SUR UN THÉORÈME ÉTOILÉ DE GROSS

MAKOTO OHTSUKA

Introduction

Nous continuerons l'étude du premier théorème étoilé de Gross, faite dans le mémoire de l'auteur: Théorèmes étoilés de Gross et leurs applications, Ann. Inst. Fourier, 5 (1955), pp. 1-28; ce mémoire sera cité avec l'abréviation [A].

Dans la généralisation du théorème étoilé de Gross dans le théorème 1 de [A], on a considéré une représentation plus générale que représentation quasi-conforme classique, d'un domaine plan de la forme de bande, noté G, dans une surface de Riemann. Dans le présent mémoire, on donnera d'abord une généralisation du théorème étoilé de Gross dans le cas où G est transformé en un espace topologique qui contient des surfaces de Riemann homéomorphes à une partie de G, à l'aide de la notion généralisée de longueur extrémale, et après, on étendra le théorème 1 de [A] aux représentations continues, non nécessairement univalentes, localement pseudo-analytiques en dehors d'un certain ensemble exceptionnel au sens de Pfluger [6] et d'Ahlfors [1].

On s'occupera dans § 1 du changement de variable dans une intégrale prise le long d'une courbe plane. Après cette préparation, pour une fonction $\pi(P)$ non négative sur un ensemble fini ou dénombrable de surfaces de Riemann, la longueur extrémale d'une famille de systèmes de courbes *de poids* $\pi(P) \geqq 0$ sera définie, et il sera démontré que, si cet ensemble de surfaces de Riemann est transformé en un autre ensemble de surfaces de Riemann par un homéomorphisme de quotient de dilatation $q(P)$ généralisé, la longueur extrémale de poids $1/q(P)$ d'une famille de systèmes de courbes n'est pas moins que la longueur extrémale de poids 1 de leurs images (§ 2). La positivité de la longueur extrémale d'une famille de systèmes de courbes qui séparent un continu dans G d'un ensemble sur la frontière de G sera montrée aussi dans § 2. Ces résultats dans § 2 nous permettent de généraliser le théorème étoilé de Gross pour des transformations de quotient de dilatation non nécessairement borné (§ 3). Ensuite, nous envisagerons la distance extrémale entre deux systèmes de courbes, et la longueur extrémale de la famille des courbes qui séparent ces deux systèmes, sur une surface de Riemann (§ 4). Les résultats seront appliqués à quelques questions de type de surfaces de Riemann (§ 5).

Received July 12, 1955.

§6 sera consacré à généraliser le théorème 1 de [A] aux représentations continues, localement pseudo-analytiques au sens de Pfluger-Ahlfors sauf en un certain ensemble exceptionnel. Enfin dans § 7, on améliorera certains des résultats obtenus dans [A], concernant la correspondance de frontières, en utilisant le théorème étoilé de Gross généralisé.

1. Nous commençons par justifier le changement de variable dans une intégrale prise le long d'une courbe plane. Soit $c=\{z(t)\,;\ 0<t<1\}$ une courbe rectifiable située dans un domaine D dans le plan $z=x+iy$, avec ses extrémités. A l'ordinaire, on définit la longueur $s(I)$ de l'image d'un intervalle $I:\ (0<)t_1\leqq t<t_2(<1)$ par $\sup_{\delta}\sum_{i=1}^{n-1}|z(t^i)-z(t^{i+1})|$ où δ est une division de $I:\ t^1=t_1<t^2<\ldots<t^n=t_2$. A partir de cette fonction d'intervalle une mesure $s^*(B)$ sur la famille des ensembles boréliens dans $(0,1)$ est définie (voir [9], Chap. III); on l'appellera la mesure de longueur. Il est bien connu (voir [9], Chap. IV) que s^* a la dérivée au sens général presque partout (p.p.), que $\lim_{\Delta t\to 0}|z(t+\Delta t)-z(t)|/|\Delta t|$ existe p.p. et que tous les deux dérivées coïncident p.p. sur $(0,1)$. Étant donnée une fonction $\rho(z)$ réelle non négative sur c, l'intégrale inférieure $\underline{\int}_c \rho ds$ de $\rho(z)$ prise le long de c est définie par le suprémum de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes $\int_c \underline{\rho} ds^*$, où $\underline{\rho}=\underline{\rho}(t)$ est une fonction borélienne non négative dans $(0,1)$, et non supérieure à $\rho(z(t))$.

Parmi les représentations équivalentes de c, il existe la *représentation au moyen de la longueur d'arc*: $z(s)$, $0<s<s_0$, où s_0 est la longueur totale de c (voir [8], p. 258). Pour cette représentation, $\lim_{\Delta s\to 0}\dfrac{|z(s+\Delta s)-z(s)|}{|\Delta s|}=1$ p.p. sur $0<s<s_0$, et $\underline{\int}_c \rho ds$ est égale au suprémum de l'intégrale ordinaire de Lebesgue d'une fonction $\leqq\rho$, borélienne et non négative de s. De plus, on peut montrer que, $\rho(z)\geqq 0$ étant définie sur c, $\underline{\int}_0^1 \rho(z(t))ds^*(t)$ est égale à $\underline{\int}_0^{s_0}\rho(z(s))ds$, n'importe quel paramètre t étant choisi pour représenter c à la manière equivalente.

Soit $f(z)$ un homéomorphisme de D sur un domaine G dans le plan $w=u+iv$. On dira que $f(z)$ est absolument continu sur c, si $u(z(s))$ et $v(z(s))$ sont des fonctions absolument continues de s, et que $f(z)$ est totalement dérivable sur c si $u(z)$ et $v(z)$ sont totalement dérivables en chaque point de c. Lorsque $f(z)$ est totalement dérivable en un point z, $D_\theta w=D_\theta w(z)=\lim_{r\to 0}(f(z+re^{i\theta})-f(z))/re^{i\theta}$ existe pour tout θ, $0\leqq\theta\leqq 2\pi$, et égale $(u_x\cos\theta+u_y\sin\theta)+i(v_x\cos\theta+v_y\sin\theta)$.

D'abord on prouve

LEMME 1. *Soit c une courbe rectifiable placée dans un domaine D dans le plan z, avec ses deux extrémités, et soit $\rho(z)$ une fonction réelle non négative définie sur c. On transforme D en un domaine dans le plan w par un homéomorphisme $w = f(z)$ totalement dérivable et absolument continu sur c. Alors l'image $f(c)$ est rectifiable et on a*

$$\int_0^{s_0} \rho(z(s)) \, | D_0 w(z(s)) | \, ds = \int_{f(c)} \rho(f^{-1}(w)) ds_w, \tag{1}$$

où s_w est une mesure de longueur sur $f(c)$ et $D_0 w(z(s)) = D_0 w(z) = \lim_{c \ni z' \to z} (f(z') - f(z))/(z' - z)$, qui existe pour presque toute valeur de s, $0 < s < s_0$.

Il est immédiat que $f(c)$ est rectifiable lorsque $f(z)$ est absolument continue sur c. D'après le théorème de Radon-Nikodym, on a $s_w^*(B_s) = \int_{B_s} g(s) ds$ pour tout ensemble borélien B_s dans $0 < s < s_0$ avec une fonction borélienne $g(s)$ définie sur $0 < s < s_0$. La dérivation des deux membres nous donne

$$g(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{| f(z(s + \Delta s)) - f(z(s)) |}{| \Delta s |} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{| f(z + \Delta z) - f(z) |}{| \Delta z |} \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta z}{\Delta s} \right|$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{| f(z + \Delta z) - f(z) |}{| \Delta z |} = | D_0 w(z(s)) | \qquad \text{p. p. dans } 0 < s < s_0 ;$$

l'angle θ est égal à la pente de la tangente en point où celle-ci existe ; c'est vrai p. p. sur $0 < s < s_0$. Le changement de variable donne (1) (voir [9], p. 37).

