Osaka Mathematical Journal
Vol. 1, No. 1, March, 1949

Über Hauptidealringe mit Kettensatz

Von Keizo ASANO

Es sei $\mathfrak{o}$ ein halbprimärer Ring mit Einselement, dessen Radikal $\mathfrak{R}$ nilpotent ist; der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{R}$ ist also ein halbeinfacher Ring. Nach G. Köthe[1]) heisst $\mathfrak{o}$ einreihig, wenn $\mathfrak{o}$ die folgenden Eigenschaften hat:

1) Es gilt der Doppelkettensatz für Linksideale.

1)′ Es gilt der Doppelkettensatz für Rechtsideale.

2) $\mathfrak{o}$ ist die direkte Summe von primären Ringen.

3) Jedes vom primitiven Idempotent e erzeugte Linksideal $\mathfrak{o}e$ besitzt (als $\mathfrak{o}$-Modul) nur eine einzige Kompositionsreihe.

3)′ Jedes vom primitiven Idempotent e erzeugte Rechtsideal $e\mathfrak{o}$ besitzt nur eine einzige Kompositionsreihe.

Wenn $\mathfrak{o}$ nur die Eigenschaften 1), 2), 3) hat, so heisst $\mathfrak{o}$ linksseitig einreihig.

In der vorliegenden Note bemerken wir, dass $\mathfrak{o}$ dann und nur dann linksseitig einreihig ist, wenn jedes Linksideal von $\mathfrak{o}$ ein Hauptlinksideal ist. Wir werden ferner einige Charakterisierungen des einreihigen Rings angeben.

§ 1 Einige Hilfssätze

Zunächst seien einige Hilfssätze vorausgeschickt. Es sei $\mathfrak{o}$ ein Shiefring mit Einselement, und $\mathfrak{R}$ sei das maximale zweiseitige Nilideal, das aus der Vereinigungsmenge aller zweiseitigen Nilideale von $\mathfrak{o}$ besteht. Gilt für die $\mathfrak{R}$ enthaltenden Linksideale der Vielfachenkettensatz, so ist $\mathfrak{o}$ halbprimär, d. h. der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{R}$ ist halbeinfach und $\mathfrak{R}$ ist das Radikal von $\mathfrak{o}$. Gilt ferner der Vielfachenkettensatz für Linksideale

1) G. Köthe, Verallgemeinerte Abelsche Gruppe mit hyperkomplexem Operatorenring. Math. Zeitschr. **39** (1934), S. 31-44. Vgl. auch K. Asano, Über verallgemeinerte Abelsche Gruppe mit hyperkomplexem Operatorenring und ihre Anwendungen, Japan. Math. **15** (1939).

von $\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{N}$ nilpotent und es gilt auch der Teilerkettensatz für Linksideale.

Satz 1. *Jedes Element eines halbeinfachen Rings ist in der From αe und (als Folge davon) in der Form $e'\alpha$ darstellbar, wobei e, e' Idempotente und α eine Einheit bedeuten.*

Beweis. Zunächst sei $\mathfrak{o}$ einfach. $\mathfrak{o}$ ist ein voller Matrizenring in einem Schiefkörper K. Da es für jede Matrix A aus K_n invertierbare Matrizen B, C gibt, so dass

$$BAC = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \end{matrix} \right\|$$

ist, so gibt es für jedes Element a aus $\mathfrak{o}$ Einheiten β, γ von $\mathfrak{o}$ derart, dass $\beta a \gamma = c$ ein Idempotent ist. Es ist also

$$a = \alpha e \quad (\alpha = \beta^{-1} \gamma^{-1}, \ e = \gamma c \gamma^{-1})$$

Im allgemeinen Fall ist $\mathfrak{o}$ die direkte Summe von einfachen Ringen: $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \ldots + \mathfrak{o}_n$. Für a aus $\mathfrak{o}$ ist

$$a = a_1 + \ldots + a_n, \quad a_i = \alpha_i e_i \in \mathfrak{o}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei α_i eine Einheit von $\mathfrak{o}_i$ und e_i ein Idempotent von $\mathfrak{o}_i$ oder Null ist. $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ ist dann eine Einheit, $e = e_1 + \ldots + e_n$ ein Idempotent von $\mathfrak{o}$, und es ist $a = \alpha e$. Daraus folgt $a = e' \alpha$, $e' = \alpha e \alpha^{-1}$.

