SUR UNE CONJECTURE DE KRULL EN THEORIE DES VALUATIONS

P. RIBENBOIM*

Dans cette note, nous étudions les anneaux d'integrité primaires et complètement intégralement clos. Krull [1] a posé la question suivante: est-ce qu'un anneau d'integrité primaire et complètemente intégralement clos est nécéssairement un anneau de valuation?

Nagata [2] a répondu à cette question par la négative, en exhibant un exemple d'anneau d'integrité primaire, complètement intégralement clos, mais non de valuation. La démonstration que l'anneau de son exemple possédait effectivement les propriétés indiquées présentait néanmoins des lacunes non triviales à remplir. Ainsi, l'auteur a dedié une note [3] à l'élucidation de ces derniers points et à l'établissement de quelques propriétés plus précises satisfaites par cet anneau.

Malgré cette réponse négative à la conjecture de Krull, on pourrait néanmoins chercher des conditions supplémentaires pour qu'un anneau d'integrité primaire, complètement intégralement clos, soit un anneau de valuation. Ces conditions portent sur la structure de l'idéal premier unique de l'anneau et ont nature topologique.

Il est bien connu que si A est un anneau d'integrité avec unité, ayant un seul idéal premier $\mathfrak{p}$ non trivial qui est principal, alors A est l'anneau d'une valuation discrète. Nous remplaçons le fait que $\mathfrak{p}$ soit principal par la condition moins forte "$\mathfrak{p}$ est la réunion d'une suite croissante d'idéaux principaux" et determinons des conditions sur des telles suites pour assurer que A soit un anneau de valuation. Ces conditions font intervenir la notion de puissance à exposant réel d'un idéal principal, qui avait été déjà considérée dans un cas distinct par Samuel [4].

La Proposition 1 n'est rien d'autre qu'un cas particulier d'un théorème récemment obtenu par Krull [5]. La Proposition 1 est employée pour la démonstration de la Proposition 2, qui dit: soit A un anneau d'integrité primaire,

Received July 1, 1955.

* Boursier du Conselho Nacional de Pesquizas, Rio de Janeiro, Brasil.

complètement intégralement clos, dont l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est la réunion d'une suite croissante d'idéaux principaux At_r ; si tout idéal principal de A est "asymptotiquement" une puissance (à exposant *réel*) des idéaux At_r (dans un sens qui sera précisé) alors A est un anneau de valuation.

Quant à la Proposition 3, elle dit en gros: si, avec les hypothèses précedentes, la suite (At_r) est "bien choisie" de façon que

(C) la suite a une "largeur" nulle

(D) elle définit une topologie rendant continue la multiplication d'idéaux principaux,

alors A est un anneau de valuation.

Naturellement, toutes les conditions indiquées sont aussi nécéssaires pour que A soit un anneau de valuation.

Nous terminons l'article en faisant des commentaires qui montrent en particulier que les conditions introduites sont naturelles et d'aucune façon superabondantes.

§ 1. Rappel des définitions et résultats

Tous les anneaux considérés sont supposés des anneaux d'intégrité avec unité. Parmi les idéaux premiers, on exclut l'idéal nul et l'anneau lui-même.

Si K est le corps des fractions de l'anneau A, un élément $x \in K$ est dit *presque entier* sur A quand il possède la propriété suivante: il existe $a \in K$, non nul, tel que $ax^n \in A$ quelque soit n entier positif. Un anneau A est *complètement intégralement clos* quand il contient tous les éléments presque entiers sur A. Tout anneau complètement intégralement clos est intégralement clos, mais non réciproquement.

Un anneau (d'intégrité avec unité) A est dit *primaire* quand il possède un seul idéal premier $\mathfrak{p}$; alors, le complémentaire de $\mathfrak{p}$ dans A est l'ensemble des éléments inversibles (unités) de l'anneau A. En outre, tout idéal non trivial est un idéal primaire associé à $\mathfrak{p}$; en particulier, donnés $a, b \in \mathfrak{p}$, il existe un entier positif n tel que $a^n \in Ab$.

Toutes les valuations considérées sont supposées non triviales et de rang 1, c'est-à-dire, à valeurs réelles. Alors A_w est l'anneau d'une valuation w de K si et seulement si K est le corps des fractions de A_w, lequel est un sousanneau maximal de K, distinct de K.

Pour la définition d'une valuation w d'un corps K il suffit de determiner une fonction w_0 à valeurs réelles, d'un sous-anneau A de K ayant corps des fractions K, et telle que:

$$w_0(ab) = w_0(a) + w_0(b), \quad w_0(a+b) \geqq \min\{w_0(a), w_0(b)\} \quad \text{quand} \quad a, b \in A.$$

Si on pose, pour tout $x = \frac{a}{b} \in A$ (avec $a, b \in A$, $b \neq 0$) $w\left(\frac{a}{b}\right) = w_0(a) - w_0(b)$, alors w est une valuation de K, dont la restriction à A est w_0.

