $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ höchstens den Exponenten p^μ. Daher erfüllen die Elemente $T \in \mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ geforderte Relation $(ST)^{p^\mu} = S^{p^\mu}T^{p^\mu}$, also ist $\mathfrak{U}_{1,p^\mu} \leqq \mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$.

2.1.2. *In* $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$ *bildet die Menge aller Elemente von der Ordnung* $\leq p^\mu$ *die Gruppe* $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$.

Beweis. Sind $T_1, T_2 \in \mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$ und ist $T_1^{p^\mu} = T_2^{p^\mu} = 1$, so ist $(T_1T_2)^{p^\mu} =$

$T_1^{p^\mu}\cdot T_2^{p^\mu}=1$. Also bildet die Menge aller Elemente $T\in\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$, deren Ordnung $\leqq p^\mu$ ist, eine Untergruppe $\mathfrak{V}$. Da aber gleichzeitig für diese Elemente T und beliebige Elemente $S\in\mathfrak{G}$ gilt: $(ST)^{p^\mu}=S^{p^\mu}T^{p^\mu}=S^{p^\mu}$, ist diese Untergruppe $\mathfrak{V}\leqq\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$. Da nach 2.1.1 aber auch $\mathfrak{V}\geqq\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ ist, folgt $\mathfrak{V}=\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$.

Ist $\mathfrak{G}$ ein direktes Produkt $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\times\mathfrak{G}_2\times\cdots\times\mathfrak{G}_k$, so ist $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})=\prod_{i=1}^{k}\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}_i)$, $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})=\prod_{i=1}^{k}\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}_i)$; $\mu=0,1,\ldots$. Denn ist $S_i\in\mathfrak{G}_i$, $T_i\in\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}_i)$, $i=1,\ldots,k$, so ist $(\prod_{i=1}^{k}S_i\cdot\prod_{i=1}^{k}T_i)^{p^\mu}=(\prod_{i=1}^{k}S_iT_i)^{p^\mu}=\prod_{i=1}^{k}S_i^{p^\mu}T_i^{p^\mu}=(\prod_{i=1}^{k}S_i)^{p^\mu}(\prod_{i=1}^{k}T_i)^{p^\mu}$ also $\prod_{i=1}^{k}\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}_i)\leqq\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$. Andererseits muss aber $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})\leqq\prod_{i=1}^{k}\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}_i)$ sein; denn: ist $T\in\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})$, so ist T eindeutig als ein Produkt $\prod_{i=1}^{k}T_i$ von Elementen $T_i\in\mathfrak{G}_i$ darstellbar. Wählt man etwa S_1 beliebig aus $\mathfrak{G}$, so hat man $(S_1T)^{p^\mu}=S_1^{p^\mu}T^{p^\mu}=S_1^{p^\mu}\prod_{i=1}^{k}T_i^{p^\mu}=S_1^{p^\mu}T_1^{p^\mu}(\prod_{i=2}^{k}T_i)^{p^\mu}=(S_1T_1)^{p^\mu}(\prod_{i=2}^{k}T_i)^{p^\mu}$ also $(S_1T_1)^{p^\mu}=S_1^{p^\mu}T_1^{p^\mu}$ für alle $S_1\in\mathfrak{G}_1$, d.h. $T_1\in\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}\ )$ und allgemein: $T_i\in\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}_i)$. Also $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})\leqq\prod_{i=1}^{k}\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}_i)$ und daher $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})=\prod_{i=1}^{k}\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}_i)$. Ebenso beweist man: $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G})=\prod_{i=1}^{k}\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}_i)$.

2.1.3. $(\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu},\mathfrak{G}(p^\mu))=1$.

Beweis. Es sei $S\in\mathfrak{G}$, $T\in\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$. Dann ist $(ST)^{p^\mu}=S^{p^\mu}T^{p^\mu}$, $(S^{-1}T^{-1})^{p^\mu}=S^{-p^\mu}T^{-p^\mu}=(TS)^{-p^\mu}=(T^{p^\mu}S^{p^\mu})^{-1}$ also $(TS)^{p^\mu}=T^{p^\mu}S^{p^\mu}$, aber auch $(TS)^{p^\mu}=T(ST)^{p^\mu}T^{-1}=TS^{p^\mu}T^{p^\mu}T^{-1}=TS^{p^\mu}T^{p^\mu-1}=T^{p^\mu}S^{p^\mu}$ also $(S^{p^\mu},T^{p^\mu-1})=1$, daher $(S^{p^\mu},T)=1$, w.z.b.w.

2.1.4. $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}\leqq\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu})$.

Beweis. Nach 2.1.3 ist für beliebige $S\in\mathfrak{G}$, $T\in\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$: $(T,S^{p^\mu})=1$. Nun ist $(T,S^{p^\mu})\equiv((T,S)\cdot S^{-1})^{p^\mu}S^{p^\mu}$. Da mit T auch (T,S) in $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$ liegt, ist $((T,S)\cdot S^{-1})^{p^\mu}=(T,S)^{p^\mu}\cdot S^{-p^\mu}$, also hat man: $1=(T,S^{p^\mu})=(T,S)^{p^\mu}$. Demnach hat (T,S) die Höchstordnung p^μ und liegt in $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$ also nach 2.1.2 in $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$. Folglich liegt $(\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu},\mathfrak{G})$ in $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$. Nun ist gerade $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu})$ die Gruppe aller Elemente aus $\mathfrak{G}$, deren Kommutator mit jedem Elemente aus $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ liegt. Mithin folgt aus $(\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu},\mathfrak{G})\leqq\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$: $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}\leqq\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu})$.

2.1.4.1. *In eine regulären Gruppe $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}=\Omega_\mu$, $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}=\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\Omega_\mu)$.*

Denn $S\in\mathfrak{G}$, $T\in\Omega_\mu$, $(ST)^{p^\mu}=S^{p^\mu}T^{p^\mu}\prod_{\nu}(\mathfrak{f}_\nu(S,T))^{p^\mu}=S^{p^\mu}$, da die Kommutatoren $\mathfrak{f}_\nu(S,T)$ sämtlich in Ω_μ liegen, also $\Omega_\mu\leqq\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$; da aber Ω_μ alle Elemente der Ordnung $\leqq p^\mu$ enthält und $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ den Höchstexponenten p^μ hat, ist auch $\Omega_\mu\geqq\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$; also $\Omega_\mu=\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$. Ist andererseits $S\in\mathfrak{G}$,

$T \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \Omega_\mu)$, so ist $(ST)^{p^\mu} = S^{p^\mu} T^{p^\mu} \prod_\nu (\mathfrak{k}_\nu(S, T))^{p^\mu} = S^{p^\mu} T^{p^\mu}$, da die Kommutatoren $\mathfrak{k}_\nu(S, T)$ sämtlich in Ω_μ liegen. Demnach ist $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \Omega_\mu) \subseteq \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}$. Zusammen mit 2.1.4 ergibt das: In einer regulären Gruppe ist $\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu} = \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1, p^\mu})$, $\mathfrak{U}_{1, p^\mu} = \Omega_\mu$.

Es ist offenbar in beliebigen regulären oder nicht regulären Gruppen $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}_{1, p^0} = 1 \subset \mathfrak{U}_{1, p} \subset \mathfrak{U}_{1, p^2} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{U}_{1, p^\kappa} = \mathfrak{G}$, $1 \subset \mathfrak{U}^*_{1, p} \subseteq \mathfrak{U}^*_{1, p^2} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{U}^*_{1, p^\kappa} = \mathfrak{G}$.

2.1.5. *Für beliebige $\mu = 0, 1, \ldots, \kappa$ bildet die Menge der p^μ-ten Potenzen der Elemente $\in \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}$ eine Gruppe $\mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$, die in $\mathfrak{G}$ charakteristisch ist. Es ist $\mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}) \subseteq \mathfrak{D}^*_{1, p^\mu}(\mathfrak{G})$. Ferner ist $\mathfrak{U}_{1, p^\mu} \subseteq \mathfrak{D}_{1, p^\mu}(\mathfrak{G})$.*

Beweis. Sind $T_1, T_2 \in \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}$, so ist nach der Definition von $\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}$ $(T_1 T_2)^{p^\mu} = T_1^{p^\mu} T_2^{p^\mu}$. Also bilden die p^μ-ten Potenzen der Elemente aus $\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}$ eine Gruppe $\mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$, die selbstverständlich in $\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}$ charakteristisch ist; da $\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}$ in $\mathfrak{G}$ charakteristisch ist, ist auch $\mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$ in $\mathfrak{G}$ charakteristisch. Ist weiter $T \in \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}$, $S \in \mathfrak{G}$, so ist $S^{p^\mu} T^{p^\mu} = (ST)^{p^\mu}$; daher muss T^{p^μ}, also $\mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$ in jeder $\mho_\mu(\mathfrak{G})$ liegen, also im Durchschnitt $\mathfrak{D}^*_{1, p^\mu}$ aller $\mho_\mu(\mathfrak{G})$ (wobei μ natürlich festgehalten ist). Ebenso folgt, dass $\mathfrak{U}_{1, p^\mu}$ im Durchschnitt aller $\Omega_\mu(\mathfrak{G})$, also in $\mathfrak{D}_{1, p^\mu}$ liegen muss.

2.1.5.1. *Ist $\mathfrak{D}^*_{1, p^\mu}(\mathfrak{G}) = 1$, so ist $\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu} = \mathfrak{U}_{1, p^\mu}$.*
Denn $\mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}) \subseteq \mathfrak{D}^*_{1, p^\mu}(\mathfrak{G}) = 1$.

Die Gruppen $\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}$, $\mathfrak{U}_{1, p^\mu}$ erhalten ihre Bedeutung durch den folgenden Satz und die auf ihm beruhenden Sätze:

2.1.6. *Es ist $\mathfrak{U}_{1, p^\mu} \supseteq \Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$.*

Beweis. Zunächst sei daran erinnert, dass $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$ eine reguläre Gruppe ist und dass nach 1.2 sogar für beliebige $S \in \mathfrak{G}$ die Gruppe $\{S, \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})\}$ regulär ist. Ferner ist $\Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}))$ charakteristisch in $\mathfrak{G}$. Es sei $S \in \mathfrak{G}$, $T \in \Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{Z}))$. Wir haben zu zeigen $(ST)^{p^\mu} = S^{p^\mu}$. ST liegt in der regulären Gruppe $\{S, T\} = \mathfrak{B}$, also $T \in \Omega_\mu(\mathfrak{B})$, $(ST)^{p^\mu} = S^{p^\mu} T^{p^\mu} \prod (\mathfrak{k}_\nu(S, T))^{p^\mu} = S^{p^\mu}$ w.z.b.w.