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{o}$ ein halbprimärer Ring mit Einselement* 1. *Jedes Element von $\mathfrak{o}$ ist entweder eine Einheit oder Nullteiler. Ferner ist jedes Linksnullteiler (Rechtsnullteiler) auch ein Rechtsnullteiler (Linksnullteiler). Ist insbesondere $a b = 1$, so ist $b a = 1$.*

Beweis. a sei ein Element von $\mathfrak{o}$ und $\bar{a}$ bedeute die a enthaltende Restklasse von $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{N}$. Ist $\bar{a}$ eine Einheit von $\bar{\mathfrak{o}}$, so ist $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a} = \bar{1}$ und es ist

$$a b = 1 - n \ (n \in \mathfrak{N}), \quad a \cdot b (1 + n + \ldots + n^{\rho-1}) = 1, \quad (n^{\rho} = 0).$$

a hat also ein Rechtsinverses. Ebenso hat a auch ein Linksinverses.

Damit ist a eine Einheit von $\mathfrak{o}$. Ist $\bar{a} \neq \bar{0}$ keine Einheit von $\bar{\mathfrak{o}}$, so ist $\bar{a} = \bar{\alpha}\,\bar{e}$, wo $\bar{\alpha}$ eine Einheit und $\bar{e}$ ein Idempotent $\neq \bar{1}$ von $\bar{\mathfrak{o}}$ ist. α ist dann eine Einhit von $\mathfrak{o}$ und e kann so gewählt werden, dass e ein Idempotent von $\mathfrak{o}$ ist.[2]) Es ist $a = \alpha e - n' = \alpha(e - n)$, n, $n' \in \mathfrak{N}$. Setzt man $p = n + \ldots + n^{\rho}\,(n^{\rho} = 0)$, so ist $1 + p$ eine Einheit von $\mathfrak{o}$ und es ist

$$a\,(1 + p) = \alpha\,(e - e'p)\,, \quad e' = 1 - e\,, \quad e'p \in \mathfrak{N}\,.$$

Ist $e'p = 0$, so sei $x = e'$; ist $e'p \neq 0$, so sei $(e'p)^{r-1} \neq 0$, $(e'p)^{r} = 0$ und sei $x = (e'p)^{r-1}$. Dann ist $a\,(1 + p)\,x = 0$. Da $1 + p$ eine Einheit von $\mathfrak{o}$ ist, ist $(1 + p)\,x \neq 0$. a ist also ein Linksnullteiler. Analogerweise ist a auch ein Rechtsnullteiler. Ist $\bar{a} = \bar{0}$, d. h. $a \in \mathfrak{N}$, so ist a als ein nilpotentes Element ein Links- sowie Rechtsnullteiler.

Hilfssatz 1. $\mathfrak{o}$ sei ein halbprimärer Ring mit Einselement 1. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ teilerfremde zweiseitige Ideale von $\mathfrak{o}$ und gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\,a$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}\,b$, so ist $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}$.

Beweis. Wegen $(\mathfrak{o}\,a\,, \mathfrak{o}\,b) = \mathfrak{o}$ gibt es ein Element a' mit $a'a \equiv 1\ (\mathfrak{b})$. Da der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{b}$ ein halbprimärer Ring mit dem Radikal $(\mathfrak{N}, \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ ist, so gilt $aa' \equiv 1\ (\mathfrak{b})$. Es ist $ab \in \mathfrak{a} = \mathfrak{o}a$, also $ab = b'a$ und

$$b' \equiv b'aa' \equiv aba' \equiv 0 \quad (\mathfrak{b})\,.$$

Demnach ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{o}ab = \mathfrak{o}b'a \leq \mathfrak{b}\mathfrak{a}$. Ebenso ist $\mathfrak{b}\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Es gilt also $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}$.

Hilfssatz 2. Es sei $\mathfrak{o}$ ein Schiefring mit Einselement und es gelte der Doppelkettensatz für die Linksideale von $\mathfrak{o}$. Ist $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$ und gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\,a = b\,\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\,b$.[3])

Es sei ein halbprimärer Ring, dessen Radikal $\mathfrak{N}$ nilpotent ist. Jedes Primideal[4]) $\mathfrak{p}$ enthält $\mathfrak{N}$, denn $(\mathfrak{N}, \mathfrak{p})/\mathfrak{p}$ ist ein nilpotentes Ideal von $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ und da $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ausser Null kein nilpotentes Ideal hat, ist $(\mathfrak{N}, \mathfrak{p})/\mathfrak{p}$ Null, also $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{p}$. Bedeutet

---

2) Vgl. etwa M. Deuring, Albebren, Ergebnisse Math. 4 (1935), S. 16.

3) Vgl. T. Nakayama, Note on uni-serial and generalized uni-serial rings, Proc. Imp. Tokyo **16** (1949), S. 285.