Tout anneau de valuation (de rang 1) est complètement intégralement clos, néanmoins, il est faux que tout anneau complètement intégralement clos soit l'intersection d'anneaux de valuations [6]. Krull [1] a pourtant demontré, et nous en ferons usage, que si A est primaire et complètement intégralement clos, alors il est intersection d'anneaux de valuations.

§ 2. Notions préliminaires

Soit A un anneau primaire, $\mathfrak{p}$ son idéal premier, K son corps des fractions.

LEMME 1. *Si* $t \in \mathfrak{p}$ *alors* $\bigcap_{n=1}^{\infty} At^n = (0)$.

Notons $u = t^{-1}$; il suffira de montrer que $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} Au^n$, car alors $(0) = A : K = A : (\bigcup_{n \geqq 1} Au^n) = \bigcap_{n \geqq 1} (A : Au^n) = \bigcup_{n \geqq 1} At^n$.

Soit $B = \bigcup_{n \geqq 1} Au^n$; on a $A \subseteqq B \subseteqq K$, B est un anneau contenant $u = t^{-1}$; si $a \in A$, $a \neq 0$, et si m est un entier tel que $t^m \in Aa$ alors $a^{-1} \in Au^m \subseteqq B$, donc $B = K$.

Remarquons que ce lemme est encore valable pour des idéaux $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ de type fini contenus dans $\mathfrak{p}$, car donné $t \in \mathfrak{p}$, non nul, il existe des entiers q_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), positifs, tels que $a_i^{q_i} \in At$, donc il existe un entier $q > 0$ tel que $\mathfrak{a}^q \subseteqq At$ et alors on a $\bigcap_{n \geqq 1} \mathfrak{a}^n = (0)$.

De la démonstration du lemme, il résulte:

COROLLAIRE. *Si B est un sous-anneau de K, contenant A et s'il existe un élément $t \in \mathfrak{p}$, non nul, tel que $t^{-1} \in B$ alors $B = K$.*

Donnés les éléments $a \in K$, $a \neq 0$, et $t \in \mathfrak{p}$, $t \neq 0$, nous allons définir des nombres entiers et des nombres réels qui leur sont associés et qui joueront un important rôle dans cette note.

Soit $m_t(a)$ le plus grand des entiers m (positifs ou négatifs) tels que

$Aa \subseteqq At^m$ (l'existence de $m_t(a)$ résulte du Lemme 1, car $K = \bigcup_{m \geqq 1} At^{-m}$ et $(0) = \bigcap_{m \geqq 1} At^m$).

De même, soit $n_t(a)$ le plus petit des entiers n (positifs ou négatifs) tels que $At^n \subseteqq Aa$; si $a \in A$, l'existence de $n_t(a)$ est triviale, si par contre $a = \frac{a_1}{a_2} \notin A$ (avec $a_1, a_2 \in A$) alors $a_1 \neq 0$ et si $n \geqq 0$ est un entier tel que $t^n \in Aa_1$ alors $a_2 t^n \in Aa_1$ donc $At^n \subseteqq Aa$ et l'existence de $n_t(a)$ découle de $K = \bigcup_{n \geqq 1} At^{-n}$.

On a $m_t(a) \leqq n_t(a)$; si $a \in A$, $a \notin \mathfrak{p}$, alors $m_t(a) = n_t(a) = 0$; si $a \in \mathfrak{p}$, alors $0 \leqq m_t(a)$, $0 < n_t(a)$, et enfin $Aa \subseteqq At$ équivaut à $0 < m_t(a)$.

Supposons désormais que A soit un anneau *intégralement clos.*

Soit $E_t(a) = \left\{ \frac{m}{n} \middle| Aa^n \subseteqq At^m \right\}$, $F_t(a) = \left\{ \frac{m}{n} \middle| At^m \subseteqq Aa^n \right\}$ (nous conventionnons que les fractions $\frac{m}{n}$ sont toujours telles que $n > 0$, le numérateur pouvant avoir signe quelconque).

LEMME 2. (i) *Si* $\frac{m}{n} \in E_t(a)$ *et* $\frac{p}{q} < \frac{m}{n}$ *alors* $\frac{p}{q} \in E_t(a)$.

(ii) *Si* $\frac{m}{n} \in F_t(a)$ *et* $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ *alors* $\frac{p}{q} \in F_t(a)$.