Aus 2.1.6 geht hervor, dass $\mathfrak{U}_{1, p^\mu}$ nicht lediglich trivialerweise gleich $\Omega_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}))$ ist. In Anbetracht dieser Tatsache ist der folgende allgemeine Vertauschungssatz wichtig:

2.1.7.
$$\left.\begin{array}{l} (\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1, p^\mu}), \mathfrak{G}(p^\mu)) = 1 \quad \textit{also} \\ (\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1, p^\mu}), H_\lambda(\mathfrak{G}(p^\mu))) = 1, \ \lambda = 1, 2, \ldots \\ (H_{\lambda+1}(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1, p^\mu})), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{G}(p^\mu))) = 1, \ \lambda = 0, 1, \ldots \end{array}\right\} \mu = 0, 1, \ldots$$

Beweis. Auf Grund von 1.9. genügt es, die erste Relation zu beweisen: $(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1, p^\mu}), \mathfrak{G}(p^\mu)) = 1$, Es sei also $S \in \mathfrak{G}$, $T \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1, p^\mu})$. Wir haben $T^{-1} S^{p^\mu} T = S^{p^\mu}$ zu zeigen. Nun ist $T^{-1} S^{p^\mu} T \equiv (T^{-1} S T)^{p^\mu}$

$\equiv (S\cdot(S,T))^{p^\mu} = S^{p^\mu}$, da $(S,T)\in \mathfrak{U}_{1,p^\mu}$ ist. Also $(T, S^{p^\mu})=1$, w.z.b.w.

2.1.7.1. $(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}), \mathfrak{G}(p^\mu,\nu)) = (\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}), \mathfrak{G}(p^{\mu\nu}))$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{G}(p^\mu,\nu)H_p(\mathfrak{G}(p^\mu)) = \mathfrak{G}(p^{\mu\nu})H_p(\mathfrak{G}(p^\mu))$, denn $\mathfrak{G}(p^\mu)/H_p(\mathfrak{G}(p^\mu))$ ist eine reguläre Gruppe; also $\mathfrak{G}(p^\mu,\nu)\leq \mathfrak{G}(p^{\mu\nu})\,H_p(\mathfrak{G}(p^\mu))$, daher $(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}), \mathfrak{G}(p^\mu,\nu)) \leq (\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}), \mathfrak{G}(p^{\mu\nu})H_p(\mathfrak{G}(p^\mu))) = (\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}), \mathfrak{G}(p^{\mu\nu}))$ da nach 2.1.7. $(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}), H_p(\mathfrak{G}(p^\mu)))=1$ ist. Andererseits ist offenbar $\mathfrak{G}(p^{\mu\nu})\leq\mathfrak{G}(p^\mu,\nu)$, also $(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}), \mathfrak{G}(p^\mu,\nu)) \geq (\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}), \mathfrak{G}(p^{\mu\nu}))$. Damit folgt die behauptete Gleichheit.

Aus 2.1.7.1 ergibt sich für $\nu = \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1$:

2.1.7.2. $(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}), \mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1)) = 1, \quad \mu = 1, 2, \ldots$.

In einer regulären Gruppe $\mathfrak{G}$ ist: $\mathfrak{G}(p^\mu) = \mho_\mu(\mathfrak{G})$ und (s.o.) $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}) = \Omega_\mu(\mathfrak{G})$. 2.1.7 liefert dann den aus der Theorie der regulären p-Gruppen bekannten Satz $(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\Omega_\mu), \mho_\mu)=1$. Also ist 2.1.7 eine genaue Verallgemeinerung auf beliebige endliche p-Gruppen $\mathfrak{G}$ des erwähnten Hallschen Satzes über reguläre p-Gruppen.

Eine weitere wichtige Vertauschbarkeitssrelation besteht zwischen den Elementen der Gruppe $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}) = \mathfrak{H}_\mu$, die aus allen Elementen der Ordnung $\leq p^\mu$ erzeugt wird einerseits, und den Elementen aus $\mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu})$ andererseits:

2.1.8. $$\begin{aligned} &(\mathfrak{H}_\mu, \mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu})) = 1 & \\ &(H_{\lambda+1}(\mathfrak{H}_\mu), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1,p}))) = 1 & \lambda = 0,1,\ldots \\ &(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{H}_\mu), H_{\lambda+1}(\mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))) = 1 & \mu = 0,1,\ldots \end{aligned}$$

Beweis. Wir haben wieder nur die erste Formel für $\lambda=0$ zu beweisen, also $(\mathfrak{H}_\mu, \mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))=1$. Das ist bewiesen, wenn wir gezeigt haben: Es gibt ein System von erzeugenden Elementen ... S ... von $\mathfrak{H}_\mu$ von der Art, dass mit jedem Element T aus $\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$ die Beziehung $(S, T^{p^\mu})=1$ besteht. Nun kann $\mathfrak{H}_\mu$ nach Definition aus Elementen der Ordnung $\leq p^\mu$ erzeugt werden. Wir werden also zeigen: Ist $S^{p^\mu}=1$, $S\in\mathfrak{G}$, $T\in\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}$, so ist $(S, T^{p^\mu})=1$.

Zunächst haben wir: $(S, T^{p^\mu}) \equiv ((S,T)\cdot T^{-1})^{p^\mu}\cdot T^{p^\mu} = (S,T)^{p^\mu}\cdot T^{-p^\mu}\cdot T^{p^\mu} = (S,T)^{p^\mu}$. Wir haben $(S,T)^{p^\mu}=1$ zu zeigen. Nach 2.1.4 ist: $(S,T)\in\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$, also $(S,T)^{p^\mu}=1$, womit 2.1.8 bewiesen ist.

Offenbar ist $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})\geq\mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu})$; denn $\mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu})$ kann aus Elementen $S^{p^{\kappa-\mu}}$ erzeugt werden, diese haben aber sämtlich die Höchstordnung p^μ, liegen also in $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$. Also folgt aus 2.1.8:

2.1.8.1. $(\mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu}), \mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))=1$

2.1.9. *Es sei* $S\in\mathfrak{G}$, $T\in\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu})$. *Dann ist* $(S^{p^\mu}, T) = (S, T^{p^\mu})$

$= (S, T)^{p^\mu}$

Beweis. $(S^{p^\mu}, T) \equiv S^{-p^\mu}(S \cdot (S, T))^{p^\mu} = S^{-p^\mu} \cdot S^{p^\mu}(S, T)^{p^\mu} = (S, T)^{p^\mu}$, da $(S, T) \in \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}$ ist. Ebenso $(S, T^{p^\mu}) \equiv ((S, T) \cdot T^{-1})^{p^\mu} \cdot T^{p^\mu} = (S, T)^{p^\mu} \cdot T^{-p^\mu} \cdot T^{p^\mu} = (S, T)^{p^\mu}$. Also $(S^{p^\mu}, T) = (S, T)^{p^\mu} = (S, T^{p^\mu})$. w.z.b.w.

2.1.9.1. *Ist* $S \in \mathfrak{G}$, $T \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$, *so zieht jede der drei Gleichungen* $(S^{p^\mu}, T) = 1$, $(S, T^{p^\mu}) = 1$, $(S, T)^{p^\mu} = 1$ *die beiden andern nach sich.*

2.1.9.2. $(\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})) \leq \mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$.

Denn nach 2.1.9 liegt jedes erzeugende Element von $(\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}))$ in $(\mathfrak{G}, \mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}))$ und jedes erzeugende Element von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}))$ in $(\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}))$. Also sind beide Gruppen einander gleich. Für $S \in \mathfrak{G}$, $T \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$ liegt aber (S, T) in $\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}$, also $(S, T)^{p^\mu}$ in $\mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$, wie behauptet wurde.

2.1.9.3. $(\mathfrak{H}_\mu, \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})) \leq \mathfrak{U}_{1, p^\mu}$.

Beweis. Es genügt nachzuweisen: Ist $S_1, S_2, \ldots$ ein System von Erzeugenden von $\mathfrak{H}_\mu$, T beliebig aus $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$, so liegen (S_1, T), (S_2, T), ... in $\mathfrak{U}_{1, p^\mu}$. Denn dann liegt auch $(S_1 S_2, T) \equiv (S_1, T)(S_1, T, S_2)(S_2, T)$ in $\mathfrak{U}_{1, p^\mu}$. Nun kann $\mathfrak{H}_\mu$ aber von Elementen S, die $S^{p^\mu} = 1$ erfüllen, erzeugt werden, also $1 = (S^{p^\mu}, T) = (S, T)^{p^\mu}$. (S, T) hat also die Höchstordnung p^μ und liegt in $\mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}$ also nach 2.1.2. in $\mathfrak{U}_{1, p^\mu}$.

2.1.10. *Es ist*

$$\begin{array}{ll}
a)\ (\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{G}(p^\mu)), H_{\lambda+1}(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})))) = 1 & \\
b)\ (H_{\lambda+1}(\mathfrak{G}(p^\mu)), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})))) = 1 & \\
c)\ (\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})), H_{\lambda+1}(\mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}))) = 1 & \lambda = 0, 1, \ldots \\
d)\ (H_{\lambda+1}(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}))) = 1 & \mu = 0, 1, \ldots
\end{array}$$

Beweis. Ist $S \in \mathfrak{G}$, $T \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$ und $T^{p^\mu} = 1$, so ist nach 2.1.9. $(S^{p^\mu}, T) = 1$, also $(\mathfrak{G}(p^\mu), T) = 1$. Da $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}))$ aus Elementen T_ν mit $T_\nu^{p^\mu} = 1$ erzeugt werden kann, haben wir demnach $(\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}))) = 1$, woraus die Formeln a) und b) folgen. Ebenso: Ist $S^{p^\mu} = 1$, $T \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$, so ist nach 2.1.9. $(S, T^{p^\mu}) = 1$, also $(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}), T^{p^\mu}) = 1$, daher auch $(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}), \mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}))) = 1$; das ergibt die Formeln c) und d).

Der von P. Hall (Verbal and Marginal Subgroups) bemerkte Dualismus "order- power structure" macht sich in 2.1.10 in interessanter Weise bemerkbar. $\mathfrak{G}(p^{p^\mu})$, $\mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}))$ sind die kleinsten Gruppen, die alle Elemente X enthalten, welche einer Gleichung $X = Y^{p^\mu}$, $Y \in \mathfrak{G}$ bzw. $Y \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$ genügen. $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu}))$ sind die kleinsten Gruppen welche alle Elemente X enthalten, die der Gleichung $X^{p^\mu} = 1$, $X \in \mathfrak{G}$ bzw. $X \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1, p^\mu})$ genügen. Durch die Vertauschung der Begriffe: p^μ-te Potenz—Ordnung p^μ gehen $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))$ in $\mathfrak{G}(p^\mu)$ bzw. $\mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))$ über und umgekehrt. Dabei gehen die Sätze 10a), 10b) in 10c), 10d) und 10c), 10d) in 10a), 10b) über.

Bemerkung: In nicht regulären p-Gruppen kommt es oft vor, dass für irgendein $\mu<\kappa$, $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}$ ist: z.B. ist in den p-Sylow-Gruppen $\mathfrak{G}$ der symmetrischen Gruppen stets $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G})$, obwohl der Exponent beliebig gross werden kann. Ist $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}$, so folgt aus 10c): $\mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))$ $\leq\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$.