4) Ein (von $\mathfrak{o}$ verschiedenes) zweiseitiges Ideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ heisst ein Primideal, wenn aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \leq \mathfrak{p}$ $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{p}$ folgt, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zweiseitige Ideale von $\mathfrak{o}$ bedeuten.

$$\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{R} = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}_n$$

die Zerlegung von $\mathfrak{o}$ in die direkte Summe von einfachen Ringen, so ist

$$\bar{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{p}_i/\mathfrak{R} = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}_{i-1} + \bar{\mathfrak{o}}_{i+1} + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}_n \quad (i = 1, \ldots, n)$$

ein Primideal von $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ sind alle verschiedenen Primideale von $\mathfrak{o}$. Es ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i \cong \bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{p}}_i \cong \bar{\mathfrak{o}}_i$ und $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i$ ist ein einfacher Ring. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist also ein maximales zweiseitiges Ideal. Es ist $\bar{\mathfrak{p}}_1 \cap \ldots \cap \bar{\mathfrak{p}}_n = \bar{0}$, folglich $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n = \mathfrak{R}$.

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{o}$ ein halbprimärer Ring mit Eiselement, dessen Radikal $\mathfrak{R}$ nilpotent ist. Die folgenden Bedingungen sind einander äquivalent:*

1) *$\mathfrak{o}$ ist die direkte Summe von primären Ringen.*

2) *Das Produkt zweier Primideale ist kommutativ.*

3) *$\mathfrak{o}/\mathfrak{R}^2$ ist die direkte Summe von primären Ringen.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \ldots + \mathfrak{o}_n$ die direkte Summe von primären Ringen. Das Radikal von $\mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \ldots + \mathfrak{R}_n$, $\mathfrak{R}_i \subset \mathfrak{o}_i$, wo $\mathfrak{R}_i$ das Radikal von $\mathfrak{o}_i$ ist. Die Primideale von $\mathfrak{o}$ werden durch

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{o}_1 + \ldots + \mathfrak{o}_{i-1} + \mathfrak{R}_i + \mathfrak{o}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{o}_n \quad (i = 1, \ldots, n)$$

angegeben. Es ist ersichtlich $\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}_j\mathfrak{p}_i$. Sei umgekehrt das Produkt von Primidealen kommutativ. Bedeuten $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ alle verschiedenen Primideale von $\mathfrak{o}$, so sind sie einander kommutativ und teilerfremd, also ist für eine natürliche Zahl ρ

$$\mathfrak{p}_1^\rho \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n^\rho = \mathfrak{p}_1^\rho \ldots \mathfrak{p}_n^\rho = (\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n)^\rho = (\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n)^\rho = \mathfrak{R}^\rho = 0 .$$

$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}/\mathfrak{R}^\rho$ ist der direkten Summe von $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^\rho$ ringisomorph.

$$\mathfrak{o} \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_1^\rho \oplus \ldots \oplus \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_n^\rho,$$

$\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\rho$ ist ein primärer Ring, da $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\rho$ nilpotent und $(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\rho)/(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\rho)$ mit dem einfachen Ring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ringisomorph ist. Damit ist gezeigt, dass (1) und (2) äquivalent ist.

Wir zeigen nun $(1) \to (3) \to (2)$. Dass aus (1) (3) folgt ist klar, da $\mathfrak{o}/\mathfrak{R}^2$ mit der direkten Summe von $\mathfrak{o}_i/\mathfrak{R}_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$ ringisomorph ist. Ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{R}^2$ die direkte Summe von primären Ringen, so ist das Produkt der Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{o}$ modulo $\mathfrak{R}^2$ kommutativ. Da aber $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}$ beide $\mathfrak{R}^2$ enthalten, so ist $\mathfrak{p}\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'\mathfrak{p}$.