2. Soit $\mathfrak{F}$ un ensemble fini ou dénombrable de surfaces de Riemann. On appellera un ensemble fini ou dénombrable de courbes sur $\mathfrak{F}$ un *système de courbes*. Soit $\{c\}$ une famille de systèmes de courbes sur $\mathfrak{F}$. On définit une *répartition* sur $\mathfrak{F}$ par une quantité covariante non négative ρ : pour chaque z des paramètres locaux de $\mathfrak{F}$, ρ est une fonction $\rho(z)$ réelle non négative, et si z et z' [1] sont deux paramètres locaux correspondant à un même domaine sur $\mathfrak{F}$ et si $\rho(z)$ et $\rho'(z')$ sont les représentations de ρ en z et z' respectivement, alors $\rho'(z') = \rho(z) \, | dz/dz' |$. Soit c un élément de $\{c\}$. Il se compose d'un nombre fini ou dénombrable de courbes $\{c^k\}$. S'il existe une partie compacte de certaine c^k représentée par un paramètre local en courbe non rectifiable, on pose $\int_c \rho ds = \infty$. Dans ce cas on dira que c est localement non rectifiable. Sinon, d'après le lemme 1, l'intégrale inférieure $\int_{c_0} \rho ds$ de ρ prise le long d'une partie compacte c_0 quelconque de c^k est bien définie ; ici, on utilise le fait que, si c_0 est divisée en deux courbes $c_1 + c_2$ ayant une extrémité commune, alors $\int_{c_0} \rho ds = \int_{c_1} \rho ds + \int_{c_2} \rho ds$. L'intégrale $\int_{c^k} \rho ds$ prise le long de c^k sera définie par

[1] Pour le moment, l'accent ′ ne signifie pas la dérivation.

$\lim_{c_0 \to c^k} \int_{c_0} \rho ds$, et $C_\rho(c) = \int_c \rho ds$ sera égale à $\sum_k \int_{c^k} \rho ds$.

Maintenant, $\pi(P)$ étant une fonction réelle non négative sur $\mathfrak{F}$, le *module* $M_\pi\{c\}$ *de* $\{c\}$ *de poids* π est, par définition, $\inf_\rho \overline{\iint}_{\mathfrak{F}} \pi\rho^2 dxdy$ pour les répartitions ρ sur $\mathfrak{F}$ telles que $C_\rho(c) \geqq 1$ pour tout $c \in \{c\}$; on dira que ρ est une *répartition en concurrence* si cette condition est remplie; $\rho \in \infty$ est toujours une répartition en concurrence. Ici l'intégrale supérieure $\overline{\iint}_{\mathfrak{F}} \pi\rho^2 dxdy$[2] est égale à $\inf \iint_{\mathfrak{F}} \varphi dxdy$, où φ est une fonction mesurable non inférieure à $\pi\rho^2$. La *longueur extrémale* $\lambda_\pi\{c\}$ *de poids* π signifiera $1/M_\pi\{c\}$. Lorsque, en particulier, $\pi \equiv 1$, on écrira simplement $M\{c\}$ et $\lambda\{c\}$.

Notre définition d'intégrales et donc les définitions de module et de longueur extrémale sont différentes de celles de Hersch [3], mais nos notions possèdent les propriétés analogues à celles des notions définies par Hersch [3].[3] Par exemple:

a) Monotonie: si $\{c_1\} \subset \{c_2\}$, $\lambda_\pi\{c_1\} \geqq \lambda_\pi\{c_2\}$;

b) $M_\pi(\{c_1\} \cup \{c_2\}) \leqq M_\pi\{c_1\} + M_\pi\{c_2\}$;

c) si $c_1 \subset \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$, $c_2 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = \phi$, alors $M_\pi(\{c_1\} \cup \{c_2\}) = M_\pi\{c_1\} + M_\pi\{c_2\}$;

d) si $\{c_1\} \subset \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$, $\{c_2\} \subset \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = \phi$ et chaque c d'une famille $\{c\}$ contient au moins un c_1 et un c_2, alors $\lambda_\pi\{c\} \geqq \lambda_\pi\{c_1\} + \lambda_\pi\{c_2\}$;

e) $\mathfrak{F}_1$ étant un autre ensemble fini ou dénombrable de surfaces de Riemann, on transforme $\mathfrak{F}$ en $\mathfrak{F}_1$ par un homéomorphisme $f(P)$, totalement dérivable et absolument continu sur tout élément de $\{c\}$ par rapport aux paramètres locaux. Soit $\{c_1\}$ la famille des images sur $\mathfrak{F}_1$ de $\{c\}$. En définissant le *quotient de dilatation* $q(P)$ en P, un point où $f(P)$ est totalement dérivable et possède le jacobien $J(z) = u_x v_y - u_y v_x \neq 0$ par rapport à un paramètre local $z = x + iy$ en P et à un paramètre local $w = u + iv$ en $f(P)$, par $\max_{0 \leqq \theta \leqq 2\pi} |D_\theta w(z)|^2 / |J(z)|$, et par ∞ ailleurs sur $\mathfrak{F}$, on a $\lambda\{c_1\} \leqq \lambda_{1/q}\{c\}$.

On se reporte à Hersch [3] pour les démonstrations de a)-d) et ici on démontre seulement e). Nous supposons que $\lambda\{c_1\} > 0$. Soit ρ_1 une répartition en concurrence pour c_1; nous posons $\rho = \rho_1 \max_{0 \leqq \theta \leqq 2\pi} |D_\theta w|$ dans la partie de $\mathfrak{F}$ où $f(P)$ est totalement dérivable, et $= 0$ ailleurs sur $\mathfrak{F}$. Si c est localement non rectifiable, certainement $\int_c \rho ds \geqq 1$. Soit donc c localement rectifible. Alors

---

[2] On pose $0 \times \infty = 0$.

[3] Voir ce mémoire pour la bibliographie sur la longueur extrémale et ses applications. Comme là, on peut définir le module d'un poids d'une famille numérique de courbes et en déduire ses propriétés comme ci-dessous.

par le lemme 1, $1 \leqq \int_{\underline{c_1}} \rho_1 ds_1 \leqq \int_{\underline{c}} \rho_1 \max |D_0 w| \, ds = \int_{\underline{c}} \rho ds$. En substituant ρ, on a $\overline{\iint}_{\mathfrak{F}} (\rho^2/q) d\tau = \overline{\iint}_{\mathfrak{F}} (\rho_1^2/q) \max |D_0 w|^2 \, d\tau = \overline{\iint} \rho_1^2 |J(z)| \, d\tau \leqq \overline{\iint}_{\mathfrak{F}_1} \rho_1^2 d\tau_1$. Donc $M_{1/q}\{c\} \leqq M\{c_1\}$, d'où l'inégalité pour λ.

Le lemme suivant sera utile dans la démonstration du théorème 1.

LEMME 2. *Soit G un domaine dans le plan $z = x + iy$ de la forme: $0 < x < 1$, $0 < y < h(x) \leqq \infty$, et soit X un ensemble de mesure linéaire extérieure $\overline{m}(X)$ positive dans $0 < x < 1$ tel que, pour tout $x \in X$, $h(x)$ soit fini. Soit K un continu dans G, et $\{\gamma\}$ l'ensemble des courbes joignant K et l'ensemble $\Xi = \{(x, h(x)) ; x \in X\}$ dans $G - K$ tel que chaque courbe aboutit à un point de Ξ suivant un segment parallèle à l'axe des y. Alors la longueur extrémale de la famille des systèmes $\{c\}$ de courbes dont chaque c se coupe toutes les courbes de $\{\gamma\}$ est positive.*