2.1.11. $(\mathfrak{G}(p^\mu),\ \mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}),\ \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))=1$ *also auch*

$$(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div(\mathfrak{G}(p^\mu),\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})),\ H_{\lambda+1}(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu})))=1 \quad \lambda=0,1,\ldots$$
$$(H_{\lambda+1}(\mathfrak{G}(p^\mu),\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})),\ \mathfrak{Z}_{\lambda+1}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))=1 \qquad \mu=0,1,\ldots$$

Beweis. Wir haben nach 1.9. nur die erste Formel zu beweisen. Dazu benutzen wir folgenden Satz von P. Hall: Sind $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ drei beliebige Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist jede der drei Gruppen $(\mathfrak{L},\mathfrak{M},\mathfrak{N})$, $(\mathfrak{M},\mathfrak{N},\mathfrak{L})$, $(\mathfrak{N},\mathfrak{L},\mathfrak{M})$ in der Vereinigungsgruppe der beiden anderen enthalten.

Es sei $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}(p^\mu)$, $\mathfrak{M}=\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu})$, $\mathfrak{N}=\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$. Dann liegt $(\mathfrak{L},\mathfrak{M})$ nach 2.1.9. in $\mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu})$, also wird nach 10c) $(\mathfrak{L},\mathfrak{M},\mathfrak{N})=1$. Ferner liegt $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ nach 2.1.9.3 in $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$, also wird nach 2.1.7 auch $(\mathfrak{M},\mathfrak{N},\mathfrak{L})\cdot$ $(\mathfrak{L},\mathfrak{M},\mathfrak{N})=1$. Daher ergibt der Hallsche Satz: $(\mathfrak{N},\mathfrak{L},\mathfrak{M})=1$, d.h. $(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}),\mathfrak{G}(p^\mu),\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))=1$ w.z.b.w.

Auch dieser Satz steht unter dem oben erwähnten Dualismus: Vertauscht man die Begriffe: p^μ-te Potenz—Ordnung p^μ, so geht $\mathfrak{G}(p^\mu)$ in $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$ in $\mathfrak{G}(p^\mu)$, also $(\mathfrak{G}(p^\mu),\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}))$ in sich selbst über.

2.1.12.
$$\left.\begin{aligned}&(\mathfrak{G},\ \mathfrak{P}_{\kappa-\mu}\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^{\kappa-\mu}}),\ \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))=1\\ &(\mathfrak{P}_{\kappa-\mu}\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^{\kappa-\mu}}),\ \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}),\ \mathfrak{G})=1\end{aligned}\right. \qquad \mu=0,1,\ldots$$

Beweis. Wenn die erste Formel bewiesen ist, folgt die zweite sofort durch Vertauschung von μ und $\kappa-\mu$ und Anwendung des im Beweis von 2.1.11 benutzten Hallschen Satzes.

Nach 2.1.9.2 ist $(\mathfrak{G},\mathfrak{P}_{\kappa-\mu}\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^{\kappa-\mu}}))\leq\mho_{\kappa-\mu}(\mathfrak{U}^*_{1,p^{\kappa-\mu}})$. Die Elemente dieser Gruppe sind aber sämtlich $p^{\kappa-\mu}$-te Potenzen, haben also die Höchstordnung p^μ und liegen daher in $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$. Also ist $(\mathfrak{G},\mathfrak{P}_{\kappa-\mu}\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}$ $\div\mathfrak{U}^*_{1,p^{\kappa-\mu}}))\leq\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})$ und da nach 2.1.10c) $(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}),\mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))=1$ ist, folgt $(\mathfrak{G},\mathfrak{P}_{\kappa-\mu}\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^{\kappa-\mu}}),\mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))=1$ w.z.b.w.

Folgerung: $(\mathfrak{P}_{\kappa-\mu}\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^{\kappa-\mu}}),\ \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}))\leq\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$

2.1.13.
$$(\mathfrak{G},\ \mathfrak{P}_{2\mu}\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}))=(\mathfrak{G}(p^{2\mu}),\ \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}))$$
$$=\mathfrak{P}_{2\mu}(\mathfrak{G},\ \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}))=\mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{G}(p^\mu),\ \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}))$$

$$= \mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu})) = (\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu})) \qquad \mu = 1, 2, \ldots$$

Beweis. Es sei $S \in \mathfrak{G}$, $T \in \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu})$. Wir zeigen: $(S, T^{p2\mu}) = (S^{p2\mu}, T) = (S, T)^{p2\mu} = (S^{p\mu}, T)^{p\mu} = (S, T^{p\mu})^{p\mu} = (S^{p\mu}, T^{p\mu})$, daraus folgt der Satz. $(S, T^{p2\mu}) = (S, T^{p\mu})^{p\mu}$, denn $(S, T^{p2\mu}) \equiv (S, T^{p\mu(p\mu-1)})(S, T^{p\mu})$ $(S, T^{p\mu}, T^{p\mu(p\mu-1)}) = (S, T^{p\mu(p\mu-1)})(S, T^{p\mu})$ u.s.w. denn $(S, T^{p\mu}) \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu})$ ist nach 2.1.7. mit allen p^μ-ten Potenzen vertauschbar. $(S, T^{p\mu}) = (S, T)^{p\mu}U$, $U \in \mathfrak{U}_{1,p\mu}(\mathfrak{G})$, denn $(S, T, T), \ldots \in \mathfrak{U}_{1,p\mu}$. Also $(S, T^{p2\mu}) = (S, T^{p\mu})^{p\mu} = (S, T)^{p2\mu}$. Mit derselben Begründung finden wir: $(S^{p2\mu}, T) = (S^{p\mu}, T)^{p\mu} = (S, T)^{p2\mu}$ und $(S^{p\mu}, T^{p\mu}) = (S^{p\mu}, T)^{p\mu} = (S, T)^{p2\mu}$. Also haben wir $(S, T^{p2\mu}) = (S, T^{p\mu})^{p\mu} = (S, T)^{p2\mu} = (S^{p2\mu}, T) = (S^{p\mu}, T)^{p\mu} = (S^{p\mu}, T^{p\mu})$ w.z.b.w.

Alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{P}_{2\mu}(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu}))$ sind $p^{2\mu}$-te Potenzen aus $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu})$, denn $S_1, S_2 \in \mathfrak{G}$, $T_1, T_2 \in \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu})((S_1, T)(S_2, T_2))^{p2\mu} = ((S_1, T_1)^{p\mu}(S_2, T_2)^{p\mu}U)^{p\mu} = ((S_1, T)^{p\mu}(S_2, T_2)^{p\mu})^{p\mu}$ (da $U \in \mathfrak{U}_{1,p\mu}$) $= (S_1, T_1)^{p2\mu}(S_2, T_2)^{p2\mu}$, da $(S_1, T_1)^{p\mu}$, $(S_2, T_2)^{p\mu}$ in $\mathfrak{G}(p^\mu) \cap \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu})$ liegen, also nach 2.1.7 miteinander vertauschbar sind.

Entsprechend beweist man: Jedes Element aus $\mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu}))$ bzw. $\mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu}))$ ist eine p^μ-te Potenz eines Elementes aus $(\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu}))$ bzw. $(\mathfrak{G}, \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu}))$.

2.1.13.1. *Jede einzelne der folgenden sechs Gleichungen zieht die übrigen fünf nach sich, wenn* $T \in \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu})$ *ist*: $(S^{p2\mu}, T) = 1$, $(S^{p\mu}, T)^{p\mu} = 1$, $(S, T)^{p2\mu} = 1$, $(S, T^{p2\mu}) = 1$, $(S, T^{p\mu})^{p\mu} = 1$, $(S^{p\mu}, T^{p\mu}) = 1$.

2.1.13.2. $(\mathfrak{H}_{2\mu}(\mathfrak{G}), \mathfrak{P}_{2\mu}\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu})) = 1$.

Denn $\mathfrak{H}_{2\mu}(\mathfrak{G})$ kann von Elementen S mit $S^{p2\mu} = 1$ erzeugt werden. Wegen 2.1.13.1 ergibt sich:

$$(\mathfrak{P}_\mu\mathfrak{H}_{2\mu}(\mathfrak{G}), \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu})) = 1$$
$$(\mathfrak{G}(p^{2\mu}), \mathfrak{H}_{2\mu}(\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu}))) = 1$$

daher, nach 1.9

$$\text{a)} \begin{cases} (\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{H}_{2\mu}(\mathfrak{G})), H_{\lambda+1}(\mathfrak{P}_{2\mu}\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu}))) = 1 \\ (H_{\lambda+1}(\mathfrak{H}_{2\mu}(\mathfrak{G})), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{P}_{2\mu}\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu}))) = 1 \end{cases}$$
$$(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{P}_\mu\mathfrak{H}_{2\mu}(\mathfrak{G})), H_{\lambda+1}(\mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu}))) = 1$$
$$(H_{\lambda+1}(\mathfrak{P}_\mu\mathfrak{H}_{2\mu}(\mathfrak{G})), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu}))) = 1$$
$$\text{b)} \begin{cases} (\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{G}(p^{2\mu})), H_{\lambda+1}(\mathfrak{H}_{2\mu}(\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu})))) = 1 \\ (H_{\lambda+1}(\mathfrak{G}(p^{2\mu})), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{H}_{2\mu}(\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p\mu})))) = 1 \end{cases}$$

a) und b) zeigen wieder den oben erwähnten Dualismus: Werden die Begriffe $p^{2\mu}$-te Potenz—Ordnung $p^{2\mu}$ vertauscht, so geht a) in b) und b) in a) über.

2.1.13.3. $(\mathfrak{G}(p^\mu, 2), \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})) = (\mathfrak{G}(p^{2\mu}), \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}))$
$= (\mathfrak{G}, \mathfrak{P}_{2\mu}\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})) = \mathfrak{P}_{2\mu}(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}))$
$= \mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})) = \mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}))$
$= (\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}))$.

Denn $\mathfrak{G}(p^\mu, 2) \leq \mathfrak{G}(p^{2\mu}) H_2(\mathfrak{G}(p^\mu))$ und $(H_2(\mathfrak{G}(p^\mu)), \mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})) = 1$ nach 2.1.7.

2.1.14. $(H_\lambda(\mathfrak{G}), \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})) = 1 \qquad \lambda = 1, 2, \ldots$
$(\mathfrak{P}_\mu(H_\lambda(\mathfrak{G})), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})) = 1 \qquad \mu = 1, 2, \ldots$

Beweis. Sei $S \in H_\lambda(\mathfrak{G})$, $T \in \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})$, dann liegt (S, T) in $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$. Also $(S, T^{p^\mu}) \equiv ((S, T) \cdot T^{-1})^{p^\mu} \cdot T^{p^\mu} = (S, T)^{p^\mu} = 1$ und $(S^{p^\mu}, T) \equiv S^{-p^\mu}(S \cdot (S, T))^{p^\mu} = S^{-p^\mu} \cdot S^{p^\mu} = 1$.