§ 2. Linksseitig einreihige Ringe

Es sei $\mathfrak{o}$ ein linksseitig einreihiger Ring. Ist e ein primitives Idempotent von $\mathfrak{o}$, so wird die einzige Kompositionsreihe von $\mathfrak{o}e$ durch $\mathfrak{o}e \supset \mathfrak{R}e \supset \ldots \supset \mathfrak{R}^r e = 0$ angegeben. Denn $\mathfrak{R}^i e/\mathfrak{R}^{i+1}e$ ist (als $\mathfrak{o}/\mathfrak{R}$-Modul betrachtet) vollständig reduzibel und wegen der Einreihigkeit muss es sogar ein einfacher Modul sein. Ist $\mathfrak{o}$ ferner vollständig primär, so bildet $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{R} \supset \ldots \supset \mathfrak{R}^\rho = 0$ als $\mathfrak{o}$-Linksmodul eine einzige Kompositionsreihe. Folglich hat $\mathfrak{o}$ ausser $\mathfrak{o}, \mathfrak{R}, \ldots, \mathfrak{R}^\rho = 0$ kein Linksideal; die Potenzen von $\mathfrak{R}$ sind die einzigen Linksideale von $\mathfrak{o}$. Bedeutet π ein in $\mathfrak{R}$, aber nicht in $\mathfrak{R}^2$ enthaltenes Element, so ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}\pi$ und $\mathfrak{R}^i = \mathfrak{o}\pi^i$. Jedes Linksideal von $\mathfrak{o}$ ist somit ein Hauptideal. Jedes Element $a \neq 0$ aus $\mathfrak{o}$ ist in der Eorm $a = \varepsilon\pi^\nu$ darstellbar, wo ε eine Einheit von $\mathfrak{o}$ und π_0 das Einselement von $\mathfrak{o}$ bedeutet.

Es sei nun $\mathfrak{o}$ ein primärer Ring, also ein voller Matrizenring $\sum_{i,j=1}^r \mathfrak{t}c_{ij}$ über einem vollständig primären Ring $\mathfrak{t}$, so ist $\mathfrak{o}$ dann und nur dann linksseitig einreihig, wenn $\mathfrak{t}$ linksseitig einreihig ist. Denn jedes vom primitiven Idempotent e erzeugte Linksideal $\mathfrak{o}e$ ist (als $\mathfrak{o}$-Linksmodul) mit $\mathfrak{o}c_{11} = \sum_{i=1}^r \mathfrak{t}c_{i1}$ isomorph und die Linksideale $\mathfrak{l}_0$ von $\mathfrak{t}$ und die in $\mathfrak{o}c_{11}$ enthaltenen Linksideale $\mathfrak{l}$ von $\mathfrak{o}$ entsprechen nach der Beziehung $\mathfrak{l} = \sum_{i=1}^r \mathfrak{l}_0 c_{i1}$ eineindeutig. Ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \ldots + \mathfrak{o}_n$ die direkte Summe von primären Ringen, so ist $\mathfrak{o}$ dann und nur dann linksseitig einreihig, wenn die direkten Komponenten $\mathfrak{o}_i$ linksseitig einreihig sind.

Ist $\mathfrak{o} = \sum_{i,j=1}^r \mathfrak{t}c_{ij}$ ein primärer, linksseitig einreihiger Ring und bedeutet $\mathfrak{n}$ das Radikal von $\mathfrak{t}$, so ist $\mathfrak{R} = \sum \mathfrak{n}c_{ij}$ das Radikal von $\mathfrak{o}$; $\mathfrak{R}$ ist ein (einziges) Primideal von $\mathfrak{o}$ und die zweiseitigen Ideale von $\mathfrak{o}$ sind die Potenzen von $\mathfrak{R}$. Der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{R}^\nu$ ist ersichtlich linksseitig einreihig, weil $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{R}^\nu = \sum_{i,j=1}^r \bar{\mathfrak{t}}\bar{e}_{ij}$, $\bar{\mathfrak{t}} \cong \mathfrak{t}/\mathfrak{n}^\nu$ und $\bar{\mathfrak{t}}$ vollständig primär und linksseitig einreihig ist. Wenn $\mathfrak{o}$ ein allgemeiner, linksseitig einreihiger Ring und die direkte Summe von primären, linksseitig einreihigen Ringen ist: $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \ldots + \mathfrak{o}_n$, so sind

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{o}_1 + \ldots + \mathfrak{p}_{i-1} + \mathfrak{R}_i + \mathfrak{o}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{o}_n \quad (i = 1, \ldots, n)$$

die Primideale von $\mathfrak{o}$ und die zweiseitigen Ideale von $\mathfrak{o}$ sind Potenzprodukte von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$: $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{p}_n^{e_n} = \mathfrak{R}_1^{e_1} + \ldots + \mathfrak{R}_n^{e_n}$, wobei $\mathfrak{R}_i$ das Radikal von $\mathfrak{o}_i$ bedeutet. Das Produkt von zweiseitigen Idealen ist also kommutativ. Ferner ist jeder Restklassenring von $\mathfrak{o}$ auch linksseitig einreihig.

Hilfssatz 3. $\mathfrak{o}$ sei ein vollständig primärer Ring, dessen Radikal $\mathfrak{R}$ nilpotent ist. Ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{R}^2$ linksseitig einreihig, so ist $\mathfrak{o}$ linksseitig einreihig.