(iii) *Si* $\frac{m}{n} \in E_t(a)$ *et* $\frac{p}{q} \in F_t(a)$ *alors* $\frac{m}{n} \leqq \frac{p}{q}$.

(i) Si $\frac{m}{n} \in E_t(a)$ et $\frac{p}{q} < \frac{m}{n}$ alors $Aa^n \subseteqq At^m$ donc $Aa^{qn} \subseteqq At^{qm}$ (car $q > 0$); or, de $pn < qm$ il résulte que $At^{qm} \subseteqq At^{pn}$ donc $Aa^{qn} \subseteqq At^{pn}$ et puisque A est intégralement clos et $n > 0$, on conclut que $Aa^q \subseteqq At^p$, c'est-à-dire, $\frac{p}{q} \in E_t(a)$. (ii) se démontre analoguement. (iii) Si $\frac{m}{n} \in E_t(a)$, $\frac{p}{q} \in F_t(a)$, alors $Aa^n \subseteqq At^m$, $At^p \subseteqq Aa^q$; de $q > 0$ et $n > 0$ il vient $Aa^{nq} \subseteqq At^{mq}$, $At^{pn} \subseteqq Aa^{nq}$, c'est-à-dire, $At^{pn} \subseteqq At^{mq}$ d'où $pn \geqq mq$ et $\frac{m}{n} \leqq \frac{p}{q}$.

Si on note $\mu_t(a) = \sup E_t(a)$, $\nu_t(a) = \inf F_t(a)$, alors $-\infty < \mu_t(a) \leqq \nu_t(a) < +\infty$, car $m_t(a) \in E_t(a)$, $n_t(a) \in F_t(a)$. Si $a \in A$, $a \notin \mathfrak{p}$, on a $\mu_t(a) = \nu_t(a) = 0$; si $a \in \mathfrak{p}$ *alors* $0 < \mu_t(a)$ (car si $q > 0$ est un entier tel que $Aa^q \subseteqq At$ alors $0 < \frac{1}{q} \in E_t(a)$, donc $0 < \mu_t(a)$). Remarquons qu'en général on peut avoir $\mu_t(a) \neq \nu_t(a)$.

LEMME 3. *Soit s un nombre réel $a, a' \in K$, $t \in \mathfrak{p}$, des éléments non nuls tels que $\mu_t(a) = \nu_t(a) = s$ et $\mu_t(a') = \nu_t(a') = s$. Alors $Aa = Aa'$.*

En effet, soit $\Omega=(w)$ une famille de valuations de K telles que $A=\bigcap_{w\in\Omega} A_w$ (car A est intégralement clos). Si $\frac{m}{n}\in E_t(a)$, $\frac{p}{n}\in F_t(a)$ (où $n>0$) alors $At^p\subseteqq Aa^n\subseteqq At^m$, donc $\frac{p}{n}w(t)\geqq w(a)\geqq\frac{m}{n}\cdot w(t)$; cela entraîne $\nu_t(a)\cdot w(t)\geqq w(a)\geqq\mu_t(a)\cdot w(t)$, donc $w(a)=s\cdot w(t)$ quelle que soit $w\in\Omega$. De même, $w(a')=s\cdot w(t)$, donc $w(a)=w(a')$ quelle que soit $w\in\Omega$, et alors $Aa=Aa'$.

COROLLAIRE. *$Aa=At$ équivaut à $\mu_t(a)=\nu_t(a)=1$.*

Le Lemme 3 permet de définir une opération de potentiation à exposants réels. Si $t\in\mathfrak{p}$, $t\neq 0$, on pose $Aa=(At)^s$ (où s est un nombre réel de signe quelconque) quand on a $\mu_t(a)=\nu_t(a)=s$. Remarquons que cette opération n'est pas nécéssairement partout définie.

LEMME 4. *Si s_1, s_2, s sont des nombres réels strictement positifs, si $a, b\in\mathfrak{p}$, non nuls, alors:*

(i) *si $s_1\leqq s_2$ et si $(Aa)^{s_1}$, $(Aa)^{s_2}$ existent alors $(Aa)^{s_1}\supseteqq(Aa)^{s_2}$*

(ii) *si $(Aa)^{s_1}$, $(Aa)^{s_1s_2}$ existent, alors $((Aa)^{s_1})^{s_2}$ existe et on a $((Aa)^{s_1})^{s_2}=(Aa)^{s_1s_2}$*

(iii) *si $(Aa)^{s_1}$, $(Aa)^{s_2}$ existent, alors $(Aa)^{s_1+s_2}$ existe et on a $(Aa)^{s_1+s_2}=(Aa)^{s_1}\cdot(Aa)^{s_2}$*