On choisit un sous-ensemble $X_1 \subset X$ de $\overline{m}(X_1) > 0$ tel que, pour tout $x \in X_1$, $h(x)$ soit inférieure à un nombre fini $Y > 0$. Soit R : $(0 <) x_1 < x < x_2$ (< 1), $0 < y < y_0$ un rectangle dans G tel que la partie X_2 de X_1 dans (x_1, x_2) ait la mesure $\overline{m}(X_2) > 0$ et que le continu K donné soit placé hors R. On joint dans $G - K$ le point $(x_1, 0)$ à un point de K par une courbe c_1 régulière placée en dehors de R, et le point (x_1, y_0) à un autre point de K par une courbe c_2 régulière, disjointe de c_1 et placée en dehors de R. On a ainsi un quadrilatère Q de côtés suivants: $c_1 + \{(x, y) ; x_1 < x < x_2, y = 0\}$; $\{(x, y) ; x = x_2, 0 < y < y_0\}$; $\{(x, y) ; x_1 < x < x_2, y = y_0\} + c_2$; une partie de K. On transforme Q conformément en un rectangle Q_0: $0 < \xi < a$, $0 < \eta < 1$ par $\zeta = \zeta(z)$, $\zeta = \xi + i\eta$, tel que le premier et le troisième des côtés de Q correspondent aux côtés horizontals de Q_0. Pour le moment, on appellera l'image réciproque dans Q d'un segment joignant deux côtés de Q_0 parallèle à l'axe des ξ une *ligne* dans Q. On pose $\rho_1 = 1/\overline{m}(X_2)$ dans la partie de G appartenant au rectangle $0 < x < 1$, $0 < y < Y$ et $= 0$ ailleurs, et $\rho_2 = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$ dans Q et $= 0$ ailleurs, et on désigne par ρ la superposition $\rho_1 + \rho_2$. On montrera que ρ est en concurrence pour la famille des systèmes $\{c\}$. Si un système c ne se coupe pas un segment σ : $\{(x, y) ; 0 < y < h(x), x = \text{Cte} \in X_2\}$, c se coupe toutes les lignes dans Q; en effet, chaque ligne rencontre σ et la réunion de la ligne et σ contient une courbe de $\{\gamma\}$; c doit se couper cette courbe et donc la ligne. Par suite, $\int_c \rho ds \geqq \int_c \rho_2 ds = \int_c \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| ds \geqq 1$. Si c rencontre tous les segments perpendiculaires aboutissant à Ξ, évidemment $\int_c \rho ds \geqq \int_c \rho_1 ds \geqq 1$. Donc ρ est en concurrence ; $\iint_G \rho^2 dxdy \leqq 2\iint_G (\rho_1^2 + \rho_2^2) dxdy \leqq 2\left(\frac{Y}{\overline{m}(X_2)^2} + a\right) < \infty$ et le lemme est demontré.

3. Soit $\mathfrak{F}^*$ un espace topologique connexe, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}^*$ un ensemble fini ou dénombrable de surfaces de Riemann, et $\{D_n\}$ une suite décroissante d'ensembles ouverts de frontières $\{c_n\}$ non vides, relatives à $\mathfrak{F}^*$, telles que $c_1 \cap c_n = \phi$ $(n \geqq 2)$ et chaque c_n se compose d'un nombre fini ou dénombrable de courbes régulières situées dans $\mathfrak{F}$. Nous adjoignons à $\mathfrak{F}^*$ un nouvel élément Ω et définissons sur $\mathfrak{F}^* + \{\Omega\}$ une topologie, en prenant $\{D_n + \{\Omega\}\}$ pour une base du filtre des voisinages de Ω et réservant les bases des filtres des voisinages des points de $\mathfrak{F}^*$. On dira que Ω *est déterminé par* $\{D_n\}$.

Le théorème suivant est une généralisation d'un théorème étoilé de Gross:

THÉORÈME 1. *Soient* $\mathfrak{F}^*$, $\mathfrak{F}$ *et* Ω *respectivement un espace topologique connexe, un ensemble fini ou dénombrable de surfaces de Riemann dans* $\mathfrak{F}^*$, *et l'élément déterminé par* $\{D_n\}$ *que nous venons de définir. Soit* G *un domaine dans le plan* $z = x + iy$ *de la forme* $0 < x < 1$, $0 < y < h(x) \leqq \infty$, *et soit* $f(z)$ *une application continue de* G *dans* $\mathfrak{F}^*$ *telle que la restriction de l'application réciproque de* $f(z)$ *à* $\mathfrak{F}$ *soit un homéomorphisme de* $\mathfrak{F}$. *Soit* $\{c^n\}$ *une famille de systèmes de courbes dans* $\mathfrak{F}$ *séparant* c_1 *et* c_n *sur* $\mathfrak{F}^*$[1] *telle que* $\lambda_{1/q}\{c^n\} \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$, *où* $q(P)$ *est le quotient de dilatation du homéomorphisme* $f^{-1}(P)$ *de* $\mathfrak{F}$ *dans* G. *On suppose que* $f^{-1}(P)$ *soit totalement dérivable et absolument continu sur tout* c^n, *par rapport aux paramètres locaux. Si, pour chaque valeur* x *d'un ensemble* X *dans* $0 < x < 1$, $h(x)$ *est finie et qu'il existe une suite* $y_p \to h(x)$ *telle que* $f(x + iy_p) \to \Omega$ *lorsque* $p \to \infty$ *pour tout* $x \in X$, *alors la mesure linéaire* $m(X) = 0$.

En effet, considérons une composante connexe de l'image réciproque dans G de $\mathfrak{F}^* - D_1$ et prenons dans elle un continu K. La propriété e) donne $\lambda_{1/q}\{c^n\} \geqq \lambda\{c_z^n\}$, où c_z^n est l'image réciproque de c^n. En désignant par $\{c\}$ la famille des systèmes de courbes définie dans le lemme 2, on a $\lambda\{c_z^n\} \geqq \lambda\{c\} > 0$ d'après a) et le lemme 2, si l'on suppose $\overline{m}(X) > 0$. C'est en contradiction avec l'hypothèse que $\lambda_{1/q}\{c^n\} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

4. Dans le théorème 1 la condition que la longueur extrémale $\lambda_{1/q}\{c^n\}$ tende vers 0 est essentielle. Le théorème 2 nous donnera une condition suffisante pour l'existence de $\{c^n\}$ telle que $\lambda_{1/q}\{c^n\} \to 0$.

LEMME 3. *Soit* $\mathfrak{F}$ *un ensemble fini ou dénombrable de surfaces de Riemann, et* $u(P)$ *une fonction harmonique sur* $\mathfrak{F}$. *Si* $c(u)$ *désigne la courbe de niveau:* $u(P) = Cte\ u$,[2] *si* A *est un certain ensemble de valeurs de* u *et si* $\pi(P)$ *est une fonction réelle non négative quelconque sur* $\mathfrak{F}$, *on a*

[1] On dit qu'un système de courbes sépare c_1 et c_n sur $\mathfrak{F}^*$ lorsqu'il se coupe toutes les courbes joignant les points de c_1 et les points de c_n sur $\mathfrak{F}^*$.

[2] Elle consiste en un nombre fini ou dénombrable de courbes régulières.

$$\overline{\int}_A \frac{du}{\underline{\int}_{c(u)} \frac{1}{\pi} dv} \leqq \frac{1}{\lambda_\pi\{c(u);\ u \in A\}}, \tag{2}$$

où $v(P)$ est la fonction harmonique conjuguée de $u(P)$ dans $\mathfrak{F}$.

En effet, soit ρ une répartition en concurrence : $\underline{\int}_{c(u)} \rho ds \geqq 1$ pour toute $c(u)$, $u \in A$. Par l'inégalité de Schwarz, $1 \leqq \left(\underline{\int}_{c(u)} \rho dv\right)^2 \leqq \overline{\int}_{c(u)} \pi\rho^2 dv \cdot \underline{\int}_{c(u)} \frac{1}{\pi} dv$, et par suite $\overline{\int}_A \frac{du}{\underline{\int}_{c(u)} \frac{1}{\pi} dv} \leqq \overline{\iint}_{\mathfrak{F}} \pi\rho^2\, dudv$, d'où l'inégalité.

THÉORÈME 2. *Soient $\mathfrak{F}^*$, $\mathfrak{F}$ et $\{D_n\}$ comme dans le théorème* 1 ; *nous posons $\Delta_n = D_1 - D_n - c_n$. On suppose qu'on puisse trouver dans Δ_n une fonction $u_n(P)$ harmonique dans $\Delta_n \cap \mathfrak{F}$ telle que $\overline{\lim_{c_1}} u_n(P) \leqq 0$ et $\underline{\lim_{c_n}} u_n(P) \geqq 1$ et que $\overline{\int}_{A_n} du_n \Big/ \underline{\int}_{c(u_n)} q dv_n \to \infty$, où A_n est l'ensemble de valeurs de u_n, $0 < u_n < 1$, tel que l'ensemble $\{P \in \mathfrak{F}^*;\ u_n(P) = Cte\ u_n\}$ soit situé dans $\Delta_n \cap \mathfrak{F}$ pour toute $u_n \in A_n$. Si on prend pour $\{c^n\}$ les courbes de niveau $\{c(u_n);\ u_n \in A_n\}$, $\{c^n\}$ remplit les conditions de l'hypothèse du théorème* 1.

En effet, sur toute courbe γ joignant c_1 et c_n dans Δ_n la fonction $u_n(P)$ varie continûment de 0 à 1, et donc toute c^n rencontre γ. De plus, on voit $\lambda_{1/q}\{c^n\} \to 0$ par le lemme précédent.