Beweis. Da $\mathfrak{R}$ modulo $\mathfrak{R}^2$ ein Hauptlinksideal ist, ist $\mathfrak{R} = (\mathfrak{o}\pi, \mathfrak{R}^2)$, daraus folgt $\mathfrak{R}^i = (\mathfrak{o}\pi^i, \mathfrak{R}^{i+1})$. $K = \mathfrak{o}/\mathfrak{R}$ ist ein Schiefkörper und $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$ ist als ein K-Modul betrachtet vom Range 1. Wir zeigen, dass $\mathfrak{R}^i/\mathfrak{R}^{i+1}$ als ein K-Modul betrachtet vom Range 1 ist. Durch die Zuordnung $x \rightarrow \overline{x\pi^{i-1}}$ $(x \in \mathfrak{R})$ wird $\mathfrak{R}$ (als $\mathfrak{o}$-Linksmodul) in $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{R}^{i+1}$ homomorph abgebildet. Weil $x = y\pi + z$ $(y \in \mathfrak{o},\ z \in \mathfrak{R}^2)$ ist, ist $\overline{x\pi^{i-1}} = \overline{y\pi^i}$. Das Bild von $\mathfrak{R}$ ist also $\mathfrak{R}^i/\mathfrak{R}^{i+1}$ und nach dem Homomorphiesatz ist $\mathfrak{R}^i/\mathfrak{R}^{i+1} \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$. Daher ist $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{R} \supset \ldots \supset \mathfrak{R}^\rho = 0$ eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{o}$ (als $\mathfrak{o}$-Linksmodul). Daraus folgt leicht, dass $\mathfrak{o}$ keine andere Kompositionsreihe hat.

Satz 4. *Es sei $\mathfrak{o}$ ein halbprimärer Ring mit Einselement, dessen Radikal $\mathfrak{R}$ nilpotent ist. Die folgenden Bedingungen sind einander äquivalent:*

1) *$\mathfrak{o}$ ist linksseitig einreihig.*

2) *$\mathfrak{o}/\mathfrak{R}^2$ ist linksseitig einreihig.*

3) *Für beliebige Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ von $\mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{o}/(\mathfrak{p} \frown \mathfrak{q})^2$ linksseitig einreihig.*

4) *Das Prdoukt zweier Primideale von $\mathfrak{o}$ ist kommutativ und für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^2$ linksseitig einreihig.*

Beweis. Wir zeigen, dass $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow (1)$. $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3)$ ist klar. Da nach (3) das Produkt von $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ modulo $(\mathfrak{p} \frown \mathfrak{q})^2$ kommutativ ist und $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, beide $(\mathfrak{p} \frown \mathfrak{q})^2$ enthalten, so ist $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{p}$ und gilt $(3) \rightarrow (4)$. Wir beweisen nun $(4) \rightarrow (1)$. Nach Satz 3 ist $\mathfrak{o}$ die direkte Summe von primären Ringen: $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \ldots + \mathfrak{o}_n$. Es ist

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{o}_1 + \ldots + \mathfrak{o}_{i-1} + \mathfrak{R}_i + \mathfrak{o}_{i+1} \ldots + \mathfrak{o}_n, \quad \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^2 \simeq \mathfrak{o}_i/\mathfrak{R}_i^2.$$

Sei $\mathfrak{o}_i = \sum_{j,k=1}^{r} \mathfrak{t}_i e_{jk}$ mit einem vollständig primären Ring $\mathfrak{t}_i$. Bedeutet $\mathfrak{n}_i$ das Radikal von $\mathfrak{t}_i$, so folgt aus der Einreihigkeit von $\mathfrak{o}_i/\mathfrak{R}_i^2$ die von $\mathfrak{t}_i/\mathfrak{n}_i^2$. Nach Hilfssatz 3 ist $\mathfrak{t}_i$, und somit $\mathfrak{o}_i$ linksseitig einreihig. $\mathfrak{o}$ ist also linksseitig einreihig.

Hilfssatz 4. $\mathfrak{o}$ sei ein Schiefring mit Einselement und $\mathfrak{o}_n$ sei der volle Matrizenring n-ten Grades über $\mathfrak{o}$. Ist jedes Linksideal von $\mathfrak{o}$ ein Hauptlinksideal, so ist jedes Linksideal von $\mathfrak{o}_n$ ein Hauptlinksideal.