(iv) *si $(Aa)^s$, $(Ab)^s$ existent, alors $(Aab)^s$ existe et on a $(Aab)^s=(Aa)^s\cdot(Ab)^s$.*

Démonstration:

(i) Si $(Aa)^{s_1}=Ab_1$, $(Aa)^{s_2}=Ab_2$, alors le raisonnement du Lemme 3 entraîne $w(b_1)=w(a)s_1$, $w(b_2)=w(a)s_2$, donc $w\left(\frac{b_2}{b_1}\right)=w(a)\cdot(s_2-s_1)\geqq 0$ pour toute $w\in\Omega$; alors $\frac{b_2}{b_1}\in A$, c'est-à-dire $(Aa)^{s_2}\subseteqq(Aa)^{s_1}$.

(ii) Soit $(Aa)^{s_1}=Ab$, $(Aa)^{s_1s_2}=Ac$; alors $(Ab)^{s_2}=Ac$. En effet, du Lemme 3 on déduit que $w(b)=s_1\cdot w(a)$, $w(c)=s_1s_2\cdot w(a)$, donc $w(c)=s_2\cdot w(b)$ quelle que soit $w\in\Omega$ et alors $(Ab)^{s_2}=Ac$.

(iii) Soit $(Aa)^{s_1}=Ab_1$, $(Aa)^{s_2}=Ab_2$, donc $w(b_1)=w(a)\cdot s_1$, $w(b_2)=w(a)\cdot s_2$, et alors $w(b_1b_2)=w(a)\cdot(s_1+s_2)$ quelle que soit $w\in\Omega$, d'où $Ab_1b_2=(Aa)^{s_1+s_2}$.

(iv) Soit $(Aa)^s=Aa_1$, $(Ab)^s=Ab_1$, donc $w(a_1)=w(a)\cdot s$, $w(b_1)=w(b)\cdot s$, et alors $w(a_1b_1)=w(ab)\cdot s$ quelle que soit $w\in\Omega$, c'est-à-dire, $(Aab)^s=(Aa)^s\cdot(Ab)^s$.

§ 3. Résultats

Soit A un anneau primaire et complètement intégralement clos, $\mathfrak{p}$ son idéal premier, K son corps des fractions.

Puisque les résultats indiqués seront triviaux quand $\mathfrak{p}$ est un idéal principal, nous allons supposer implicitement que ce cas a été écarté. Remarquons que pour cela il suffit que $\mathfrak{p}$ possède une puissance contenue dans un idéal de type fini [5].

Nous cherchons à obtenir des conditions pour que A soit un anneau de valuation. Nos conditions seront relatives à une suite croissante d'idéaux principaux At_r tels que $\mathfrak{p} = \bigcup_{r \geqq 1} At_r$. Krull (loc. cit.) a envisagé des conditions analogues, mais portant sur l'ensemble filtrant des idéaux non nuls de type fini, contenus dans $\mathfrak{p}$.

Supposons donc qu'on ait $\mathfrak{p} = \bigcup_{r \geqq 1} At_r$, où (At_r) est une suite strictement croissante d'idéaux principaux.

Pour tout élément $a \in K$, non nul, notons $m_r(a) = m_{t_r}(a)$, $n_r(a) = n_{t_r}(a)$, etc. . . . Posons $M(1) = 1$, $M(r) = m_2(t_1) \cdot m_3(t_2) \ldots m_r(t_{r-1})$; donc $M(r) = M(r-1) \cdot m_r(t_{r-1})$ et $M(r) \leqq m_r(t_1)$ (car $At_1 \subseteqq At_2^{m_2(t_1)}$, $At_2 \subseteqq At_3^{m_3(t_2)}, \ldots$, $At_{r-1} \subseteqq At_r^{m_r(t_{r-1})}$, donc $At_1 \subseteqq At_r^{M(r)}$ et alors $M(r) \leqq m_r(t_1)$). De même, notons $N(1) = 1$, $N(r) = n_2(t_1)\, n_3(t_2) \ldots n_r(t_{r-1})$; donc $N(r) = N(r-1)\, n_r(t_{r-1})$ et $N(r) \geqq n_r(t_1)$.

Remarquons que s'il existe un entier N tel que $N \geqq N(r)$ quelque soit $r \geqq 1$, alors de $At_r^N \subseteqq At_r^{N(r)} \subseteqq At_r^{n_r(t_r)} \subseteqq At_1$ pour tout $r \geqq 1$ il résulte $\mathfrak{p}^N \subseteqq At_1$. Ainsi, pour écarter ce cas trivial, nous supposerons que $\lim_{r \to \infty} N(r) = \infty$.