Folgerung: $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})/\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$ hat höchstens den Exponenten p^μ, denn für $\lambda = 1$ ergibt sich aus obigem Satz: $\mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}))$ liegt in $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$. Ebenso ergibt sich für beliebige λ: Bezeichnet $\mathfrak{K}H_\lambda(\mathfrak{G})$ den Zentralisator in $\mathfrak{G}$ von $H_\lambda(\mathfrak{G})$, so hat $\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})/\mathfrak{K}H_\lambda(\mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})$ höchstens den Exponenten p^μ. Und: Bezeichnet $\mathfrak{K}\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})$ den Zentralisator in $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})$, so hat $H_\lambda(\mathfrak{G})/H_\lambda(\mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{K}\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})$ höchstens den Exponenten p^μ. Speziell: Ist $\bar{c}$ die Klasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$, so hat $H_{\bar{c}}(\mathfrak{G})/H_{\bar{c}}(\mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ höchstens den Exponenten p^μ.

Nach 2.1.7 und 2.1.14 liegt also $H_\lambda(\mathfrak{G}(p^\mu)) \cdot \mathfrak{P}_\mu H_\lambda(\mathfrak{G})$ im Zentralisator von $\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})$.

Da $H_\lambda(\mathfrak{G})$ von μ unabhängig ist, ergibt sich aus 2.1.14:

2.1.14.1. $\bigvee_\mu \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})$ *liegt im Zentralisator von* $H_\lambda(\mathfrak{G})$.

Die erste Aussage von 2.1.14 lässt noch eine wichtige Verallgemeinerung zu.

2.1.15. *Es sei* $\mathfrak{N}$ *ein beliebiger Normalteiler von* $\mathfrak{G}$. *Dann gilt:* $(H_\lambda(\mathfrak{G}), \mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})) \wedge \mathfrak{N})) = 1$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, $\mu = 1, 2, \ldots$ *also, wenn wir der bequemeren Schreibung wegen* $\mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})) \wedge \mathfrak{N})$ *mit* $\mathfrak{V}(\mathfrak{N})$ *bezeichnen:*

$$\left.\begin{array}{l}(H_{\rho+1}(H_\lambda(\mathfrak{G})), \mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G} \div \mathfrak{V}(\mathfrak{N}))) = 1 \\ (\mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G} \div H_\lambda(\mathfrak{G})), H_{\rho+1}(\mathfrak{V}(\mathfrak{N}))) = 1\end{array}\right. \quad \rho = 0, 1, \ldots, \ \lambda = 1, 2, \ldots$$

Beweis. Sei $S \in H_\lambda(\mathfrak{G})$, $T \in \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})) \wedge \mathfrak{N}$. Dann liegt (S, T)

in $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})$, also ist $(S,T)^{p^\mu}=1$ und $(S,T^{p^\mu})\equiv((S,T)\cdot T^{-1})^{p^\mu}T^{p^\mu}$ $=T^{-p^\mu}\cdot T^{p^\mu}=1$.

2.1.16. *Ist* $\lambda \geq \left[\frac{c+1}{2}\right]$, *wobei c die Klasse von* $\mathfrak{G}$ *ist, und* $\mathfrak{N}$ *ein beliebiger Normalteiler in* $\mathfrak{G}$, *so ist*

$$(\mathfrak{P}_\mu H_\lambda(\mathfrak{G}),\ \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})))=1\,,\qquad \mu=1,2,\ldots.$$

also auch $(\mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G}\div\mathfrak{P}_\mu H_\lambda(\mathfrak{G})),\ H_{\rho+1}(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))))=1,\ \rho=0,1,2,\ldots.$

Beweis. Ist $S\in H_\lambda(\mathfrak{G})$, $T\in\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))$, so liegt (S,T) in $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})$ $\wedge H_{\lambda+1}(\mathfrak{G})$, es ist also $(S,T)^{p^\mu}=1$ und $((S,T),S)\in H_{2\lambda+1}(\mathfrak{G})=1$, daher $(S^{p^\mu},T)=(S,T)^{p^\mu}=1$.

Nun kann in 2.1.15, 2.1.16 $\mathfrak{N}$ jeder beliebige Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sein. Also gilt nach 2.1.15: Lassen wir $\mathfrak{N}$ alle Normalteiler von $\mathfrak{G}$ durchlaufen und bezeichnen wir die Vereinigungsgruppe $\bigvee_{\mathfrak{N}} \mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))\wedge\mathfrak{N})$ mit $\mathfrak{M}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})$, so ist $\mathfrak{M}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})$ charakteristisch in $\mathfrak{G}$ und liegt im Zentralisator von $H_\lambda(\mathfrak{G})$:

2.1.17. $(H_\lambda(\mathfrak{G}),\ \mathfrak{M}(\lambda,\mu,\mathfrak{G}))=1$ *und*
$(\mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G}\div H_\lambda(\mathfrak{G})),\ H_{\rho+1}(\mathfrak{M}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})))=1$
$(H_{\rho+1}(H_\lambda(\mathfrak{G})),\ \mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G}\div\mathfrak{M}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})))=1$

Nun ist $H_\lambda(\mathfrak{G})$ aber von μ unabhänging. Also liegt auch die Vereingungsgruppe $\bigvee_{\mu}\mathfrak{M}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})$ über alle $\mu=1,2,\ldots$ im Zentralisator von $H_\lambda(\mathfrak{G})$, sie ist eine charakteristische Untergruppe $\mathfrak{M}(\lambda,\mathfrak{G})$; wir haben also

2.1.18. $(H_\lambda(\mathfrak{G}),\ \mathfrak{M}(\lambda,\mathfrak{G}))=1$
$(\mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G}\div H_\lambda(\mathfrak{G})),\ H_{\rho+1}(\mathfrak{M}(\lambda,\mathfrak{G})))=1 \qquad \lambda=1,2,\ldots$
$(H_{\rho+1}(H_\lambda(\mathfrak{G})),\ \mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G}\div\mathfrak{M}(\lambda,\mathfrak{G})))=1 \qquad \rho=0,1,\ldots$

Ebenso können wir mit 2.1.16 verfahren. Lassen wir $\mathfrak{N}$ alle Normalteiler von $\mathfrak{G}$ durchlaufen und bezeichnen die Vereinigungsgruppe $\bigvee_{\mathfrak{N}}\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))$ mit $\mathfrak{N}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})$, so haben wir:

2.1.19. *Ist c die Klasse von* $\mathfrak{G}$ *und* $\lambda\geq\left[\frac{c+1}{2}\right]$, *so isi*
$(\mathfrak{P}_\mu(H_\lambda(\mathfrak{G})),\ \mathfrak{N}(\lambda,\mu,\mathfrak{G}))=1$
$(\mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G}\div\mathfrak{P}_\mu H_\lambda(\mathfrak{G})),\ H_{\rho+1}(\mathfrak{N}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})))=1$

(*Die Formel* $(H_{\rho+1}(\mathfrak{P}_\mu H_\lambda(\mathfrak{G})),\ \mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G}\div\mathfrak{N}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})))=1$ *ist hier für* $\rho>0$ *wegen* $(H_\lambda(\mathfrak{G}),H_\lambda(\mathfrak{G}))\subseteq H_{2\lambda}(\mathfrak{G})\subseteq H_c(\mathfrak{G})$ *trivial.*)

Es ist klar, dass für beliebige λ immer $\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G}\div\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})))$ $\subseteq\mathfrak{N}(\lambda,\mathfrak{U},\mathfrak{G})$ sein muss; denn nach Definition ist $\mathfrak{N}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})$ die Vereinigungsgruppe $\bigvee_{\mathfrak{N}} \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))$ über alle Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ genommen, also auch über $\mathfrak{N}(\lambda, \mu, \mathfrak{G})$ selbst. Also ist $\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}(\lambda, \mu, \mathfrak{G})))$ $\wedge\, \mathfrak{N}(\lambda, \mu, \mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}(\lambda, \mu, \mathfrak{G})))$ und damit folgt aus 2. 1. 15:

2. 1. 20. $(H_\lambda(\mathfrak{G}), \mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}(\lambda, \mu, \mathfrak{G})))) = 1, \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \dots,$

also allgemein:

$$(H_{\rho+1}(H_\lambda(\mathfrak{G})), \mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G} \div \mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}(\lambda, \mu, \mathfrak{G}))))) = 1$$
$$(\mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G} \div H_\lambda(\mathfrak{G})), H_{\rho+1}(\mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}(\lambda, \mu, \mathfrak{G}))))) = 1$$

2. 1. 20. 1. *Ist* $\mathfrak{K}H_\lambda(\mathfrak{G})$ *der Zentralisator in* $\mathfrak{G}$ *von* $H_\lambda(\mathfrak{G})$, *so hat* $\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}(\lambda, \mu, \mathfrak{G})))/\mathfrak{K}H_\lambda(\mathfrak{G}) \wedge \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}(\lambda, \mu, \mathfrak{G})))$ *höchstens den Exponenten* p^μ. *Speziell liegt also* $\mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}(\lambda, \mu, \mathfrak{G})))$ *in* $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$.

Halten wir λ fest, so liegt also für jedes $\mu = 1, 2, \dots$ die Gruppe $\mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}(\lambda, \mu, \mathfrak{G})))$ im Zentralisator von $H_\lambda(\mathfrak{G})$, also auch die Vereinigungsgruppe $\mathfrak{N}(\lambda, \mathfrak{G}) = \bigvee_\mu \mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}(\lambda, \mu, \mathfrak{G})))$ über alle $\mu = 1, 2, \dots$ erstreckt. Es gilt also:

2. 1. 21. $(H_\lambda(\mathfrak{G}), \mathfrak{N}(\lambda, \mathfrak{G})) = 1$

$$(H_{\rho+1}(H_\lambda(\mathfrak{G})), \mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G} \div \mathfrak{N}(\lambda, \mathfrak{G}))) = 1 \qquad \lambda = 1, 2, \dots$$
$$(\mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G} \div H_\lambda(\mathfrak{G})), H_{\rho+1}(\mathfrak{N}(\lambda, \mathfrak{G}))) = 1 \qquad \rho = 0, 1, \dots$$

2. 1. 21. 1. *Die Klasse von* $\mathfrak{N}(\lambda, \mathfrak{G})$ *ist höchstens gleich* λ.

Denn die Klasse von $\mathfrak{G}/H_\lambda(\mathfrak{G})$ ist gleich $\lambda - 1$. Also ist $\mathfrak{Z}_{\lambda-1}(\mathfrak{G} \div H_\lambda(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$. Daher folgt aus 2. 1. 21 $H_\lambda(\mathfrak{N}(\lambda, \mathfrak{G})) \leq \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$ und somit $H_{\lambda+1}(\mathfrak{N}(\lambda, \mathfrak{G})) = 1$. Speziell ist demnach $\mathfrak{N}(p-1, \mathfrak{G})$ ein regulärer Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Offenbar ist $1 < \mathfrak{M}(1, \mathfrak{G}) \leq \mathfrak{M}(2, \mathfrak{G}) \leq \dots$ und $1 < \mathfrak{N}(1, \mathfrak{G}) \leq \mathfrak{N}(2, \mathfrak{G}) \dots$. Eine weitere wichtige Vertauschbarkeitsrelation zieht zwei beliebige Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in Betracht.