Dans la suite on étudiera en détail le cas particulier où $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$, une surface de Riemann et $q(P) \equiv 1$. Soit Δ un ensemble ouvert dans $\mathfrak{F}$, soient c_1 et c_2 deux systèmes disjoints de courbes régulières dans $\mathfrak{F}$ qui forment la frontière relative de Δ,[6] soit $\{c\}$ la famille des systèmes de courbes dans Δ homologues à c_1, à une partie de la frontière idéale de Δ près,[7] et soit $\{\gamma\}$ la famille des courbes joignant c_1 et c_2 dans Δ. On démontrera qu'on peut trouver une fonction extrémale harmonique $u_0(P)$ qui donne le maximum à l'intégrale à gauche de (2) et telle que la valeur de l'intégrale soit égale à $1/\lambda\{c\}$ et aussi bien qu'à $\lambda\{\gamma\}$.

D'abord on suppose que Δ ne soit pas compact dans $\mathfrak{F}$ et on fait une exhaustion de $\mathfrak{F}$ par les domaines $\{B_p\}$ de frontières régulières compactes $\{\Gamma_p\}$. On pose $B_p \cap \Delta = \Delta_p$, $B_p \cap c_1 = c_p^1$, $B_p \cap c_2 = c_p^2$ et $\Gamma_p \cap \Delta = \gamma_p$. Soit $u_p(P)$ la fonction harmonique bornée sur Δ_p, égale à 0 sur c_p^1 et à 1 sur c_p^2 et de dérivée normale $\frac{\partial u_p}{\partial \nu} = 0$ sur γ_p. Par la formule de Green, l'intégrale $\int \frac{\partial u_p}{\partial \nu} ds$ est

[6] Lorsque Δ est placé aux deux côtés d'un arc de c_1 ou c_2, on compte cet arc deux fois comme une partie de la frontière de Δ.

[7] Cela veut dire que c et c_1 ensemble forment la frontière relative à $\mathfrak{F}$ d'un certain sous-ensemble ouvert de Δ.

constante sur toute courbe homologue à c_p^1, à une partie de γ_p près, et égale à l'intégrale de Dirichlet $D_{\Delta_p}[u_p]$. Pour $q > p$ il s'en suit encore par la formule de Green que $0 < D_{\Delta_p}[u_q - u_p] = D_{\Delta_p}[u_q] - D_{\Delta_p}[u_p]$. Alors $D_{\Delta_p}[u_p]$ est croissante. Si sa limite est finie, on peut conclure par le raisonnement habituel que $u_p(P)$ tend vers une fonction harmonique $u_0(P)$ localement uniformément sur $\Delta + c_1 + c_2$, et que $\lim_{p\to\infty} D_{\Delta_p}[u_p] = D_\Delta[u_0]$. Alors $u_0(P) = 0$ sur c_p^1 et $= 1$ sur c_p^2. On note aussi que, parmi les fonctions $\{u(P)\}$ harmoniques dans Δ telles que $\overline{\lim_{c_1}} u(P) \leqq 0$ et $\underline{\lim_{c_2}} u(P) \geqq 1$, $u_0(P)$ est la seule fonction qui donne l'intégrale de Dirichlet minimale. Si $D_{\Delta_p}[u_p] \to \infty$, on choisit une suite partielle de $\{u_p(P)\}$ convergente vers une fonction harmonique $u_0(P)$ localement uniformément sur $\Delta + c_1 + c_2$; c'est possible par le théorème de Harnack, car $u_p(P)$ sont uniformément bornées. Comme $D_\Delta[u_0] \geqq D_{\Delta_p}[u_p] \to \infty$, $D_\Delta[u_0] = \infty$.

Comme $c \cap \Delta_p$ est homologue à c_p^1 dans Δ_p pour $c \in \{c\}$, à une partie de γ_p près, on a $\int_{c\cap\Delta_p} dv_p = D_{\Delta_p}[u_p]$, où $v_p(P)$ est la fonction conjuguée de $u_p(P)$. Si on pose $\rho = 1/D_{\Delta_p}[u_p]$ dans Δ_p par rapport au paramètre $u_p + iv_p$ et $= 0$ ailleurs, on a $1 \leqq \int_c \rho ds$ et donc $1/\lambda\{c\} \leqq \iint_{\Delta_p} \rho^2 du_p dv_p = 1/D_{\Delta_p}[u_p]$, d'où $\lambda\{c\} \geqq \lim_{p\to\infty} D_{\Delta_p}[u_p] = D_\Delta[u_0]$.

Soit $u(P)$ une fonction harmonique dans Δ telle que $\overline{\lim_{c_1}} u(P) \leqq 0$ et $\underline{\lim_{c_2}} u(P) \geqq 1$, soit $v(P)$ la fonction conjuguée, et soit $c(u)$ la courbe de niveau: $u(P) =$ Cte u, $0 < u < 1$, dans Δ. Le lemme 3 montre que $\int_0^1 du \Big/ \int_{c(u)} dv \leqq 1/\lambda\{c(u)\}$. D'autre part, comme toute $c(u) \in \{c\}$, on voit que $\lambda\{c(u)\} \geqq \lambda\{c\}$. Donc, en vertu de l'inégalité $\lambda\{c\} \geqq D_\Delta[u_0]$ obtenue ci-dessus, on en déduit

$$\int_0^1 \frac{du}{\int_{c(u)} dv} \leqq \frac{1}{\lambda\{c\}} \leqq \frac{1}{D_\Delta[u_0]}. \tag{3}$$

On va démontrer que $u_0(P)$ est la fonction extrémale qui donne à l'intégrale la valeur maximum, égale à $1/\lambda\{c\} = 1/D_\Delta[u_0]$. Pour cela il est suffisant de savoir que $\int_{c(u_0)} dv_0 = D_\Delta[u_0]$ pour presque toute valeur de u_0. Si $D_\Delta[u_0] = \infty$, l'intégrale à gauche de (3) est zéro et donc $\int_{c(u_0)} dv_0 = \infty$ pour presque toute valeur de u_0, $0 < u_0 < 1$. Si $D_\Delta[u_0] < \infty$, on prend une partie compacte c' de $c(u_0)$ telle que $\int_{c(u_0)} dv_0 < \int_{c'} dv_0 + \varepsilon$ lorsque la valeur à gauche est finie. Comme $u_p(P)$ et ses dérivées partielles tendent localement uniformément vers $u_0(P)$ et vers ses dérivées partielles respectivement, $\int_{c'} dv_0 = \lim_{p\to\infty} \int_{c'} dv_p = \lim_{p\to\infty} \int_{c_p'} dv_p \leqq$

$\lim_{p\to\infty}\int_{u_p(P)=u_0} dv_p = \lim_{p\to\infty} D_{\Delta_p}[u_p] = D_\Delta[u_0]$, où c'_p est la partie de la courbe de niveau $u_p(P) = u_0$ dont tout point est joint à un point de c' par une courbe $v_p(P) = \text{Cte}$. Donc $\int_{c(u_0)} dv_0 \leqq D_\Delta[u_0]$. On peut montrer par le même raisonnement que l'intégrale est toujours finie et donc toujours $\leqq D_\Delta[u_0]$. En considération de (3) vraie pour u_0 et v_0, on a $\int_{c(u_0)} dv_0 = D_\Delta[u_0]$ pour presque toute valeur de u_0, $0 < u_0 < 1$.

Ensuite on peut démontrer que la distance extrémale $\lambda\{\gamma\} = 1/D_\Delta[u_0]$. En effet, en considération de la répartition $\rho = 1$ par rapport à $u_0 + iv_0$, on déduit l'inégalité $\lambda\{\gamma\} \geqq 1/D_\Delta[u_0]$. Si ρ est une répartition en concurrence pour $\{\gamma\}$, représentée comme une fonction de $u_p + iv_p$ dans Δ_p, et si $\overline{\iint}_{\Delta_p} \rho^2 du_p dv_p < \infty$, on conclut que

$$0 \leqq \overline{\iint}_{\Delta_p} (\rho - 1)^2 du_p dv_p \leqq \overline{\iint}_{\Delta_p} \rho^2 du_p dv_p + D_{\Delta_p}[u_p] - 2\underline{\int} dv_p \underline{\int}_{v_p(P)=\text{Cte}} \rho du_p$$

$$\leqq \overline{\iint}_{\Delta_p} \rho^2 du_p dv_p - D_{\Delta_p}[u_p] \leqq \overline{\iint}_{\Delta} \rho^2 d\tau - D_{\Delta_p}[u_p],$$

d'où $D_{\Delta_p}[u_p] \leqq M\{\gamma\}$; on a utilisé le fait que toutes les trajectoires orthogonales $v_p(P) = \text{Cte}$, sauf au plus un nombre fini d'exceptions, des courbes de niveau de $u_p(P)$ sont des courbes joignant c_1 et c_2 dans Δ_p. Lorsque $p \to \infty$, il en résulte que $D_\Delta[u_0] \leqq 1/\lambda\{\gamma\}$. La comparaison avec l'inégalité inverse conduit à l'égalité.