Enfin, soit $\Omega = (w)$ une famille de valuations de K, telles que $A = \bigcap_{w \in \Omega} A_w$. Puisque A est *complètement* intégralement clos, nous pouvons normaliser ces valuations de telle façon que $w(t_1) = 1$ quelle que soit $w \in \Omega$.

PROPOSITION 1. *Soit A un anneau primaire et complètement intégralement clos. Supposons qu'il existe une suite strictement croissante d'idéaux principaux At_r tels que $\mathfrak{p} = \bigcup_{r \geqq 1} At_r$ et satisfaisant à la condition suivante:*

(A) *pour tout $a \in \mathfrak{p}$, non nul, on a* $\lim_{r \to \infty} \dfrac{m_r(a)}{n_r(a)} = 1.$

Alors, A est un anneau de valuation.

Démonstration:

Soit $a \in \mathfrak{p}$, non nul. De $At_r^{n_r(a)} \subseteqq Aa \subseteqq At_r^{m_r(a)}$, $At_r^{n_r(t_1)} \subseteqq At_1 \subseteqq At_r^{m_r(t_1)}$, vient, en prenant $w \in \Omega$ arbitraire:

$$(1)\qquad \begin{aligned} n_r(a)\cdot w(t_r) &\geqq w(a) \geqq m_r(a)\cdot w(t_r) \\ n_r(t_1)\cdot w(t_r) &\geqq 1 = w(t_1) \geqq m_r(t_1)\cdot w(t_r). \end{aligned}$$

Si on note $d_r(x) = \dfrac{n_r(x) - m_r(x)}{n_r(x)}$, où $x \in \mathfrak{p}$, non nul, alors $m_r(x) = n_r(x)[1 - d_r(x)]$. En faisant $x = a$, $x = t_1$, et en ermplaçant dans les inégalités (1), on obtient:

$$(2)\qquad \begin{aligned} n_r(a)\cdot w(t_r) &\geqq w(a) \geqq w(t_r)\cdot n_r(a)\cdot[1 - d_r(a)] \\ n_r(t_1)\cdot w(t_r) &\geqq 1 = w(t_1) \geqq w(t_r)\cdot n_r(t_1)\cdot[1 - d_r(t_1)]. \end{aligned}$$

Par division, il résulte que

$$\frac{n_r(a)}{n_r(t_1)}\cdot\frac{1}{1-d_r(t_1)} \geqq w(a) \geqq \frac{n_r(a)}{n_r(t_1)}\cdot[1 - d_r(a)]$$

donc

$$w(a) = \lim_{r\to\infty}\frac{n_r(a)}{n_r(t_1)}\cdot$$

Or, $w \in \Omega$ étant arbitraire et l'expression du deuxième membre étant indépendante de w, on aura, pour toute autre $w' \in \Omega$, $w(a) = w'(a) = \lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{n_r(a)}{n_r(t_1)}\cdot$ Or, ceci entraîne que A est un anneau de valuation, car $A_w = A_{w'} = \dots = A$.

Proposition 2. *Soit A un anneau primaire et complètement intégralement clos. Supposons qu'il existe une suite strictement croissante d'idéaux principaux At_r tels que $\mathfrak{p} = \bigcup_{r\geqq 1} At_r$ et satisfaisant la condition suivante:*

(*B*) *pour tout $a \in \mathfrak{p}$, non nul, on a* $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\mu_r(a)}{\nu_r(a)} = 1$.

Alors, A est un anneau de valuation.

Démonstration:

Il suffit de montrer que (B) entraîne (A). Soit $a \in \mathfrak{p}$, non nul. Soit m' l'entier tel que $m' \leqq \mu_r(a) < m' + 1$ et de même, n' l'entier tel que $n' - 1 < \nu_r(a) \leqq n'$. Alors, on a $At_r^{m'} \supseteqq Aa \supseteqq At_r^{n'}$; de cela, il résulte que $m' \leqq m_r(a)$ et $n_r(a) \leqq n'$; enfin, de $m_r(a) \leqq \mu_r(a)$ et $\nu_r(a) \leqq n_r(a)$ il vient $m' = m_r(a)$ et $n' = n_r(a)$.

Par l'hypothèse (B) on a $\lim\limits_{r\to\infty}\left(1 - \dfrac{\mu_r(a)}{\nu_r(a)}\right) = \lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\nu_r(a) - \mu_r(a)}{\nu_r(a)} = 0$. Or, $0 \leqq \dfrac{n_r(a) - m_r(a)}{n_r(a)} \leqq \dfrac{(\nu_r(a)+1) - (\mu_r(a) - 1)}{\nu_r(a)} = \dfrac{\nu_r(a) - \mu_r(a)}{\nu_r(a)} + \dfrac{2}{\nu_r(a)}$, donc, si on a $\lim\limits_{r\to\infty}\nu_r(a) = \infty$, il résulte que $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{n_r(a) - m_r(a)}{n_r(a)} = 0$, c'est-à-dire, la condition (A) est vérifiée.