2. 1. 22. *Sind* $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ *zwei beliebige Normalteiler von* $\mathfrak{G}$, *so ist*

$$(H_\lambda(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}_1))), \mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}_2)) \wedge \mathfrak{N}_2)) = 1,$$
$$\lambda, \mu = 1, 2, \dots .$$

Beweis. Sei $S \in H_\lambda(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}_1)))$, $T \in \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}_2)) \wedge \mathfrak{N}_2$. Dann liegt (S, T) in $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}_1) \wedge \mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}_2)$. Also ist $(S, T)^{p^\mu} = 1$. Ferner ist dann $(S, T^{p^\mu}) \equiv ((S, T) \cdot T^{-1})^{p^\mu} \cdot T^{p^\mu} = (S, T)^{p^\mu} \cdot T^{-p^\mu} \cdot T^{p^\mu} = 1$, w.z.b.w. Spezielle gilt also: $(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}_1)), \mho_\mu(\mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}_2))) = 1$.

In 2. 1. 22 können $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ beliebige Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sein. Lassen wir nun $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ unabhängig voneinander alle Normalteiler von $\mathfrak{G}$ durchlaufen und bezeichnen die charakteristischen Untergruppen $\bigvee_{\mathfrak{N}_1} H_\lambda(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}_1)))$ mit $\mathfrak{S}(\lambda, \mu, \mathfrak{G})$, bzw. $\bigvee_{\mathfrak{N}_2} \mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}_2)) \wedge \mathfrak{N}_2)$ mit $\mathfrak{T}(\lambda, \mu, \mathfrak{G})$, so gilt also:

2.1.23.
$$\begin{aligned}&(\mathfrak{S}(\lambda,\mu,\mathfrak{G}), \mathfrak{T}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})) = 1\\ &(H_{\rho+1}(\mathfrak{S}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})), \mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G} \div T(\lambda,\mu,\mathfrak{G}))) = 1\\ &(\mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G} \div \mathfrak{S}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})), H_{\rho+1}(\mathfrak{T}(\lambda,\mu,\mathfrak{G}))) = 1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}&\lambda, \mu = 1, 2 \ldots\\ &\rho = 0, 1, \ldots\end{aligned}$$

Wenn wir mit $\mathfrak{T}^*(\lambda, \mu, \mathfrak{G})$ die Vereinigungsgruppe $\bigvee_{\mathfrak{N}} \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}))$ bezeichnen, so ist $\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}^*_{1,p^\mu}(\mathfrak{T}^*(\lambda, \mu, \mathfrak{G}))) \subseteq \mathfrak{T}^*(\lambda, \mu, \mathfrak{G})$. Setzen wir in 2.1.22 $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{S}(\lambda, \mu, \mathfrak{G})$, $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{T}^*(\lambda, \mu, \mathfrak{G})$, so haben wir also

2.1.24.
$$\begin{aligned}&(\mathfrak{S}(\lambda,\mu,\mathfrak{G}), \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{T}^*(\lambda,\mu,\mathfrak{G})) = 1\\ &(H_{\rho+1}(\mathfrak{S}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})), \mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G} \div \mathfrak{P}_\mu\mathfrak{T}^*(\lambda,\mu,\mathfrak{G})) = 1\\ &(\mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G} \div \mathfrak{S}(\lambda,\mu,\mathfrak{G})), H_{\rho+1}(\mathfrak{P}_\mu\mathfrak{T}^*(\lambda,\mu,\mathfrak{G}))) = 1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}&\lambda, \mu = 1, 2, \ldots\\ &\rho = 0, 1, \ldots\end{aligned}$$

Es gilt natürlich auch: Ist $\mathfrak{N}$ ein beliebiger, $\mathfrak{R}$ ein regulärer Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist $(\mathfrak{Z}_\rho(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})), \mho_\mu(\mathfrak{R})) = 1$. Aber wegen $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})$ ist dieser Satz in 1.7. enthalten.

Die Gruppen $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}$ und ihre Beziehungen zu $\mathfrak{G}$.

Wir können einige der vorstehenden Sätze verallgemeinern mit Hilfe folgender Begriffsbildung

Definition: Es sei für $\nu = 2, 3, \ldots$: $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\nu-1,p^\mu}(\mathfrak{G}))$.

Man erhält sofort als Folge der Definition $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{U}_{2,p^\mu}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\nu-2,p^\mu}(\mathfrak{G})) = \cdots = \mathfrak{U}_{\nu-1,p^\mu}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G}))$, denn $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\nu-1,p^\mu}(\mathfrak{G})) \equiv \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\nu-2,p^\mu}(\mathfrak{G}))) \equiv \mathfrak{U}_{2,p^\mu}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\nu-2,p^\mu}(\mathfrak{G}))$ u.s.w. So haben wir für jedes $\mu = 1, 2, \ldots$ eine aufsteigende Reihe:

$$1 \subset \mathfrak{U}_{1,p^\mu} \subset \mathfrak{U}_{2,p^\mu} \subset \cdots \subset \mathfrak{U}_{\rho-1,p^\mu} \subset \mathfrak{U}_{\rho,p^\mu} = \mathfrak{G}$$

(Wir schreiben hier und im Folgenden überall, wo kein Missverständnis entstehen kann, $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}$ für $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}(\mathfrak{G})$).

Wir haben also für jedes $\mu = 1, 2, \ldots, \kappa$ eine durch $\mathfrak{G}$ bestimmte Zahl $\rho(\mu) = \rho(\mu, \mathfrak{G})$, die eine wichtige Invariante von $\mathfrak{G}$ ist.

Es ist $\rho(1) > \rho(2) > \cdots > \rho(\kappa-1) > \rho(\kappa) = 1$.

2.2.1. *Es ist* $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu} \subseteq \mathfrak{U}_{1,p^{\nu\mu}}$, *wobei* $\mathfrak{U}_{1,p^{\nu\mu}}$ *für* $\nu \cdot \mu \geq \kappa$ *gleich* $\mathfrak{G}$ *ist.*

Beweis. Nach 2.1.1 hat für beliebige ν die Gruppe $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}/\mathfrak{U}_{\nu-1,p^\mu}$ höchstens den Exponenten p^μ. Sei $S \in \mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}$; dann liegt als S^{p^μ} in

$\mathfrak{U}_{\nu-1,p^\mu}$, daher $(S^{p^\mu})^{p^\mu} = S^{p^{2\mu}}$ in $\mathfrak{U}_{\nu-2,p^\mu}$ u.s.w. $S^{p^{\mu(\nu-1)}}$ in $\mathfrak{U}_{1,p^\mu}$, also $S^{p^{\mu\nu}} = 1$, also hat $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}$ höchstens den Exponenten $p^{\mu\cdot\nu}$. Nun sei $T \in \mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}$, $S \in \mathfrak{G}$. Dann wird $(ST)^{p^{\nu\cdot\mu}} \equiv ((ST)^{p^\mu})^{p^{\mu(\nu-1)}} = (S^{p^\mu}U_{\nu-1})^{p^{\mu(\nu-1)}} = (S^{p^{2\mu}}U_{\nu-2})^{p^{\mu(\nu-2)}} = \cdots = S^{p^{\nu\mu}}$, wobei $U_{\nu-1} \in \mathfrak{U}_{\nu-1,p^\mu}$ u.s.w. ist. Also erfüllt jedes Element $T \in \mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}$ mit jedem Element $S \in \mathfrak{G}$ die Gleichung $(ST)^{p^{\nu\mu}} = S^{p^{\nu\mu}}$, also liegt $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}$ in $\mathfrak{U}_{1,p^{\nu\mu}}$.

Daraus folgt leicht:

2.2.1.1: $\mathfrak{U}_{\nu+\lambda,p^\mu} \subseteq \mathfrak{U}_{1,p^{\nu\mu}}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\lambda,p^\mu})$

$\mathfrak{U}_{\nu+\lambda,p^\mu} \subseteq \mathfrak{U}_{\lambda,p^\mu}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^{\nu\mu}})$

2.2.2. *Es ist* $\mathfrak{U}_{\rho(\mu)-\nu,p^\mu} \supseteq \mathfrak{G}(p^\mu, \nu)$, $\quad \nu = 1, 2, \ldots, \rho(\mu)-1$.

Beweis. Für beliebige λ hat $\mathfrak{U}_{\lambda,p^\mu}/\mathfrak{U}_{\lambda-1,p^\mu}$ höchstens den Exponenten p^μ, also ist $\mathfrak{U}_{\lambda-1,p^\mu} \supseteq \mathfrak{P}_\mu \mathfrak{U}_{\lambda,p^\mu}$. Für $\lambda = \rho(\mu)$ ist $\mathfrak{U}_{\rho(\mu),p^\mu} = \mathfrak{G}$, also ist $\mathfrak{U}_{\rho(\mu)-1,p^\mu} \supseteq \mathfrak{G}(p^\mu)$, daher $\mathfrak{U}_{\rho(\mu)-2,p^\mu} \supseteq \mathfrak{P}_\mu \mathfrak{G}(p^\mu) = \mathfrak{G}(p^\mu, 2)$ u.s.w.

Die Reihe $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{G}(p^\mu, 2), \ldots$ bildet eine absteigende Reihe, die mit 1 schliessen muss. Es gilt

2.2.3. $\mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu)) = 1$

Beweis. Nach 2.2.2 hat man: $\mathfrak{U}_{1,p^\mu} \supseteq \mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu)-1)$. Also ist $\mathfrak{P}_\mu \mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu)-1) \equiv \mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu)) = 1$.

2.2.4. $(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}), \mathfrak{G}(p^\mu, \nu)) = 1$ *also auch*

$(\mathfrak{Z}_{\lambda+1}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}), H_{\lambda+1}(\mathfrak{G}(p^\mu, \nu))) = 1 \qquad \lambda = 0, 1, \ldots$

$(H_{\lambda+1}(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\nu,p^\mu})), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{G}(p^\mu, \nu))) = 1 \qquad \mu, \nu = 1, 2 \ldots$

Beweis. Nach 2.1.7 ist der Satz für $\nu = 1$ richtig. Es sei $\nu > 1$ und der Satz gelte für $\nu-1$. Ist $S \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\nu,p^\mu})$, $T \in \mathfrak{G}(p^\mu, \nu-1)$ so ist also $(S, T) \in \mathfrak{U}_{1,p^\mu}$, da wir ja, wie oben bemerkt, auch $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu} = \mathfrak{U}_{\nu-1,p^\mu}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{1,p^\mu})$ haben. Also ist $(S, T^{p^\mu}) \equiv ((S, T)\cdot T^{-1})^{p^\mu} \cdot T^{p^\mu} = (S, T)^{p^\mu} \cdot T^{-p^\mu} \cdot T^{p^\mu} = 1$ w.z.b.w.