Le cas où Δ est compact dans $\mathfrak{F}$ peut être traité très simplement.

Ainsi :

THÉORÈME 3. *Soient $\mathfrak{F}$ une surface de Riemann, c_1 et c_2 deux ensembles finis ou dénombrables de courbes régulières disjointes tels qu'ils forment la frontière, rélative à $\mathfrak{F}$, d'un ensemble ouvert Δ dans $\mathfrak{F}$, et $\mathfrak{U}$ l'ensemble des fonctions $\{u(P)\}$ harmoniques dans Δ telles que $\overline{\lim_{c_1}} u(P) \leqq 0$ et $\underline{\lim_{c_2}} u(P) \geqq 1$. Alors, quel que soit $u(P) \in \mathfrak{U}$, $v(P)$ étant la fonction conjuguée de $u(P)$, on a*

$$\int_0^1 \frac{du}{\int_{c(u)} dv} \leqq \frac{1}{\lambda\{c\}} = \lambda\{\gamma\},$$

où $\{c\}$ est la famille des systèmes de courbes dans Δ homologues à c_1, à une partie de la frontière idéale de Δ près, et $\{\gamma\}$ est la famille des courbes qui joignent c_1 et c_2 dans Δ ; $\lambda\{\gamma\}$ est la distance extrémale de c_1 et c_2 par rapport à Δ. De plus, il existe une fonction extrémale $u_0(P) \in \mathfrak{U}$ qui donne la valeur

maximum, égale à $\lambda\{\gamma\}$, à l'intégrale à gauche et dont l'intégrale de Dirichlet est égale à $\lambda\{c\}$.

5. On revient maintenant à la suite $\{D_n\}$ définie dans § 3 sur une surface de Riemann $\mathfrak{F}$, et à l'élément Ω défini par $\{D_n\}$. Désignons par $\{c^n\}$ la famille des systèmes de courbes dans $D_1 - D_n - c_n = \Delta_n$, homologues à c_1 à une partie de la frontière idéale de Δ_n près, par $\{\gamma^n\}$ la famille des courbes joignant c_1 et c_n dans Δ_n et par $\{\gamma\}$ la famille des courbes partant de c_1 et s'étendant vers Ω.[8] En vertu des propriétés a) et d) de longueur extrémale, $\lambda_\pi\{c^n\}$ est décroissante mais reste supérieure à $\lambda_\pi(\bigcup_n \{c^n\})$, et $\lambda_\pi\{\gamma^n\}$ est croissante mais reste inférieure à $\lambda_\pi\{\gamma\}$, où π est une fonction réelle non négative quelconque sur D_1. *On pose ici les questions si* $\lim_{n\to\infty} \lambda_\pi\{c^n\} = \lambda_\pi(\bigcup_n \{c^n\})$ *et si* $\lim_{n\to\infty} \lambda_\pi\{\gamma^n\} = \lambda_\pi\{\gamma\}$. On ne connait la réponse que dans le cas suivant très particulier.

THÉORÈME 4. *Soient $\mathfrak{F}$ une surface de Riemann, $\{D_n\}$ une suite décroissante d'ensembles ouverts de frontières relatives disjointes $\{c_n\}$, $\{c^n\}$ la famille des systèmes de courbes dans $D_1 - D_n - c_n = \Delta_n$ homologues à c_1, à une partie de la frontière idéale de Δ_n près, $\{\gamma^n\}$ la famille des courbes joignant c_1 et c_n dans Δ_n et $\{\gamma\}$ la famille des courbes partant de c_1 et s'étendant vers Ω que $\{D_n\}$ détermine. S'il existe une surface de Riemann $\mathfrak{F}^* \supset \mathfrak{F}$ telle que tout Δ_n soit relativement compact par rapport à $\mathfrak{F}^*$ et soit borné par un nombre fini de courbes régulières et si $\lambda\{c^2\} < \infty$, on a* $\lim_{n\to\infty} \lambda\{c^n\} = \lim_{n\to\infty} 1/\lambda\{\gamma^n\} = \lambda(\bigcup_n \{c^n\}) = 1/\lambda\{\gamma\}$.[9]

On désigne par γ_n la partie de la frontière de Δ_n dans $\mathfrak{F}^*$, différente de c_1 et de c_n. On prolonge Δ_n par symétrie le long de γ_n et note $\hat{\Delta}_n$ le double ainsi obtenu, et $\hat{c}_n$ le double de c_n. $\hat{\Delta}_n$ consiste d'un nombre fini de surfaces de Riemann.[10] La condition $\lambda\{c^n\} \leqq \lambda\{c^2\} < \infty$ montre que, sur $\hat{\Delta}_n$, $\hat{c}_1$ et $\hat{c}_n$ sont disjointes. Par conséquent, l'intégrale de Dirichlet de la mesure harmonique $\hat{\omega}_n(P)$ de $\hat{c}_n$ sur $\hat{\Delta}_n$ est finie. La restriction dans Δ_n de $\hat{\omega}_n(P)$ est égale à la fonction $u^{(n)}(P)$ harmonique bornée dans Δ_n, égale à 0 sur c_1 et à 1 sur c_n et ayant la dérivée normale qui s'annule sur γ_n. Par suite on voit facilement que $(\infty >)\ D_{\Delta_n}[u^{(n)}] \leqq D_{\Delta_n}[u]$ pour toute fonction $u(P)$ de la famille $\mathfrak{U}_n$ des fonctions $\{u(P)\}$ harmoniques dans Δ_n telles que $\overline{\lim_{c_1}} u(P) \leqq 0$ et $\underline{\lim_{c_2}} u(P) \geqq 1$. Parmi les fonctions de $\mathfrak{U}_n$, on a trouvé dans § 4 la fonction unique qui possède l'intégrale de Dirichlet minimale, égale à $\lambda\{c^n\} < \infty$. Cette fonction est donc

[8] Cela veut dire qu'il existe une suite de points sur γ qui converge vers Ω.

[9] On peut appeler $\lambda\{\gamma\}$ la distance extrémale de c_1 et Ω.

[10] Si la frontière d'une composante connexe δ de Δ_n ne contient aucune courbe composante de γ_n, on n'a pas de surface de Riemann qui est le double de δ. La modification pour ce cas est facile; on emploiera des terminologies, même dans ce cas, comme si δ possédait son double.

identique à $u^{(n)}(P)$. On pose $\Delta = \bigcup_n \Delta_n$ et $\hat{\Delta} = \bigcup_n \hat{\Delta}_n$. Soit $\hat{\Gamma}$ la partie de la frontière de $\hat{\Delta}$, différente de $\hat{c}_1$, et soit $\hat{\omega}(P)$ la mesure harmonique de $\hat{\Gamma}$ sur $\hat{\Delta}$. La restriction de $\hat{\omega}(P)$ dans Δ est égale à $u^0(P) = \lim_{n\to\infty} u^{(n)}(P)$. Si $u^0(P) \equiv 0$ sur Δ, $\lambda\{\gamma\} \geqq \lim_{n\to\infty} \lambda\{\gamma^n\} = \infty$ et $\lambda(\bigcup_n \{c^n\}) \leqq \lim_{n\to\infty} \lambda\{c^n\} = 0$. En supposant donc que $u^0(P) \not\equiv 0$, nous désignons par $v^0(P)$ la fonction conjuguée de $u^0(P)$ sur la partie $\Delta' \subset \Delta$ où $u^0(P)$ n'est pas constante. Or, il est connu (voir [2]) que sur le double $\hat{\Delta}'$ de Δ' presque toute la trajectoire orthogonale des courbes de niveau $\hat{\omega}(P) = \text{Cte}$ est une courbe partant de c_1 et convergeant vers $\hat{\Gamma}$ sur laquelle $\hat{\omega}(P) \to 1$. Comme $\hat{\Delta}'$ est symétrique, les trajectoires sont aussi symétriques par rapport à $\gamma_0 = \bigcup_n \gamma_n$, et presque toutes les trajectoires orthogonales convergent vers $\Re$ sur Δ'.