Beweis. $\mathfrak{A}$ sei ein Linksideal von $\mathfrak{o}_n$. Die Gesamtheit der Zeilenvektoren von Matrizen aus $\mathfrak{A}$ bildet eine $\mathfrak{o}$-Linksmodul M. Denkt man für ein festes i die Vektoren aus M von der Form $(x_1, \ldots, x_i, 0 \ldots, 0)$, so bildet die Gesamtheit von x_i ein Linksideal $\mathfrak{o}a_{ii}$ von $\mathfrak{o}$. Es gibt in M einen Vektor $u_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ii}, 0, \ldots, 0)$ und jedes Element von M ist eine lineare Kombination von $u_1, \ldots, u_n$. Setzt man

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

so wird jede Matrix aus $\mathfrak{A}$ in der Form XA $(X \varepsilon \mathfrak{o}_n)$ dargestellt.

Hilfssatz 5. Es sei $\mathfrak{o}$ ein primärer Ring mit dem Radikal $\mathfrak{R}$ und sei $\mathfrak{R}^2 = 0$. Ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}c$, so ist $\mathfrak{o}$ linksseitig einreihig.

Beweis. Sei $\mathfrak{o} = \sum_{i,j=1}^{r} \mathfrak{t}\, e_{ij}$ mit einem volltsändig primären Ring $\mathfrak{t}$. Es ist $\mathfrak{R} = \sum_{i,j} \mathfrak{n}\, e_{ij}$ mit dem Radikal $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{t}$. $K = \mathfrak{t}/\mathfrak{n}$ ist ein Schiefkörper. Wegen $\mathfrak{n}\,\mathfrak{n} = 0$ kann man $\mathfrak{n}$ als K-Linksmodul ansehen. Dabei ist der Rang von $\mathfrak{n}$ über K gleich 1. Denn ist $(\mathfrak{n} : K) = m$, so ist $(\mathfrak{R} : K) = m\, r^2$; andererseits ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}\, c$ und wegen $\mathfrak{R}\, c = 0$ ist $\mathfrak{R}$ zum K-Linksmodul $\mathfrak{o}/\mathfrak{R}$ vom Range r^2 homomorph, also $(\mathfrak{R} : K) \leq r^2$. Daher ist $m = 1$, $\mathfrak{t} \supset \mathfrak{n} \supset 0$ ist demnach die einzige Kompositionsreihe von $\mathfrak{t}$.

Satz 5. *$\mathfrak{o}$ sei ein halbprimärer Ring mit Einselement, dessen Radikal $\mathfrak{R}$ nilpotent ist. Die folgenden Bedingungen sind einander äquivalent:*

1) *$\mathfrak{o}$ ist linksseitig einreihig.*

2) *Jedes Linksideal von $\mathfrak{o}$ ist ein Hauptideal.*

3) *Jedes Primideal von $\mathfrak{o}$ ist ein Hauptlinksideal.*

4) *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{p}/\mathfrak{N}^2$ ein zyklischer $\mathfrak{o}$-Linksmodul.*

5) *Für beliebige Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{p}/(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})^2$ ein zyklischer $\mathfrak{o}$-Linksmodul.*

6) *Das Produkt zweier Primideale ist kommutativ und für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ ein zyklischer $\mathfrak{o}$-Linksmodul.*

Beweis. Wir zeigen, dass $(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to (5) \to (6) \to (1)$.

$(1) \to (2)$. Ist $\mathfrak{o}$ primär, so ist $\mathfrak{o} = \sum_{i,j=1}^{r} \mathfrak{k}\, e_{ij}$ und jedes Linksideal von $\mathfrak{k}$ ist ein Hauptideal. Nach Hilfssatz 4 ist jedes Linksideal von $\mathfrak{o}$ ein Hauptideal. Im allgemeinen Fall ist $\mathfrak{o}$ die direkte Summe von primären, linksseitig einreihigen Ringen, in denen jedes Linksideal ein Hauptideal ist: $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \ldots + \mathfrak{o}_n$, jedes Linksideal von $\mathfrak{o}$, welches eine direkte Summe von Linksidealen von $\mathfrak{o}_i$ ist, ist somit ein Hauptideal.

$(2) \to (3) \to (4) \to (5)$ ist klar.

$(5) \to (6)$. Nach Hilfssatz 1 ist das Produkt von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ modulo $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})^2$ kommutativ, also $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\,\mathfrak{p}$.

$(6) \to (1)$. $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^2$ ist ein primärer Ring mit dem Radikal $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$. Nach Hilfssatz 5 ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^2$ linksseitig einreihig. Nach Satz 4 ist $\mathfrak{o}$ linksseitig einreihig.