Die obigen Sätze lassen erkennen, dass die beiden Reihen

$$1 = \mathfrak{U}_{0,p^\mu}, \mathfrak{U}_{1,p^\mu}, \ldots, \mathfrak{U}_{\rho(\mu),p^\mu} = \mathfrak{G} \qquad \text{und}$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(p^\mu, 0), \mathfrak{G}(p^\mu, 1), \ldots, \mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu)-1), \mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu)) = 1$$

in einer ähnlichen Beziehung zueinander stehen, wie die aufsteigende zur absteigenden Zentrenreihe. Nämlich: $\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu} \supseteq \mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu)-\nu)$ nach 2.2.2 und $(\mathfrak{U}_{\nu,p^\mu}, \mathfrak{G}(p^\mu, \nu)) = 1$ nach 2.2.4, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu = 0, 1, \ldots$

Aus 2.2.4 und 2.2.2 folgt noch:

2. 2. 4. 1. $(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu)-\nu)), H_\lambda(\mathfrak{G}(p^\mu, \nu))) = 1,$
$\lambda = 1, 2, \ldots; \ \mu = 1, 2, \ldots; \ \nu = 0, 1, \ldots .$

Und speziell

2. 2. 4. 2. $(\mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu)-\nu), \mathfrak{G}(p^\mu, \nu)) = 1, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, \nu = 0, 1, \ldots$

Aus 2. 2. 2 und 2. 2. 4 folgt nun:

2. 2. 4. 3. *Ist* $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \geq \nu$, *so ist*
$(\mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu)-\nu), \mathfrak{G}(p^\mu, \lambda_1), \mathfrak{G}(p^\mu, \lambda_2), \ldots, \mathfrak{G}(p^\mu, \lambda_k)) = 1$

für beliebiges k *und beliebige natürliche Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *sowie beliebige natürliche Zahlen* ν.

Beweis. Es ist $(\mathfrak{U}_{\nu_1, p^\mu}(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu, \nu_2)) \subseteq \mathfrak{U}_{\nu_1-\nu_2, p^\mu}(\mathfrak{G})$ für beliebige $\nu_1, \nu_2; \nu_1 \geq \nu_2$, wie aus $\mathfrak{U}_{\nu_1, p^\mu}(\mathfrak{G}) \equiv \mathfrak{U}_{\nu_2, p^\mu}(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{\nu_1-\nu_2, p^\mu}(\mathfrak{G}))$ und 2. 2. 4 sofort folgt. Durch wiederholte Anwendung erhält man $(\mathfrak{U}_{\nu, p^\mu}(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu, \lambda_1), \mathfrak{G}(p^\mu, \lambda_2), \ldots, \mathfrak{G}(p^\mu, \lambda_k)) = 1$ falls $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \geq \nu$ ist. Nach 2. 2. 2 ist aber $\mathfrak{U}_{\nu, p^\mu}(\mathfrak{G}) \supseteq \mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu, \mathfrak{G})-\nu)$; damit ergibt sich 2. 2. 4. 3. Wählt man speziell $\nu = \rho(\mu)-1 = k$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{\rho(\mu)-1} = 1$, so folgt:

2. 2. 4. 4. $H_{\rho(\mu)}(\mathfrak{G}(p^\mu, 1)) = 1,$

d.h. die Klasse von $\mathfrak{G}(p^\mu, 1)$ ist höchstens gleich $\rho(\mu)-1$.

Wir können 2. 2. 4. 3 auch in der Form aussprechen:

Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *beliebige natürliche Zahlen und ist* $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r \geq \rho(\mu)$, *so ist* $(\mathfrak{G}(p^\mu, \lambda_1), \mathfrak{G}(p^\mu, \lambda_2), \ldots, \mathfrak{G}(p^\mu, \lambda_r)) = 1$.

Wählen wir nun eine natürliche Zahl ν beliebig, so ist $\nu\left(\left[\frac{\rho(\mu)}{\nu}\right]+1\right) \geq \rho(\mu)$ also $\underbrace{(\mathfrak{G}(p^\mu, \nu), \mathfrak{G}(p^\mu, \nu), \ldots, \mathfrak{G}(p^\mu, \nu))}_{\left[\frac{\rho(\mu)}{\nu}\right]+1} = 1$ und mithin:

2. 2. 4. 5. *Die Klasse von* $\mathfrak{G}(p^\mu, \nu)$ *ist höchstens gleich* $\left[\frac{\rho(\mu)}{\nu}\right]$.

Setzen wir also $\nu_1 = \left[\frac{\rho(\mu)}{2}\right]+1$, so ist $\mathfrak{G}(p^\mu, \nu_1)$ abelsch. Wählen wir $\nu_1 = \left[\frac{\rho(\mu)}{p-1}\right]+1$, so ist die Klasse von $\mathfrak{G}(p^\mu, \nu_1)$ höchstens gleich $p-1$, also ist dann $\mathfrak{G}(p^\mu, \nu_1)$ eine reguläre Gruppe. In einer regulären Gruppe $\mathfrak{S}$ ist nun $\mho_{\lambda_1+\lambda_2}(\mathfrak{S}) = \mho_{\lambda_1}(\mho_{\lambda_2}(\mathfrak{S})) = \mho_{\lambda_2}(\mho_{\lambda_1}(\mathfrak{S}))$ für beliebige λ_1, λ_2. Andererseits ist für beliebige ν: $\mathfrak{G}(p^\mu, \nu+1) = \mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{G}(p^\mu, \nu))$. Ist also $\mathfrak{G}(p^\mu, \nu_1)$ regulär, so ist $\mho_\mu(\mathfrak{G}(p^\mu, \nu_1)) = \mathfrak{G}(p^\mu, \nu_1+1)$ u.s.w. und daher

2. 2. 4. 6. $1 = \mho_{\mu\left(\left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1\right)}(\mathfrak{G}(p^\mu, \nu_1)) = \mathfrak{G}\left(p^\mu, \left[\frac{\rho(\mu)}{p-1}\right] + \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right] + 2\right)$

Aus 1. 6. 2 und 2. 2. 4. 4 findet man noch

2.2.4.7. $\mathfrak{G}\left(p^\mu, \sigma\left(\left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1\right)+1\right)=1$, *wobei* $\sigma=\left[\frac{\log(\rho(\mu)-1)}{\log p}\right]+1$ *ist.*

Hier drängt sich die Frage auf: Gibt es für jede vorgegebene endliche Anzahl α von unabhängigen Erzeugenden von $\mathfrak{G}$ und jeden Primzahlexponenten p^κ sowie jedes $p^\mu < p^\kappa$ eine nur von α, p^κ und p^μ abhängige endliche obere Schranke $\rho(\mu, \kappa, \alpha)$, so dass in jeder endlichen, aus α Elementen erzeugbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Exponenten p^κ immer $\rho(\mu, \mathfrak{G}) \leq \rho(\mu, \kappa, \alpha)$, $\mu = 1, 2, \dots, \kappa-1$ ist? Diese Frage wird in dieser Arbeit nicht entschieden, dagegen wollen wir einen Zusammenhang dieser Frage mit einem Problem von Burnside aufdecken. Bekanntlich hat Burnside vermutet: Ist $\mathfrak{F}$ eine freie aus endliche vielen Elementen erzeugte Gruppe, m eine natürliche Zahl und $\mathfrak{F}(m)$ die von den m-ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{F}$ erzeugte Gruppe, so ist $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}(m)$ endlich. Wir wollen nun für den Spezialfall $m = p^\kappa$ zeigen:

2.2.5. *Wenn die Burnside'sche Vermutung für ein bestimmtes* $m = p^\mu < p^\kappa$ *z.B. etwa* $m = p$, *gilt und wenn für dieses* μ *und eine bestimmte Anzahl* α *von Erzeugenden eine endliche obere Grenze* $\rho(\mu, \kappa, \alpha) \geq \rho(\mu, \mathfrak{G})$ *für alle aus* α *Elementen erzeugbaren endlichen p-Gruppen* $\mathfrak{G}$ *mit dem Exponenten* p^κ *existiert, so gilt für die aus* α *Elementen erzeugbare freie Gruppe* $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}(p^\kappa)$ *ist endlich.*

Beweis. $\mathfrak{F}$ werde aus α Elementen erzeugt; $\mathfrak{F}(p^\mu, \nu)$ sei die Gruppe, die aus den p^μ-ten Potenzen der Elementen aus $\mathfrak{F}(p^\mu, \nu-1)$, $\nu = 1, 2, \dots$, erzeugt wird, $\mathfrak{F}(p^\mu, 0) = \mathfrak{F}$. Wir betrachten die Reihe $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}(p^\mu), \mathfrak{F}(p^\mu, 2), \dots, \mathfrak{F}(p^\mu, \rho(\mu, \alpha, \kappa)+1)$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}(p^\mu)$ endlich. Da $\mathfrak{F}$ aus endlich vielen Elementen erzeugt wird, ist also nach einem Satz von Schreier auch $\mathfrak{F}(p^\mu) = \mathfrak{F}(p^\mu, 1)$ eine aus endlich vielen Elementen erzeugbare freie Gruppe. Daher ist auch $\mathfrak{F}(p^\mu, 1)/\mathfrak{F}(p^\mu, 2)$ endlich und $\mathfrak{F}(p^\mu, 2)$ eine aus endlich vielen Elementen erzeugbare freie Gruppe u.s.w. So ergibt sich: Die Faktorgruppen $\mathfrak{F}(p^\mu, \nu)/\mathfrak{F}(p^\mu, \nu+1)$, $\nu = 0, 1, \dots, \rho(\mu, \alpha, \kappa)$ in obiger Reihe sind endlich. Also ist auch die Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}(p^\mu, \rho(\mu, \alpha, \kappa)+1)$ endlich, also ist sie eine endliche p-Gruppe; a fortiori ist dann $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{F}(p^\mu, \rho(\mu, \alpha, \kappa)+1)\mathfrak{F}(p^\kappa)$ eine endliche p-Gruppe, die aus α Elementen erzeugt werden kann und den Exponenten p^κ hat. Es ist also sicher $\mathfrak{U}_{\rho(\mu, \alpha, \kappa), p^\mu}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$; daher gilt nach 2.2.3: $\mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu, \alpha, \kappa)) = 1$, d.h. in der freien Gruppe $\mathfrak{F}$ ist: $\mathfrak{F}(p^\mu, \rho(\mu, \alpha, \kappa)) \subseteq \mathfrak{F}(p^\mu, \rho(\mu, \alpha, \kappa)+1)\mathfrak{F}(p^\kappa)$. Da aber $\mathfrak{F}(p^\mu, \rho(\mu, \alpha, \kappa)+1)$ die aus den p^μ-ten Potenzen der Elemente aus $\mathfrak{F}(p^\mu, \rho(\mu, \alpha, \kappa))$ erzeugte Gruppe ist, folgt: $\mathfrak{F}(p^\mu, \rho(\mu, \alpha, \kappa)) \subseteq \mathfrak{F}(p^\kappa)$. Daraus ergibt sich sofort: $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}(p^\kappa)$ ist Faktorgruppe der endlichen Gruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}(p^\mu, \rho(\mu, \alpha, \kappa))$, also selbst endlich.