On note que $M\{\gamma\} < \infty$, puisque $\lambda\{\gamma\} \geqq \lambda\{\gamma^2\} > 0$. Etant donné $\varepsilon > 0$, soit ρ une répartition en concurrence pour $\{\gamma\}$ sur Δ telle que $\varepsilon + M\{\gamma\} \geqq \overline{\iint} \rho^2 du^0 dv^0$. Par l'inégalité de Schwarz, on a pour presque toute valeur de v^0, $0 < v^0 < \int_{c_1} dv^0$,

$$1 \leqq \Big(\int_{v^0=\text{Cte}} \rho du^0\Big)^2 \leqq \overline{\int} \rho^2 du^0 \int_0^1 du^0$$

et donc $\int_{c_1} dv^0 \leqq \overline{\iint} \rho^2 du^0 dv^0 \leqq M\{\gamma\} + \varepsilon$. D'après le théorème 3 $\lambda\{c^n\} = \int_{c_1} dv^{(n)}$ et ceci tend vers $\int_{c_1} dv^0$. ε étant arbitrairement petit, on a $\int_{c_1} dv^0 = \lim_{n\to\infty} \lambda\{c^n\} = \lim_{n\to\infty} 1/\lambda\{\gamma^n\} \leqq 1/\lambda\{\gamma\}$. La comparaison avec l'inégalité inverse $\lambda\{\gamma^n\} \leqq \lambda\{\gamma\}$ nous donne que $\lim_{n\to\infty} \lambda\{c^n\} = \lim_{n\to\infty} 1/\lambda\{\gamma^n\} = 1/\lambda\{\gamma\}$. Comme $\rho = 1\Big/\int_{c_1} dv^0$ est une répartition en concurrence pour $\bigcup_n \{c^n\}$ par rapport à $u^0 + iv^0$, $1/\lambda(\bigcup_n \{c^n\}) \leqq \iint \rho^2 du^0 dv^0 = 1\Big/\int_{c_1} dv^0 = \lambda\{\gamma\}$. L'inégalité inverse $1/\lambda\{\gamma\} = \lim_{u\to\infty} \lambda\{c^n\} \geqq \lambda(\bigcup_n \{c^n\})$ est déjà connue et il en résulte toutes les égalités. Ainsi le théorème est démontré.

COROLLAIRE 1. *Soit D un domaine sur une surface de Riemann $\mathfrak{F}$, borné par un nombre fini ou dénombrable de courbes régulières non s'accumulant sur $\mathfrak{F}$. Alors la surface symétrique $\hat{D}$ est parabolique si et seulement si la distance extrémale, par rapport à D, d'un ensemble compact, borné par une courbe dans D, et la frontière idéale de D est infinie.*

En particulier,

COROLLAIRE 2. *Une surface de Riemann $\mathfrak{F}$ est parabolique si et seulement si la distance extrémale d'un ensemble compact borné par une courbe dans $\mathfrak{F}$ et*

la frontière idéale de $\mathfrak{F}$ *est infinie.*[11]

6. On va étudier plus profondément des représentations paraboliques ($\mathfrak{E}_{\mathfrak{R}}$) définies dans [A].

D'abord il s'agit de la définition générale de transformations quasi-conformes, due à Pfluger [6] et Ahlfors [1].[12] Soit $T(z)$ un homéomorphisme d'un domaine D du plan $z=x+iy$ sur un domaine G du plan $w=u+iv$. On appelle un domaine de Jordan avec quatre points z_1, z_2, z_3 et z_4 différents marqués sur la frontière un *quadrilatère* et chacune de quatre parties entre z_1, z_2, z_3 et z_1 un *côté*. Le *module* Mod (Q) d'un quadrilatère $Q=(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est défini par la distance extrémale de deux côtés z_1z_2 et z_3z_4. On suppose que, quel que soit un domaine D' relativement compact par rapport à D, $\sup_Q$ [Mod (Q)/Mod $(T(Q))$] $=K(D')<+\infty$ pourtout qu adrilatère Q dans D'. On pose $K(z)=\inf_{z\in D'} K(D')$. Il est facile de généraliser la définition au cas où un homéomorphisme d'une surface de Riemann sur une autre est donné. Pour $T(z)=u(z)+iv(z)$ défini ci-dessus dans D, Mori [4] a démontré que

i) $T(z)$ est totalement dérivable presque partout dans D;

ii) en chaque point z, où $T(z)$ est totalement dérivable, on a

$$\max_{0\leqq\theta\leqq 2\pi} |D_\theta w|^2 \leqq K(z)|J(z)|;$$

iii) pour presque toute valeur $y=y_0$, $T(x, y_0)$ est une fonction abosolument continue de x sur l'intersection de la ligne $y=y_0$ et de D.

Maintenant on s'occupe du cas où l'application est non nécessairement univalente, comme dans §1 de [A]. Soit $f(\tilde{P})$ une application continue, dans une surface de Riemann $\mathfrak{R}$,[13] d'un nombre fini ou dénombrable de surfaces de Riemann $\tilde{\mathfrak{F}}$. Soit $\tilde{E}$ un ensemble fermé dont l'image $\underline{E}$ par $f(\tilde{P})$ est de mesure linéaire nulle dans $\mathfrak{R}$. Supposons que la restriction de $f(\tilde{P})$ à $\tilde{\mathfrak{F}}-\tilde{E}$ soit une transformation intérieure au sens de Stoïlow. On définira un espace topologique $\mathfrak{F}^*$ comme suivant. On fait correspondre $(\tilde{P}, f(\tilde{P}))$ à $\tilde{P}\in\tilde{\mathfrak{F}}-\tilde{E}$ et $(\tilde{E}_\alpha, f(\tilde{E}_\alpha))$ à une composante connexe $\tilde{E}_\alpha$ de $\tilde{E}$; nous considérons ces couples comme les points de $\mathfrak{F}^*$; comme $f(\tilde{P})$ est continue et $f(\tilde{E})=\underline{E}$ est totalement discontinue dans $\mathfrak{R}$, $f(\tilde{E}_\alpha)$ est toujours un point. On définit un voisinage $V(\tilde{V})$ de $(\tilde{P}_0, f(\tilde{P}_0))$ par $\{(\tilde{P}, f(\tilde{P}))$; $\tilde{P}\in$ un voisinage $\tilde{V}$ de $\tilde{P}_0\}$ et un voisinage $V(\tilde{V}')$ de $(\tilde{E}_\alpha, f(\tilde{E}_\alpha))$ par $\{(\tilde{P}, f(\tilde{P}))$ ou $(\tilde{E}_\beta, f(\tilde{E}_\beta))$; $\tilde{P}$ ou $\tilde{E}_\beta$ est compris dans un ensemble ouvert $\tilde{V}'\supset\tilde{E}_\alpha$, dont la frontière est disjointe de toute composante de $\tilde{E}\}$. Les voisinages $V(\tilde{V})$ et $V(\tilde{V}')$ engendrent les ensembles des voisinages

11) Voir [7] à ce propos.

12) Pour la définition générale de transformations quasi-conformes, voir aussi [4], [10], [11].

13) On change certaines des notations dans [A]; par exemple $\underline{\mathfrak{R}}$ correspond à $\mathfrak{R}$ dans [A], $\underline{E}$ à E, $\tilde{\mathfrak{F}}$ à $\tilde{G}$, etc.

des points de $\mathfrak{F}^*$ et donc une topologie est définie sur $\mathfrak{F}^*$.[14] En définissant des paramètres locaux sur la partie $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{F}^*$ correspondant à $\tilde{\mathfrak{F}} - \tilde{E}$ à la manière usuelle, $\mathfrak{F}$ devient un nombre fini ou dénombrable de surfaces de Riemann comme des surfaces de recouvrement de $\mathfrak{R}$. La correspondance $g(\tilde{P}) : \tilde{P} \to (\tilde{P}, f(\tilde{P}))$ lorsque $\tilde{P} \in \tilde{\mathfrak{F}} - \tilde{E}$, et $\tilde{P} \to (\tilde{E}_\alpha, f(\tilde{E}_\alpha))$ lorsque $\tilde{P} \in \tilde{E}_\alpha$, est une application continue de $\tilde{\mathfrak{F}}$ sur $\mathfrak{F}^*$, et la correspondance $H(P^*) : P^* = (\tilde{P}, f(\tilde{P})) \to f(\tilde{P})$ ou $P^* = (\tilde{E}_\alpha, f(\tilde{E}_\alpha)) \to f(\tilde{E}_\alpha)$ est aussi une application continue de $\mathfrak{F}^*$ dans $\mathfrak{R}$.