Montrons donc que $\lim_{r\to\infty} \nu_r(a) = \infty$. Or, d'abord, il est trivial que $F_r(a) \supseteqq F_{r+1}(a)$, car si $0 \leqq \frac{m}{n} \in F_{r+1}(a)$ alors $At_r^m \subseteqq At_{r+1}^m \subseteqq Aa^n$, donc $\frac{m}{n} \in F_r(a)$. Il résulte que $\nu_r(a) \leqq \nu_{r+1}(a)$. S'il existait N assez grand pour que $\nu_r(a) \leqq N$, pour tout $r \geqq 1$, alors $At_r^N \subseteqq Aa$ pour tout $r \geqq 1$, donc $\mathfrak{p}^N \subseteqq Aa$, absurde !

PROPOSITION 3. *Soit A un anneau primaire et complètement intégralement clos. Supposons qu'il existe une suite strictement croissante d'idéaux principaux At_r tels que $\mathfrak{p} = \bigcup_{r\geqq 1} At_r$ et satisfaisant les conditions suivantes:*

(*C*) $\lim_{r\to\infty} \frac{M(r)}{N(r)} = 1$.

(*D*) *Si $a, b \in A$, $a, b \notin At_{r+1}$, alors $ab \notin At_r$ pour tout $r \geqq 1$.*

Alors A est un anneau de valuation.

Démonstration:

Nous diviserons la démonstration en plusieurs parties.

(a) Pour tout $a \in \mathfrak{p}$, non nul, et $r \geqq 1$, on a

$$\frac{m_r(a)}{M(r)} \leqq \frac{m_{r+1}(a)}{M(r+1)} \quad \text{et} \quad \frac{n_{r+1}(a)}{N(r+1)} \leqq \frac{n_r(a)}{N(r)}$$

En effet, de $a \in At_r^{m_r(a)}$, $t_r \in At_{r+1}^{m_{r+1}(t_r)}$, vient $m_r(a) \cdot m_{r+1}(t_r) = m_r(a) \cdot \frac{M(r+1)}{M(r)} \leqq m_{r+1}(a)$. De même, de $t_r^{n_r(a)} \in Aa$, $t_{r+1}^{n_{r+1}} \in At_r$, vient $n_r(a) \cdot n_{r+1}(t_r) = n_r(a) \cdot \frac{N(r+1)}{N(r)} \geqq n_{r+1}(a)$.

(b) Pour tout $a \in \mathfrak{p}$, non nul, $\lim_{r\to\infty} \frac{m_r(a)}{M(r)}$ est fini.

Car $\lim_{r\to\infty} \frac{m_r(a)}{M(r)} \leqq \lim_{r\to\infty} \frac{n_r(a)}{N(r)} \cdot \lim_{r\to\infty} \frac{N(r)}{M(r)}$ et, en vertu de (a) et de (C) on déduit (b).

(c) Posons: $w(a) = \lim_{r\to\infty} \frac{m_r(a)}{M(r)}$ quand $a \in \mathfrak{p}$, $a \neq 0$; $w(a) = 0$ quand $a \in A$, $a \notin \mathfrak{p}$; $w(0) = \infty$. Alors, si $a \in A$ on a $a \in \mathfrak{p}$ si et seulement si $w(a) > 0$.

Car si $a \in \mathfrak{p}$ il existe r tel que $a \in At_r$, donc $m_r(a) \geqq 1$ et $w(a) > 0$.

(d) Si $a, b \in A$ alors $w(a+b) \geqq \min\{w(a), w(b)\}$.

Nous pouvons supposer a, b non nuls, dans $\mathfrak{p}$, sinon la formule est triviale. On a $a \in At_r^{m_r(a)}$, $b \in At_r^{m_r(b)}$; si $m'_r = \min\{m_r(a), m_r(b)\}$ alors $a+b \in At_r^{m'_r}$ donc $m'_r \leqq m_r(a+b)$. Si on avait $w(a+b) < \min\{w(a), w(b)\}$ alors pour r assez grand il serait $w(a+b) < \frac{m_r(a)}{M(r)}$, $w(a+b) < \frac{m_r(b)}{M(r)}$, donc $\frac{m_r(a+b)}{M(r)} \leqq w(a+b) < \frac{m'_r}{M(r)}$, contradiction !