Bemerkung : Ein linksseitig einreihiger Ring ist nicht immer rechtsseitig einreihig. Es sei P ein Körper und x sei eine Unbestimmte. Der Körper $K = P(x)$ ist zum Teilkörper $K' = P(x^2)$ isomorph. $a \to a'$ sei ein Isomorphismus von K auf K'. Definiert man im K-Linksmodul $\mathfrak{o} = K + K u$, $u^2 = 0$, $u a = a' u$, so bildet $\mathfrak{o}$ einen vollständig primären Ring mit dem Radikal $\mathfrak{N} = K u$. $\mathfrak{o}$ hat ausser 0, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{o}$ kein Linksideal, ist also linksseitig einreihig. Da aber $\mathfrak{N} = u K + x u K$ ist, ist $\mathfrak{o}$ nicht rechtsseitig einreihig.

§ 3 Einreihige Ringe

Aus Satz 5 und Hilfssatz 2 folgt sofort der

Satz 6. *Es sei $\mathfrak{o}$ ein halbprimärer Ring mit Einselement, dessen*

Radikal $\mathfrak{R}$ *nilpotent ist. Die folgenden Bedingungen sind einander äquivalent:*

1) $\mathfrak{o}$ *ist einreihig.*

2) $\mathfrak{o}$ *ist ein Hauptidealring, d.h. bedeutet* $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{z}$ *ein Links-, Rechts- bzw. zweiseitiges Ideal, so gilt*

$$\mathfrak{l}=\mathfrak{o}a, \quad \mathfrak{r}=b\mathfrak{o}, \quad \mathfrak{z}=\mathfrak{o}c=c\mathfrak{o}.$$

3) *Jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{o}$ *ist ein Hauptlinks- sowie ein Hauptrechtsideal:* $\mathfrak{p}=\mathfrak{o}a=b\mathfrak{o}$.

4) *Für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{o}$ *ist* $\mathfrak{p}/\mathfrak{R}^2$ *als* $\mathfrak{o}$*-Links- sowie als* $\mathfrak{o}$*-Rechtsmodul zyklisch.*

5) *Für beliebige Primideale* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ *von* $\mathfrak{o}$ *ist* $\mathfrak{p}/(\mathfrak{p}\frown\mathfrak{q})^2$ *als* $\mathfrak{o}$*-Links- sowie als* $\mathfrak{o}$*-Rechtsmodul zyklisch.*

6) *Das Produkt zweier Primideale ist kommutativ und für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *ist* $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ *als* $\mathfrak{o}$*-Links- sowie als* $\mathfrak{o}$*-Rechtsmodul zyklisch.*

Es gilt ferner der folgende

Satz 7. $\mathfrak{o}$ *sei ein halbprimärer Ring mit Einselement, dessen Radikal* $\mathfrak{R}$ *nilpotent ist. Die folgenden Bedingungen sind einander äquivalent.*

1) $\mathfrak{o}$ *ist einreihig.*

2) *Aus* $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{z}$ *folgt* $\mathfrak{l}=\mathfrak{z}\mathfrak{l}'$ *und aus* $\mathfrak{r}\subset\mathfrak{z}$ *folgt* $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}'\mathfrak{z}$, *wobei* $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$ *Linksideale,* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ *Rechtsideale und* $\mathfrak{z}$ *ein zweiseitiges Ideal von* $\mathfrak{o}$ *bedeuten.*

3) *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von* $\mathfrak{o}$ *und* $\mathfrak{l}$ *bzw.* $\mathfrak{r}$ *ein* $\mathfrak{R}^2$ *enthaltendes Links- bzw. Rechtsideal von* $\mathfrak{o}$. *Aus* $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{p}$ *folgt* $\mathfrak{l}=\mathfrak{p}\mathfrak{l}'$ *und aus* $\mathfrak{r}\subset\mathfrak{p}$ *folgt* $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}'\mathfrak{p}$.

Beweis. Wir zeigen, dass $(1)\to(2)\to(3)\to(1)$.

$(1)\to(2)$. Nach Satz 6 gilt $\mathfrak{l}=\mathfrak{o}a$, $\mathfrak{r}=b\mathfrak{o}$, $\mathfrak{z}=c\mathfrak{o}=\mathfrak{o}c=\mathfrak{o}c\mathfrak{o}$. Ist $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{z}$, so ist $a=ca'$, $\mathfrak{l}=\mathfrak{o}a=\mathfrak{o}ca'=\mathfrak{o}c\mathfrak{o}a'=\mathfrak{z}\mathfrak{l}'$. Ebenso folgt aus $\mathfrak{r}\subset\mathfrak{z}$ $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}'\mathfrak{z}$. $(2)\to(3)$ ist klar.