Supposons que la restriction de $f(\tilde{P})$ à $\tilde{\mathfrak{F}} - \tilde{E}$ soit une fonction localement pseudo-analytique au sens de Pfluger-Ahlfors; c'est-à-dire que la restriction de $g(\tilde{P})$ à $\tilde{\mathfrak{F}} - \tilde{E}$ satisfasse à la condition que nous venons de poser sur $T(z)$.

Soit $\{\underline{D}_n\}$ une suite décroissante d'ensembles ouverts dans $\mathfrak{R}$ de frontières relatives $\{\underline{c}_n\}$ telles que chaque $\underline{c}_n$ se compose d'un nombre fini ou dénombrable de courbes régulières et $\underline{c}_1 \cap \underline{c}_n = \phi$ pour tout $n \geqq 2$, et soit $\underline{\mathfrak{L}}$ l'élément déterminé par $\{\underline{D}_n\}$. On suppose que les images réciproques $\{c_n\}$ de $\{\underline{c}_n\}$ soient situées dans $\mathfrak{F}$; c'est-à-dire que $\{\underline{c}_n\}$ et $\underline{E}$ soient disjoints. Soit $\underline{u}_n(\underline{P})$ une fonction harmonique dans $\underline{D}_1 - \underline{D}_n - \underline{c}_n$ telle que $\overline{\lim_{\underline{c}_1}} \underline{u}_n(\underline{P}) \leqq 0$ et $\underline{\lim_{\underline{c}_n}} \underline{u}_n(\underline{P}) \geqq 1$, et $c(\underline{u}_n)$ la courbe de niveau $\underline{u}_n(\underline{P}) = \text{Cte}$ $\underline{u}_n$, $0 < \underline{u}_n < 1$. On pose $u_n(P^*) = \underline{u}_n(H(P^*))$ et $c(u_n) = H^{-1}(c(\underline{u}_n))$ et on désigne par C_n la famille des $c(u_n)$ situées dans $\mathfrak{F}$; $c(\underline{u}_n)$ est disjointe de $\underline{E}$ pour presque toute valeur de $\underline{u}_n$, puisque $\underline{E}$ est de mesure linéaire nulle. Soit C'_n la sous-famille de C_n dont sur chaque élément $c(u_n)$, la restriction de $g^{-1}(P)$ à $\mathfrak{F}$ est totalement dérivable et absolument continue; par les propriétés i) et iii), $c(u_n) \in C'_n$ pour presque toute valeur de u_n. Si $q(P)$ désigne le quotient de dilatation de $g^{-1}(P)$ défini dans $\mathfrak{F}$ comme dans e) de § 2, la condition

$$\int_0^1 \frac{du_n}{\int_{c(u_n) \in C_n} q dv_n} \to \infty \qquad \text{avec } n, \tag{4}$$

entraîne le fait: $\lambda_{1/q}(C'_n) \to 0$ d'après le théorème 2, où $v_n(P)$ est la fonction conjuguée de $u_n(P)$ définie sur $\mathfrak{F}$.

Or, on appellera une représentation continue $f(\tilde{P})$ de $\tilde{\mathfrak{F}}$ dans $\mathfrak{R}$, *parabolique* $(\underline{\mathfrak{L}})$ si elle est localement pseudo-analytique au sens de Pfluger-Ahlfors en dehors d'un ensemble $\tilde{E}$ fermé, ayant l'image $\underline{E}$ de mesure linéaire nulle, et s'il existe une suite $\{\underline{D}_n\}$ déterminant $\underline{\mathfrak{L}}$[15] telle que $f(\tilde{\mathfrak{F}}) \cap \underline{c}_1 \neq \phi$ et $\{\underline{u}_n(\underline{P})\}$, harmoniques dans $\underline{D}_1 - \underline{D}_n - \underline{c}_n$ telle que $\overline{\lim_{\underline{c}_1}} \underline{u}_n(\underline{P}) \leqq 0$ et $\underline{\lim_{\underline{c}_n}} \underline{u}_n(\underline{P}) \geqq 1$, qui remplissent la condition suivante, visiblement équivalente à (4):

$$\int_0^1 \frac{d\underline{u}_n}{\int \tilde{q} d\underline{v}_n} \to \infty \qquad \text{avec } n, \tag{5}$$

---

[14] On peut prouver que cette topologie est séparée.

[15] On dit que deux suites déterminent le même $\underline{\mathfrak{L}}$ si elles engendrent le même filtre.

où $\tilde{q}$ est le quotient de dilatation de $f(\tilde{P})$ réduite à $\tilde{\mathfrak{F}} - \tilde{E}$ et, $\underline{v}_n(\underline{P})$ étant la fonction conjuguée de $\underline{u}_n(\underline{P})$, l'intégrale $\int \tilde{q} d\underline{v}_n = \int \tilde{q}(\tilde{P}) d\underline{v}_n(f(\tilde{P}))$ est prise sur l'image réciproque de $c(\underline{u}_n)$, qui est un système de courbes pour presque toute valeur de $\underline{u}_n$, $0 < \underline{u}_n < 1$; on note que $\tilde{q}(\tilde{P})$ est égal à $q(P)$ en points correspondants. Une représentation parabolique $(\mathfrak{E}_{\mathfrak{R}})$ dans [A] peut s'interpréter comme une telle représentation.

Ainsi on est arrivé à la position de pouvoir généraliser le théorème 1 de [A].

THÉORÈME 5. *Soit $\mathfrak{R}$ une surface de Riemann et soit $f(z)$ une représentation parabolique $(\mathfrak{L})$ dans $\mathfrak{R}$ d'un domaine G du plan z, de la forme: $0 < x < 1$, $0 < y < h(x) \leqq \infty$. Si pour chaque valeur x d'un sous-ensemble X de l'intervalle $0 < x < 1$, on a $h(x) < \infty$ et s'il existe une suite $y_p \to h(x)$ telle que $f(x + iy_p)$ tende vers $\mathfrak{L}$ lorsque $p \to \infty$ pour tout $x \in X$, alors $m(X) = 0$.*

En effet, si $f(x + iy_p) \to \mathfrak{L}$ l'image $g(x + iy_p)$ sur $\mathfrak{F}^*$, définie ci-dessus, tend vers $\mathfrak{L}$ que $\{D_n\}$, où $D_n = H^{-1}(\underline{D}_n)$, détermine. Nous avons vu que (4), équivalente à (5), entraîne $\lambda_{1/q}(C_n) \to 0$, d'où on conclut $m(X) = 0$ par le théorème 1.

7. Une fois la généralisation du théorème 1 de [A] étant obtenue, les théorèmes 2, 3, 4 et 7 de [A] peuvent être généralisés pour des représentations paraboliques $(\mathfrak{L})$; ici on ne les énonce pas. Cependant, on s'intéresse à la généralisation du théorème 5 de [A].

Dans le cas particulier où $\mathfrak{L}$ peut être identifié à un point sur une surface de Riemann, la condition (5) est locale et écrite au moyen d'un paramètre local: soit en ω. On pose $\underline{D}_n = \{|\omega| < 1/n\}$ et $\underline{c}_n = \{|\omega| = 1/n\}$; l'intégrale dans (5) s'écrit $\int_{1/n}^{1} \frac{dt}{\int qtd\varphi}$ $(\omega = te^{i\varphi})$, où l'intégrale du dénominateur est égale à la longueur totale de densité q des courbes sur $\mathfrak{F}$ situées au-dessus de $|\omega| = t$, et elle sera notée $\lambda(t)$.[16] L'intégrale $\int_0^t \int qtd\varphi dt = \int_0^t \lambda(t)\, dt$ est égale à l'aire de densité q de la partie de $\mathfrak{F}$, qui se projette dans $|\omega| < t$; on la désignera par $S(t)$.

Soit $1 > t_1 > t_1' \geqq t_2 > t_2' \geqq t_3 \ldots \to 0$. Par l'inégalité de Schwarz on a

$$(t_\nu - t_\nu')^2 = \left(\int_{t_\nu'}^{t_\nu} dt\right)^2 \leqq \int_{t_\nu'}^{t_\nu} \lambda dt \int_{t_\nu'}^{t_\nu} \frac{dt}{\lambda} = \{S(t_\nu) - S(t_\nu')\} \int_{t_\nu'}^{t_\nu} \frac{dt}{\lambda}.$$

Donc

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(t_\nu - t_\nu')^2}{S(t_\nu) - S(t_\nu')} \leqq \int_0^1 \frac{dt}{\lambda}. \tag{6}$$

[16] Cela n'est pas la longueur extrémale.