(e) Si $x \in K$, $b \in A$, sont des éléments non nuls tels que $xb \in A$, alors il existe la limite $\lim_{r\to\infty} \frac{m_r(x)}{M(r)}$ et on a $w(xb) = \lim_{r\to\infty} \frac{m_r(x)}{M(r)} + w(b)$. En particulier, si $a, b \in A$, alors on a $w(ab) = w(a) + m(b)$.

Par hypothèse, $x = \frac{a}{b}$, où $a \in A$, $a \neq 0$. On a $x \in At_r^{m_r(x)}$, $x \notin At_r^{m_r(x)+1}$, donc si $u_r = t_r^{-1}$ alors $xu_r^{m_r(x)} \in A$, $xu_r^{m_r(x)} \notin At_r$. De même, $bu_r^{m_r(b)} \in A$, $bu_r^{m_r(b)} \notin At_r$. En vertu de (D), on a $bxu_r^{m_r(b)+m_r(x)} \notin At_{r-1}$, donc $bxu_r^{m_r(b)+m_r(x)} \notin At_r^{n_r(t_{r-1})}$ (car $At_r^{n_r(t_{r-1})} \subseteqq At_{r-1}$), c'est-à-dire, $bx \notin At_r^{m_r(b)+m_r(x)+n_r(t_{r-1})}$ et alors $m_r(b) + m_r(x) \leqq m_r(bx) < m_r(b) + m_r(x) + n_r(t_{r-1})$, la première inégalité étant triviale ; il résulte que $m_r(bx) - m_r(b) - n_r(t_{r-1}) < m_r(x) \leqq m_r(bx) - m_r(b)$ et puisque $bx = a \in A$, on déduit, après division par $M(r)$, de la partie (b) et du fait que $\lim_{r\to\infty} \frac{n_r(t_{r-1})}{M(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{N(r-1)} \cdot \lim_{r\to\infty} \frac{N(r)}{M(r)} = 0$ l'existence de $\lim_{r\to\infty} \frac{m_r(x)}{M(r)}$ et l'égalité $w(bx) = w(b) + \lim_{r\to\infty} \frac{m_r(x)}{M(r)}$.

(f) Si on pose, pour tout $x = \frac{a}{b} \in K$ (avec $a, b \in A$, $b \neq 0$) $w(x) = w(a) - w(b)$, alors cette fonction w ainsi prolongée à K, définit une valuation de K, dont l'anneau A_w contient A. On a $w\left(\frac{a}{b}\right) = \lim_{r\to\infty} \frac{m_r\left(\frac{a}{b}\right)}{M(r)}$. Enfin, l'idéal de la valuation w est égal à $\mathfrak{p}$.

Il suffit de montrer que si $x \in A_w$, $x \notin A$, alors $w(x) = 0$. De $x \notin A$, il résult que $m_r(x) \leqq 0$ pour tout $r \geqq 1$ (sinon, on aurait un indice $r \geqq 1$, avec $m_r(x) > 0$ donc $Ax \subseteqq At_r^{m_r(x)} \subseteqq At_r \subseteqq A$) ; donc $w(x) = \lim_{r\to\infty} \frac{m_r(x)}{M(r)} \leqq 0$ et de $w(x) \geqq 0$ il vient $w(x) = 0$.

(g) $A_w = A$.

En effet, supposons que $x \in A_w$, $x \notin A$. Alors, il existe $w' \in \Omega$ tel que $x \notin A_{w'}$, donc $A_w \neq A_{w'}$ et ces anneaux de valuation étant maximaux, car A est complètement intégralement clos, il existe $y \in A_{w'}$, $y \notin A_w$; donc, $w(y) < 0$, $w(y^{-1}) > 0$, et alors $y^{-1} \in \mathfrak{p}$ d'après (f). Or, en vertu du corollaire au Lemme 1, on conclut que $A_{w'} = K$, absurde !

COROLLAIRE. *Soit A un anneau primaire et* intégralement clos. *Supposons qu'il existe une suite croissante d'idéaux principaux* At_r *tels que* $\mathfrak{p} = \bigcup_{r\geqq 1} At_r$, *satisfaisant les conditions* (C), (D). *Alors, il existe un anneau de valuation* (*réelle*) *contenant tout anneau de valuation* (*de rang arbitraire*) *qui contient* A.

En effet, remarquons que dans la démonstration de la Proposition 3 l'hypothèse que A soit complètement intégralement clos n'a intervenu qu'à la partie (g), et partout ailleurs on a employé seulement l'hypothèse moins forte que A soit intégralement clos.