Also: Wenn es gelingt, eine solche obere endliche Schranke, etwa für $\rho(1, \alpha, \kappa)$ zu finden, so hat man das Burnside'sche Problem für p^κ auf dasselbe Problem für p zurückgeführt.

Es sei noch bemerkt: Wenn der Satz gelten würde:
"In der Reihe $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{G}(p^\mu, 2), \ldots$ ist $\mathfrak{G}(p^\mu, \rho(\mu, \mathfrak{G}))$ immer die erste Gruppe, die gleich 1 ist (in einer endlichen p-Gruppe $\mathfrak{G}$)", so hätte man aus 2.2.4.6 sofort eine endliche obere Grenze für $\rho(\mu)$, die sogar unabhängig von der Anzahl α der Erzeugenden von $\mathfrak{G}$ wäre. Es würde nämlich aus 2.2.4.6 folgen: $\rho(\mu) \leqq \left[\frac{\rho(\mu)+1}{p-1}\right] + \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right] + 1$ also $\rho(\mu) \leqq \frac{\kappa-1}{\mu} + 1 + \frac{1}{p-2}\left(\frac{\kappa-1}{\mu}+1\right)$, $p \neq 2$.

Ebenso würde man aus 2.2.4.7 mit obiger Annahme eine Beschränkung für $\rho(\mu)$ finden. Es ist aber sehr fraglich, ob der hierbei vorausgesetzte Satz zutrifft. Eine von μ, α, κ abhängige endliche obere Grenze für $\rho(\mu, \alpha, \kappa)$ würde man aber auch schon finden, wenn nur gelten würde: "Bezeichnen $\tau(\mu, \alpha, \kappa, \mathfrak{G})$, $\rho(\mu, \alpha, \kappa, \mathfrak{G})$ in jeder endlichen, aus α Elementen erzeugbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Exponenten p^κ die Längen der Reihen $\mathfrak{G}(p^\mu, 1), \mathfrak{G}(p^\mu, 2), \ldots$ bzw. $\mathfrak{U}_{1, p^\mu}(\mathfrak{G}), \mathfrak{U}_{2, p^\mu}(\mathfrak{G}), \ldots$, so kann der Quotient $\frac{\tau(\mu, \alpha, \kappa, \mathfrak{G})}{\rho(\mu, \alpha, \kappa, \mathfrak{G})}$ einen gewissen durch μ, α, κ bestimmten Wert $\sigma(\mu, \alpha, \kappa)$ nie unterschreiten".

Es ist denkbar, dass eine solche Einschränkung besteht und daraus eine endliche obere Grenze für $\rho(\mu, \alpha, \kappa)$ mit Hilfe der 2.2.4.6, 2.2.4.7 und ähnlichen sich ergeben würde.

§ 3. *Die aufsteigende Zentrenreihe und die Potenzgruppen* $\mathfrak{G}(p^\mu, \nu)$

3.1. a) *Alle Elemente der Ordnung* $\leqq p^\mu$ *aus* $\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})$ *sind mit allen* p^μ*-ten Potenzen aus* $\mathfrak{G}$ *vertauschbar.*

$$(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})), \mathfrak{G}(p^\mu)) = 1, \qquad \mu = 1, 2, \ldots$$
$$\left.\begin{array}{l}(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}))), H_{\lambda+1}\mathfrak{G}(p^\mu)) = 1 \\ (H_{\lambda+1}(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}))), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{G}(p^\mu))) = 1\end{array}\right. \quad \lambda = 0, 1, \ldots$$

b) *Alle* p^μ*-ten Potenzen aus* $\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})$ *sind mit allen Elementen der Ordnung* $\leqq p^\mu$ *aus* $\mathfrak{G}$ *vertauschbar.*

$$(\mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}), \mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G})) = 1, \qquad \mu = 1, 2, \ldots$$
$$\left.\begin{array}{l}(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})), H_{\lambda+1}(\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}))) = 1 \\ (H_{\lambda+1}(\mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}))) = 1\end{array}\right. \quad \lambda = 0, 1, \ldots$$

Beweis. a) $Z \in \mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})$, $Z^{p^\mu} = 1$, $S \in \mathfrak{G}$. $(Z, S^{p^\mu}) \equiv ((Z,S)\cdot S^{-1})^{p^\mu}\cdot S^{p^\mu}$. Da (Z, S) in $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$ liegt, ist $\{(Z,S), Z\}$ eine reguläre Gruppe, ebenso $\{(Z,S), Z\} = \{S^{-1}ZS, Z\}$. Da Z und $S^{-1}ZS$ die Höchstordnung p^μ haben, hat also auch (S, Z) die Höchstordnung p^μ. Also $((Z,S)\cdot S^{-1})^{p^\mu} = S^{-p^\mu}$ und $(Z, S^{p^\mu}) = S^{-p^\mu}\cdot S^{p^\mu} = 1$.

b) $S \in \mathfrak{G}$, $S^{p^\mu} = 1$, $Z \in \mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})$. $1 = S^{p^\mu} = Z^{-1}S^{p^\mu}Z \equiv (S\cdot(S,Z))^{p^\mu}$. Da $\{S, (S,Z)\}$ regulär ist, folgt: $(S,Z)^{p^\mu} = 1$. Da auch $\{Z, (Z,S)\}$ regulär ist, ergibt sich $S^{-1}Z^{p^\mu}S = (Z(Z,S))^{p^\mu} = Z^{p^\mu}$ also $(S, Z^{p^\mu}) = 1$.

3.1.1. *In einer p-Gruppe $\mathfrak{G}$ der Klasse $\leqq p$ ist:*

$$(\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu})) = 1\,.$$

Denn $\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{G}) \geqq \mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu})$.

3.1.2. *In einer p-Gruppe $\mathfrak{G}$ beliebiger Klasse c ist*

$$(\mathfrak{G}(p^\mu), \mathfrak{G}(p^{\kappa-\mu})) \leqq \mathfrak{Z}_{c-p}(\mathfrak{G}) \bigwedge H_2(\mathfrak{G})\,.$$

Da $\mathfrak{Z}_{\nu p} \bigwedge H_\nu(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{Z}_p(H_\nu(\mathfrak{G}))$ ist, folgt:

3.1.3. *Alle Elemente der Ordnung $\leqq p^\mu$ aus $\mathfrak{Z}_{\nu p} \bigwedge H_\nu(\mathfrak{G})$ sind mit den p^μ-ten Potenzen aller Elemente aus $H_\nu(\mathfrak{G})$ vertauschbar. Alle Elemente der Ordnung $\leqq p^\mu$ aus $H_\nu(\mathfrak{G})$ sind mit den p^μ-ten Potenzen aller Elemente aus $\mathfrak{Z}_{\nu p} \bigwedge H_\nu(\mathfrak{G})$ vertauschbar, $\nu = 1, 2, \ldots$*

3.1.4. *Kann $\mathfrak{G}$ aus Elementen der Ordnung $\leqq p^\mu$ erzeugt werden, so hat für beliebige $\nu > 0$ die Gruppe $\mathfrak{Z}_{\nu+p}(\mathfrak{G})/\mathfrak{Z}_{\nu+1}(\mathfrak{G})$ höchstens den Exponenten p^μ.*

3.2. *$(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu, \nu))$ ist eine Gruppe von $p^{\mu\nu}$-ten Potenzen von Elementen aus $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G}) \bigwedge H_2(\mathfrak{G})$, $\nu = 1, 2, \ldots$*

Beweis. Da $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$ regulär und $(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu, \nu)) \leqq \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$ ist, genügt es zu beweisen: Ist Z aus $\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})$, S ein erzeugendes Element aus $\mathfrak{G}(p^\mu, \nu)$, so ist (Z, S) die $p^{\mu\nu}$-te Potenz eines Elementes aus $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$. Der Satz ist trivialerweise richtig für $\nu = 0$. Es sei $\nu \geqq 1$ und der Satz sei schon für $\nu - 1$ bewiesen. Es sei $S \in \mathfrak{G}(p^\mu, \nu-1)$, $Z \in \mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})$. Dann ist $(Z, S^{p^\mu}) = ((Z,S)\,S^{-1})^{p^\mu} S^{p^\mu} = X^{p^\mu}$, wobei X ein Produkt von Kommutatoren von (Z,S) und S^{-1} ist, also in $\mathfrak{Z}_{p-1}$ liegt. Da aber S in $\mathfrak{G}(p^\mu, \nu-1)$ liegt, ist nach der Induktionsvoraussetzung jeder solche Kommutator die $p^{\mu(\nu-1)}$-te Potenz eines Elementes aus $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$, also ist auch ihr Produkt X die $p^{\mu(\nu-1)}$-te Potenz eines Elementes aus $\mathfrak{Z}_{p-}(\mathfrak{G})$ und danach $X^{p^\mu} = Y^{p^{\mu\nu}}$, $Y \in \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{G})$, w.z.b.w.

3.2.1. $$(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1)) = 1\,.$$

Bezeichnet man die Gruppe $\mathfrak{G}(p,\kappa)\cdot\mathfrak{G}(p^2,\left[\frac{\kappa-1}{2}\right]+1)\cdot\ldots\cdot\mathfrak{G}(p^{\kappa-1},2)$ mit $\mathfrak{W}(\mathfrak{G})$ so ist also

3.2.2. $(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}),\mathfrak{W}(\mathfrak{G}))=1$.

3.2.3. $(\mathfrak{Z}_{\nu p},\underbrace{\mathfrak{W}(\mathfrak{G}),\ldots,\mathfrak{W}(\mathfrak{G})}_{\nu})=1,\quad \nu=1,2,\ldots$

Beweis. Nach 3.2.2. ist $(\mathfrak{Z}_{\nu p},\mathfrak{W}(\mathfrak{G}))\subset\mathfrak{Z}_{(\nu-1)p}$, also $(\mathfrak{Z}_{\nu p},\mathfrak{W}(\mathfrak{G}),\mathfrak{W}(\mathfrak{G}))\leq(\mathfrak{Z}_{(\nu-1)p},\mathfrak{W}(\mathfrak{G}))\leq\mathfrak{Z}_{(\nu-2)p}$ u.s.w.

3.3. $(\mathfrak{Z}_{\nu p},\mathfrak{G}(p^\mu,\nu))$ *ist eine Gruppe von* p^μ*-ten Potenzen aus* $\mathfrak{Z}_{\nu p-1}\frown H_2(\mathfrak{G})$.