Si on peut choisir t_ν et t'_ν tels que la série à gauche diverge, la condition (5) sera satisfaite. Il en est ainsi lorsque $t'_\nu/t_\nu < \kappa < 1$ et $\sum_{\nu=1}^{\infty} t_\nu^2/S(t_\nu) = \infty$. Ceci est vrai si $\lim_{t\to 0} S(t)/t^2 < \infty$ comme dans le théorème 5 de [A]; en effet, prenant $t_1 > t'_1 = \frac{t_1}{2} \geqq t_2 > t'_2 = \frac{t_2}{2} \geqq \ldots$ tels que $S(t_\nu)/t_\nu^2 < K < \infty$, on a $\sum_{\nu=1}^{\infty} t_\nu^2/S(t) > \sum_{\nu=1}^{\infty} 1/K = \infty$. D'autre part Pfluger [7] a démontré récemment que si $\omega = f(\zeta)$ est une fonction non constante méromorphe dans $|\zeta| < 1$, si l'aire sphèrique de son image est finie et si $S(t) = o(t^2 \log 1/t)$, alors l'ensemble des points sur $|\zeta| = 1$ où $\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = 0$ $(\zeta = re^{i\theta})$ est de capacité logarithmique (extérieure) nulle. Le théorème 6 montrera que l'aire sphèrique n'en faut pas être finie et qu'on peut améliorer sa condition sur $S(t)$ en la remplaçant par $S(t) = O(t^2 \log 1/t)$. On note que, si on pose $t_\nu = t'_{\nu-1} = e^{-\nu}$, on a $t'_\nu/t_\nu = e^{-1}$ et $\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-2\nu}/S(e^{-\nu}) \geqq \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu} = \infty$, où M est une constante finie telle que $S(t) \leqq Mt^2 \log 1/t$. On peut encore relâcher la condition: $S(e^{-\nu}) = 0(e^{-\nu}h(\nu))$ avec $h(\nu) > 0$ tel que $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/h(\nu) = \infty$. Cependant, aucune de cette condition et la condition $\lim_{t\to 0} S(t)/t^2 < \infty$ n'entraîne l'autre.

On énonce une généralisation du théorème 5 de [A] comme suivant:

THÉORÈME 6. *Soit $f(\zeta)$ une fonction non constante continue définie dans U_ζ; $|\zeta| < 1$ et prenant des valeurs sur une surface de Riemann $\mathfrak{R}$. On suppose de plus que $f(\zeta)$ soit une représentation localement pseudo-analytique au sens de Pfluger-Ahlfors en dehors d'un ensemble E_ζ fermé dans U_ζ ayant l'image $\underline{E}$ dans $\mathfrak{R}$ de mesure linéaire nulle. On désigne par $S(t)$ l'aire euclidienne de densité q, égale au quotient de dilatation, de la partie des surfaces de Riemann homéomorphes à $U_\zeta - E_\zeta$, qui se projette dans le cercle $|\omega| < t < 1$, où ω est un paramètre local fixé tel que $\omega = 0$ corresponde à $\underline{P} \in \mathfrak{R}$. Si on peut choisir $1 > t_1 > t'_1 \geqq t_2 > t'_2 \geqq t_3 \ldots \to 0$, tels que la série à gauche dans (6) diverge, l'ensemble des valeurs sur $|\zeta| = 1$ où $\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = \underline{P}$ $(\zeta = re^{i\theta})$ est de capacité logarithmique (extérieure) nulle.*

La même idée que dans la démonstration du théorème 5 de [A] s'appliquera si le lemme suivant est établit; on n'a pas besoin de supprimer $\underline{P}$ de $\mathfrak{R}$, ce que nous avons fait dans [A], puisque $\underline{\infty}$ peut être identifié à un point intérieur de $\mathfrak{R}$ dans le présent mémoire.

LEMME 4. *Sous les conditions dans le théorème 6, si $f(\zeta)$ a la limite $\underline{P}$ radialement à un point $e^{i\theta}$, l'image de toute courbe aboutissant à $e^{i\theta}$ dans U_ζ s'étend vers $\underline{P}$.*

Soit $|\omega|<1$ un cercle paramétrique, où $\omega=0$ correspond à $\underline{P}$. Supposons qu'il existe une courbe l dans U_ζ aboutissant à $e^{i\theta}$ et disjointe au rayon $\overline{Oe^{i\theta}}$ telle que son image $f(\zeta)$ se trouve hors $|\omega|<1$. Nous représentons U_ζ par $\log(1-\zeta e^{-i\theta})$ sur un domaine dans le plan $w=u+iv$. L'image B est placée entre les droites $v=-\frac{\pi}{2}$ et $v=\frac{\pi}{2}$, et le rayon $\overline{Oe^{i\theta}}$ correspond à $0<u<\infty$. On divise B en parties se trouvant dans les bandes $0<u<1$, $1<u<2$, ... et désigne par B_p la partie dans $p<u<p+1$; B_p est comprise dans le rectangle $p<u<p+1$, $-\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$. Si p est suffisamment grand, l'image dans $\mathfrak{R}$ du segment $p<u<p+1$ est située dans un voisinage $|\omega|<1/n$ de $\underline{P}$. L'image $\gamma(t)$ dans B_p de $|\omega|=t$ existe pour presque toute valeur t de $1/n<t<1$, et la longueur de toute $\gamma(t)$ est $\geqq 1$, puisque $\gamma(t)$ se coupe tous les segments, joignant l'axe des u et l'image $w(l)$ et parallèles à l'axe des v. Donc la longueur extrémale de $\{\gamma(t)\}\geqq 1/\pi$. Mais comme on l'a vu, la condition (6) montre que la longueur extrémale de poids $1/q$ de la famille des systèmes de courbes sur les surfaces de recouvrement, se projetant sur $|\omega|=t$, $1/n<t<1$, tend vers 0 lorsque $n\to\infty$. La propriété e) dans § 2 conduit à une contradiction.

On peut étendre le théorème 6 de [A] à la même manière. L'idée de la démonstration du lemme 4 sera reprise pour généraliser un théorème de Lindelöf dans un mémoire sous préparation.

Enfin je signale que j'ai l'intention de prendre d'autres occasions pour examiner les résultats dans §§ 8-9 de [A] et améliorer les résultats sur les ensembles d'accumulation obtenus dans [5].

Addenda: après avoir complété ce mémoire, le travail suivant a été publié, qui est étroitement lié à nos §§ 4-5:

K. Strebel: Die extremale Distanz zweier Enden einer Riemann'schen Fläche, Ann. Acad. Sci. Fenn., A.I., (1955), no. 179, 21 pp.

Bibliographie

[1] L. Ahlfors: On quasi conformal mappings, Journ. D'Anal. Math., **3** (1953-54), pp. 1-58; Corrections, pp. 207-208.

[2] M. Brelot et G. Choquet: Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier, **3** (1952), pp. 199-263.

[3] J. Hersch: Longueurs extrémales et théorie des fonctions, Comment. Math. Helv., **29** (1955), pp. 301-337.

[4] A. Mori: On quasi-conformality and pseudo-analyticity, à paraître.

[5] M. Ohtsuka: Sur les ensembles d'accumulation relatifs à des transformations plus générales que les transformations quasi-conformes, Ann. Inst. Fourier, **5** (1955), pp. 29-37.

[6] A. Pfluger: Quelques théorèmes sur une classe de fonctions pseudo-analytiques, C. R. Acad. Sci. Paris, **231** (1950). pp. 1022-1023.

[7] A. Pfluger: Extremallängen und Kapazität, Comment. Math. Helv., **29** (1955), pp. 120-131.

[8] T. Radó: Length and area, New York (1948).
[9] S. Saks: Theory of the integral, Varsovie (1937).
[10] Z. Yûjôbô: On pseudo-regular functions, Comment. Math. Univ. St. Pauli, **1** (1953), pp. 67-80.
[11] Z. Yûjôbô: On absolutely continuous functions of two or more variables in the Tonelli sense and quasi-conformal mappings in the A. Mori sense, ibid.. **4** (1955).

Institut de Mathématiques
Université de Nagoya