Soit donc w la valuation (réelle) définie aux parties (a) – (f) ayant idéal égal à $\mathfrak{p}$. Si $A \subseteqq A_{w'} \subsetneqq A_w$, où w' est de rang arbitraire, soit $y \in A_{w'}$, $y \notin A_w$, donc $w(y) < 0$, $w(y^{-1}) > 0$ et alors $y^{-1} \in \mathfrak{p}$; d'après le corollaire au Lemme 1, il vient $A_{w'} = K$, absurde!

§ 4. Commentaires

Nous indiquerons l'interpretation topologique de la propriété (D).

Si, pour tout $r \geqq 1$, V_r désigne l'ensemble complémentaire de At_r dans A, alors la famille d'ensembles $\{aV_r | a \in A,\ a \neq 0,\ r \geqq 1\}$ est un système fondamental de voisinages pour une topologie sur A^* (ensemble des éléments non nuls de A). En effet, tous les axiomes sont facilement vérifiés, par example, si aV_r est un voisinage de a et si on prend $U = aV_{r+1}$, alors si $b \in U$ on a $bV_{r+1} \subseteqq aV_r$, en vertu de la condition (D). Cette condition entraîne aussi la continuité de l'opération de produit, car $(aV_{r+1})(bV_{r+1}) \subseteqq abV_r$ pour tout $r \geqq 1$. Enfin, cette topologie n'est pas séparée, car $\bigcap_{r \geqq 1} V_r$ est égal à l'ensemble des unités de A; mais, par passage au quotient, on obtient une topologie séparée, compatible avec le monoïde multiplicatif des idéaux principaux entiers non nuls de A. D'après cette interpretation, on voit comment est naturelle l'introduction d'une telle condition.

Enfin, dans la Proposition 3, les conditions ne sont pas superabondantes. En effet, l'exemple indiqué par Nagata montre l'existence d'un anneau primaire, complètement intégralement clos, dont l'idéal premier est la réunion d'une suite croissante d'idéaux principaux satisfaisant (C) et néanmoins cet anneau n'est pas un anneau de valuation.

La vérification détaillée de ce fait peut être trouvée à la note [3]. Néanmoins, pour être complets, nous repéterons ici la façon de choisir la suite croissante d'idéaux principaux avec les propriétés voulues. Pour la notation, le lecteur doit se rapporter à l'article de Nagata [2], ou de l'auteur [3].

Soit $t \in K$ tel que $w(t)=1$; pour tout $r \geqq 1$ soit $t_r = t^{\frac{1}{2^{r-1}}} \in K$ donc $w(t_r) = \frac{1}{2^{r-1}}$ (l'existence de t_r découle du fait que K est algébriquement clos) et $\lim_{r \to \infty} w(t_r) = 0$. Alors, l'idéal premier unique $\mathfrak{p}$ de l'anneau A est la réunion de la suite strictement croissante d'idéaux principaux At_r. En effet, donné $p \in A$ on sait qu'il existe la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels $w_\lambda(p)$, $w_e(p)$ (quand $\alpha \leqq \lambda \leqq 2\alpha$, $e \in K$, $\alpha < w(e) < 2\alpha$) et que cette borne inférieure est strictement positive. Donc, pour r assez grand, on a $p \in At_r$. En outre, il est clair que $m_r(t_{r-1}) = n_r(t_{r-1}) = 2$ pour tout $r > 1$, donc $M(r) = N(r)$ et la condition (C) est vérifiée. Puisque A n'est pas un anneau de valuation, alors il est impossible d'après la Proposition 3 que la condition (D) soit vérifiée, par la suite (At_r). Remarquons qu'il est possible de construir explicitement des éléments $p, p' \in A$, $p, p' \notin At_r$, mais tels que $pp' \in At_{r-1}$ (voir [3]).

Bibliographie

[1] Krull, "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche", II. Math. Zeits., **41** (1936), 665-679.

[2] Nagata, "On Krull's Conjecture concerning Valuation Rings," Nagoya Math. J., **4** (1952), 29-33.

[3] Ribenboim, "Sur une Note de Nagata relative à un Problème de Krull", A paraître dans le Math. Zeits.

[4] Samuel, "Some Asymptotic Properties of Powers of Ideals," Annals of Math., **56** (1952), 11-21.

[5] Krull, "Eine Bemerkung über Primärintegritätsbereiche," A paraître dans le Math. Annalen.

[6] Nakayama, "On Krull's Conjecture concerning Completely Integrally Closed Integrity Domains," I, II. Proc. Imp. Acad. Tokyo, **18** (1942), 185-187, 233-236.

Mathematisches Institut der Universität, Bonn
Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (Brasil)