Beweis. Für $\nu=1$ ist die Behauptung nach 3.2. richtig. Sie gelte nun für $\nu-1$, $\nu>1$. Es sei $S\in\mathfrak{Z}_{\nu p}$, $T=\prod_{\rho_1}(S_{1,\rho_1})^{p^\mu}$, $S_{1,\rho_1}=\prod_{\rho_2}(S_{\rho_1,\rho_2})^{p^\mu}$, $S_{\rho_1,\rho_2}=\prod_{\rho_3}(S_{\rho_1,\rho_2,\rho_3})^{p^\mu},\ldots,S_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\lambda}=\prod_{\rho_{\lambda+1}}(S_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\lambda,\rho_{\lambda+1}})^{p^\mu}$. Dann liegt T^{p^μ} in $\mathfrak{G}(p^\mu,\lambda+1)$, $\lambda=\nu-2$. Also wird nach der Induktionsvoraussetzung, da $\mathfrak{Z}_{(\nu-1)p}(\mathfrak{G}\div\mathfrak{Z}_p)=\mathfrak{Z}_{\nu p}$ ist: $(S,T^{p^\mu})\cdot\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})=X^{p^\mu}\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})$, $X\in\mathfrak{Z}_{\nu p-1}\frown H_2(\mathfrak{G})$; demnach $(S,T^{p^\mu})=X^{p^\mu}\cdot Z$, $Z\in\mathfrak{Z}_p\frown H_2(\mathfrak{G})$. Wenn man nun (S,T^{p^μ}) als Produkt von Kommutatoren von S mit den $S_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{\nu-2}}$ darstellt, so ergibt sich Z als ein Prokukt von Kommutatoren, die in S und den $S_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{\nu-2}}$ mindestens das Gewicht $(\nu-1)p$ haben; also liegt Z in $\mathfrak{Z}_p\frown H_{(\nu-1)p}(\mathfrak{G})$. Ersetzen wir nun noch jedes $S_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{\nu-2}}$ durch ein Produkt $(\prod_{\rho_{\nu-1}}S_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{\nu-2},\rho_{\nu-1}})^{p^\mu}$, so wird also einerseits T^{p^μ} ein Element aus $\mathfrak{G}(p^\mu,\nu)$ und jedes erzeugende Element aus $\mathfrak{G}(p^\mu,\nu)$ ist in dieser Form darstellbar; andererseits wird dann jeder der in Z auftretenden Faktoren eine p^μ-te Potenz aus $\mathfrak{Z}_p\frown H_{(\nu-1)p}$. $\mathfrak{Z}_p\frown H_{(\nu-1)p}$ ist aber abelsch für $\nu>1$, denn $(\mathfrak{Z}_p,H_p(\mathfrak{G}))=1$ und $H_{(\nu-1)p}(\mathfrak{G})\leq H_p(\mathfrak{G})$. Also ist $Z=Y^{p^\mu}$, $Y\in H_{(\nu-1)p}(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{Z}_p$. Also haben wir $(S,T^{p^\mu})=X^{p^\mu}\cdot Y^{p^\mu}$, $X\in\mathfrak{Z}_{\nu p-1}\frown H_2(\mathfrak{G})$, $Y\in H_{(\nu-1)p}(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{Z}_p$. Die Gruppe $\{X,H_{(\nu-1)p}(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{Z}_p\}$ ist aber regulär; denn $H_{(\nu-1)p}(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{Z}_p\subset H_2(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{Z}_{2(p-1)}\leq\mathfrak{Z}_{p-1}(H_2(\mathfrak{G}))$, $X\in H_2(\mathfrak{G})$, und $\{X,\mathfrak{Z}_{p-1}(H_2(\mathfrak{G}))\}$ ist nach 1.2. §1 regulär. Also wird $X^{p^\mu}Y^{p^\mu}=U^{p^\mu}$, $U\in\mathfrak{Z}_{\nu p-1}(\mathfrak{G})\frown H_2(\mathfrak{G})$.

Um den Beweis zu vervollständigen, hat man noch zu zeigen, dass auch für $T_1,T_2,\ldots\in\mathfrak{G}(p^\mu,\nu-1)$, $S\in\mathfrak{Z}_{\nu p}(\mathfrak{G})$ gilt: $(S,T_1^{p^\mu}T_2^{p^\mu}\ldots)=U^{p^\mu}$, $U\in\mathfrak{Z}_{\nu p-1}\frown H_2(\mathfrak{G})$. Man wendet wieder vollständige Induktion nach ν an und hat $(S,T_1^{p^\mu}T_2^{p^\mu}\ldots)\mathfrak{Z}_p=X^{p^\mu}\mathfrak{Z}_p$, $X\in\mathfrak{Z}_{\nu p-1}\frown H_2(\mathfrak{G})$, also $(S,T_1^{p^\mu}T_2^{p^\mu}\ldots)=X^{p^\mu}Z$. Für Z ergibt sich wieder $Z=Z'^{p^\mu}$, $Z'\in\mathfrak{Z}_p\frown H_{(\nu-1)p}(\mathfrak{G})$ und damit wie oben die Behauptung.

3.3.1. *Ist* c *die Klasse von* $\mathfrak{G}$, *so ist also* $(\mathfrak{G}(p^\mu,\left[\frac{c-1}{p}\right]+1),\mathfrak{G})$ *eine*

Gruppe, deren Elemente sämtlich p^μ-te Potenzen in $H_2(\mathfrak{G})$ sind.

3.4. $(\mathfrak{Z}_{p+\lambda}(\mathfrak{G}), (\mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1), \underbrace{\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{\lambda})) = 1, \qquad \lambda = 1, \ldots$

Beweis. Nach 3.2.1. ist: $(\mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1)) = 1$. Daraus folgt $(\mathfrak{Z}_{p+1}(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1)) \leq \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$, da $\mathfrak{Z}_{p+1}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G} \div \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}))$ ist also $(\mathfrak{Z}_{p+1}(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1), \mathfrak{G}) = 1$ ferner ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_{p+1}(\mathfrak{G})) \leq \mathfrak{Z}_p(\mathfrak{G})$, also $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_{p+1}(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1)) = 1$. Nun gilt der Hallsche Satz: Sind $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ drei Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so enthalten je zwei der drei Gruppen $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{L})$, $(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ die dritte. Wählen wir $\mathfrak{L} = \mathfrak{Z}_{p+1}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1)$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, so haben wir eben gezeigt: $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = 1$, $(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = 1$. Also ist auch $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{L}) = 1$, d.h. $(\mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1), \mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_{p+1}(\mathfrak{G})) = 1$.

Damit ist 3.4. für $\lambda = 1$ bewiesen.

Nun sei 3.4. für alle Zahlen $< \lambda$ richtig. Dann ist $(\mathfrak{Z}_{p+\lambda}(\mathfrak{G}), (\mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1), \underbrace{\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{\lambda-1})) \leq \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$. Also $(\mathfrak{Z}_{p+\lambda}(\mathfrak{G}), (\mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1), \underbrace{\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}), \mathfrak{G}}_{\lambda-1}) = 1$ und, da $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_{p+\lambda}(\mathfrak{G})) \leq \mathfrak{Z}_{p+\lambda-1}(\mathfrak{G})$ ist: $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_{p+\lambda}(\mathfrak{G}), (\mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1), \underbrace{\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{\lambda-1})) = 1$.

Wenn wir nun den obigen Satz von Hall auf $\mathfrak{L} = \mathfrak{Z}_{p+\lambda}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{G}(p^\mu, \left[\frac{\kappa-1}{\mu}\right]+1), \underbrace{\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{\lambda-1})$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$ anwenden, so folgt, dass 3.4. für λ gilt, wenn er für $\lambda-1$ richtig ist; da er für $\lambda = 1$ richtig ist, ist damit der Beweis geführt.

3.5. $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ *seien zwei beliebige Normalteiler von* $\mathfrak{G}$. *Dann ist* $\mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{N}_1)) \wedge \mathfrak{N}_1), \mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{N}_2) \wedge \mathfrak{N}_2))) = 1$.

Beweis. Es sei $S \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{N}_1)) \wedge \mathfrak{N}_1$, $T \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{N}_2)) \wedge \mathfrak{N}_2$ und $S^{p^\mu} = 1$. Wenn wir $(S, T^{p^\mu}) = 1$ gezeigt haben, ist 3.5. bewiesen. $(S, T^{p^\mu}) \equiv ((S, T) \cdot T^{-1})^{p^\mu} T^{p^\mu}$. Da $T \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{N}_2)) \wedge \mathfrak{N}_2$ ist, liegt (S, T) in $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{N}_2)$, und T in $\mathfrak{N}_2$, also ist die Gruppe $\{(S, T), T\}$ regulär. Da $S \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{N}_1)) \wedge \mathfrak{N}_1$ ist, liegt (S, T) auch in $\mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{N}_1)$ und S in $\mathfrak{N}_1$, also ist auch die Gruppe $\{(S, T), S\} = \{T^{-1}ST, S\}$ regulär. Da $S^{p^\mu} = 1$, ist also auch $(S, T)^{p^\mu} = 1$, und daher $((S, T) \cdot T^{-1})^{p^\mu} = T^{-p^\mu}$, also $(S, T^{p^\mu}) = 1$, w.z.b.w.

Lässt man $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ alle Normalteiler von $\mathfrak{G}$ durchlaufen und bezeichnet die Vereinigungsgruppen $\bigvee\limits_{\mathfrak{N}_1} \mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{N}_1)) \bigwedge \mathfrak{N}_1)$ mit $\mathfrak{L}_\mu$, $\bigvee\limits_{\mathfrak{N}_2} \mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{Z}_{p-1}(\mathfrak{N}_2)) \bigwedge \mathfrak{N}_2)$ mit $\mathfrak{M}_\mu$, so gilt also:

3. 6. $(\mathfrak{L}_\mu, \mathfrak{M}_\mu) = 1$

$$(\mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{L}_\mu), H_{\lambda+1}(\mathfrak{M}_\mu)) = 1 \qquad \lambda = 0, 1, \dots, \quad \mu = 1, 2, \dots$$
$$(H_{\lambda+1}(\mathfrak{L}_\mu), \mathfrak{Z}_\lambda(\mathfrak{G} \div \mathfrak{M}_\mu)) = 1$$

$\mathfrak{L}_\mu$, $\mathfrak{M}_\mu$ u.s.w. sind charakteristische Untergruppen von $\mathfrak{G}$ und es ist offenbar:

$$1 \subset \mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{L}_\kappa = \mathfrak{G}$$
$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{M}_\kappa = 1.$$

(Eingegangen am 10. Juli, 1953)

Anmerkungen

1) Teil I dieser Beiträge erschien in Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 174, 1935, Teil II ebenda Bd. 186, 1948, Teil III und IV in "Mathematische Nachrichten" Bd. I, 1948, bzw. Bd. III, 1949/50.

2) Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Vol. 36, Parts 1 and 2.