$(3)\to(1)$. Nach Satz 4 genügt es zu zeigen, dass $\mathfrak{o}/\mathfrak{R}^2$ einreihig ist. Da wir modulo $\mathfrak{R}^2$ betrachten, können wir von vornherein als $\mathfrak{R}^2=0$ annehmen. Sind $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ zwei verschiedene Primideale von $\mathfrak{o}$, so ist wegen $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\leq\mathfrak{q}$. $\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}'$, und da $\mathfrak{q}\mathfrak{p}'\equiv 0\,(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{q}\not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ ist, ist $\mathfrak{p}'\leq\mathfrak{p}$. Also ist

$\mathfrak{p}\mathfrak{q} \leq \mathfrak{q}\mathfrak{p}$, ebenso $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p}\mathfrak{q}$, und $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{p}$. Nach Satz 3 ist $\mathfrak{o}$ die direkte Summe von primären Ringen. Man sieht leicht, dass die Bedingung (4) auch für die einzelnen direkten Summanden gilt. Es genügt also den Satz im Falle vom primären Ring zu beweisen. Es ist $\mathfrak{o} = \sum_{i,j=1}^{r} \mathfrak{t}\, e_{ij}$ mit einem vollständig primären Ring $\mathfrak{t}$. Bedeutet $\mathfrak{n}$ das Radikal von $\mathfrak{t}$, so ist $\mathfrak{R} = \sum_{i,j} \mathfrak{n}\, e_{ij}$ das Radikal von $\mathfrak{o}$. Wir beweisen, dass $\mathfrak{n}$ ausser Null und sich selbst weder Links- noch Rechtsideal von $\mathfrak{t}$ enthält. Es sei $\mathfrak{l}_0 \neq 0$ ein Linksideal von $\mathfrak{t}$ mit $0 \subset \mathfrak{l}_0 \subseteq \mathfrak{n}$. Dann ist $\mathfrak{l} = \sum_{i,j} \mathfrak{l}_0\, e_{ij}$ ein Linksideal von $\mathfrak{o}$ mit $0 \subset \mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{R}$, also $\mathfrak{l} = \mathfrak{R}\,\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}' \not\equiv 0\ (\mathfrak{R})$. $a = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, e_{ij} \neq 0$ sei ein Element von $\mathfrak{l}'$ und sei $\alpha_{kl} \not\equiv 0\ (\mathfrak{n})$. Für jedes x aus $\mathfrak{n}$ gilt $x\alpha_{kl}^{-1}\, a \in \mathfrak{R}\mathfrak{l}' = \mathfrak{l} = \sum_{i,j} \mathfrak{l}_0 e_{ij}$, also ist $x = x\,\alpha_{kl}^{-1}\,\alpha_{kl} \in \mathfrak{l}_0$, damit $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{l}_0$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{l}_0$. Analog ist für Rechtsideale.

Satz 8. *$\mathfrak{o}$ sei ein Frobeniusscher Ring.*[5]) *Wenn jeder Restklassenring von $\mathfrak{o}$ nach dem minimalen zweiseitigen Ideal ein Frobeniusscher Ring ist, so ist $\mathfrak{o}$ einreihig.*

Beweis. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, also maximales zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$, so ist der Linksannihilator (Rechtsannihilator) $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{p}$ ein minimales zweiseitiges Ideal und der Rechtsannihilator (Linksannihilator) von $\mathfrak{m}$ ist $\mathfrak{p}$. Nach T. Nakayama ist $\mathfrak{p}$ ein Hauptlinks- sowie Hauptrechtsideal. Nach Satz 7 ist $\mathfrak{o}$ einreihig.

Satz 9. *Es sei $\mathfrak{o}$ eine Algebra vom endlichen Range über einem kommutativen Körper k. Ist $\mathfrak{o}$ linksseitig einreihig, so ist es auch rechtsseitig einreihig.*

Beweis. $\mathfrak{o}$ sei eine vollständig primäre Algebra mit dem Radikal $\mathfrak{R}$ und sei $\mathfrak{R}^2 = 0$. Es genügt den Satz für eine solche Algebra zu beweisen. Es gibt ein Element u aus $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}\,u$. $D = \mathfrak{o}/\mathfrak{R}$ ist eine Divisionsalgebra und $\mathfrak{R}$ wird als D-D-Doppelmodul angesehen. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{R} = D\,u$. Durch die Zuordnung $a \to a'$, $u\,a = a'u$, wird D auf eine Teilalgebra D' isomorph abgebildet. Es ist also $D' = D$, $\mathfrak{R} = u\,D$. Demnach ist $\mathfrak{o}$ auch rechtsseitig einreihig,

(Eingegangen 20. Oktober, 1948)

---

5) T. Nakayama, On Frobeniusean algebras. II, Ann. Math. 42 (1941). Der Satz lässt sich natürlich aus der Nakayamaschen Theorie direkt ableiten.