

NOTE SUR L'ENSEMBLE D'ADHÉRENCE FINE DES FONCTIONS ALGÈBROÏDES

NOBUSHIGE TODA

1. Introduction.

Soit $f(z)$ une fonction algébroïde dans $|z| < \infty$ définie par

$$(1) \quad f^n + a_1(z)f^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0$$

où cette équation est irréductible dans $|z| < \infty$. R_f est la surface de Riemann définie par $f(z)$ comme surface de recouvrement de $|z| < \infty$. Elle appartient à O_G . L'ensemble d'adhérence fine $\tilde{C}_f(\infty)$ de $f(z)$ en ∞ est défini comme suivant:

$$\tilde{C}_f(\infty) = \bigcap_{v \in V} \overline{f(v')}$$

où $V = \{v; \text{voisinage fin de } \infty\}$, v' est l'ensemble le plus grand de R_f dont la projection $\pi(v') = v$.

Dans [6], on a trouvé que 1) $\tilde{C}_f(\infty)$ est total ou bien 2) il contient au plus n éléments et dans ce cas $f(z)$ n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard, de Nevanlinna et de Borel; de plus si $\tilde{C}_f(\infty)$ ne contient pas ∞ , chaque $a_i(z)$ admet une limite fine finie en ∞ . On a supposé que $f(z)$ ne soit pas algébrique.

On considère dans cette note une relation entre la dimension harmonique de R_f et le nombre d'éléments de $\tilde{C}_f(\infty)$ dans le cas où il n'est pas total.

2. Lemmes.

A) D'abord, on considère le cas où R_f admet un seul élément-frontière au sens de Kerékjártó-Stoilow.

Soit Ω un bout de R_f tel que sa frontière est compacte et analytique, $P_\Omega = \{h; \text{harmonique positive dans } \Omega \text{ et nulle continûment sur la frontière de } \Omega\}$. La dimension harmonique $H(\Omega)$ de Ω est le nombre minimum d'éléments de P_Ω qui génèrent P_Ω , qui est finie ou $+\infty$.

Received October 27, 1967.

LEMME 1.

Soit Ω' un bout de R_f comme Ω . Alors $H(\Omega) = H(\Omega')$ ([2]).

On dit que le nombre commun est la dimension harmonique de R_f et on l'écrit par $H(R_f)$, qui est au plus n ([2]).

λ et μ opérateurs (voir [3]).

Soit F une surface de Riemann n'appartenant pas à O_F , D un domaine de F tel que chaque composant connexe de sa frontière se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques, $P_F = \{w; \text{harmonique positive sur } F\}$ et $P_D = \{u; \text{harmonique positive dans } D \text{ et nulle continûment sur la frontière de } D\}$. Pour u de P_D , on met $u^* = u$ dans D et $=0$ dans $F - D$ et $Q_D = \{u; u^* \leq w \text{ où } w \text{ est un élément quelconque de } P_F\}$.

On définit

$$\lambda_D(w) = \sup u \text{ où } u \in P_D \text{ tel que } u \leq w,$$

qui est harmonique non-négative dans D ;

$$\mu_D(u) = \inf s \text{ où } s \geq u^* \text{ où } s \text{ est surharmonique sur } F,$$

qui est la fonction harmonique majorante la plus petite de u sur F .

LEMME 2.

λ_D et μ_D sont additifs ([4]).

LEMME 3.

Pour u de Q_D , $\mu_D(u)$ est minimale dans P_F si et seulement si u est minimale dans P_D ([3]).

LEMME 4.

Soit w minimale dans P_F . Si $\lambda_D(w)$ est positive, elle est minimale dans P_D ([4]).

LEMME 5.

Soient D_1 et D_2 deux domaines sur F comme D . Si $D_1 \cap D_2 = \phi$, alors la fonction harmonique minorante la plus grande de $\min\{\mu_{D_1}(u_1), \mu_{D_2}(u_2)\}$ est 0, quand $u_i \in Q_{D_i}$, $i = 1, 2$ ([3]).

LEMME 6.

Soit E un ensemble fermé, effilé en ∞ tel que $\mathcal{C}E$ est connexe, chaque composant connexe de sa frontière se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques et π la

projection de R_f sur le z -plan. Si $H(R_f) = k(\leq n)$, le nombre des composantes connexes de $\Omega_0 - \pi^{-1}(E)$ est au plus k , où Ω_0 est un bout de R_f comme Ω tel que $\pi(\Omega_0) = \{ |z| > r_0 \}$ et $(|z| = r_0) \cap E = \phi$.*)

Démonstration.

Il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ telle que $r_n \nearrow \infty$, $(|z| = r_n) \cap E = \phi$ pour tout n et $r_0 < r_1$ ([1]). On prend Ω_n un bout de R_f tel que $\pi(\Omega_n) = \{ |z| > r_n \}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Supposons qu'il existe plus de $k+1$ domaines $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ ($l \geq k+1$) dans $\Omega_0 - \pi^{-1}(E)$.

Soit $g(\zeta, z)$ la fonction de Green de $(|z| > r_0) - E$, alors

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} g(\zeta, z) = \varepsilon > 0$$

parce que E est effilé en ∞ , par conséquent il existe une suite $\{z_n\}$ telle que $z_n \rightarrow \infty$ et $g(\zeta, z_n) \rightarrow \varepsilon$ quand n tend vers ∞ .

Soit $G(q, p)$ la fonction de Green de ω où $\omega = \omega_1$ ou $\omega_2, \dots$ ou ω_l . Grâce au principe de Lindelöf, on a

$$g(\zeta, \pi(p)) = \sum_{\substack{\pi(q)=\zeta \\ q \in \omega}} n(q) G(q, p), \quad P \in \omega,$$

parce que $\sum_{\pi(q)=\zeta} n(q) \leq n$, où $n(q)$ est l'ordre de multiplicité de π en q .

L'inégalité

$$(2) \quad \limsup_{\substack{P \rightarrow \beta \\ P \in \omega}} G(q, p) > 0,$$

est vraie où β signifie la frontière idéale de R_f au sens de Kerékjártó-Stoilow, parce que, pour $P_n \in \omega$ tel que $\pi(P_n) = z_n$,

$$0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} g(\zeta, \pi(p_n)) \leq \sum_{\substack{\pi(q)=\zeta \\ q \in \omega}} n(q) \limsup_{n \rightarrow \infty} G(q, p_n),$$

de sorte que l'on a l'assertion (2).

Soit $G_0(q, p)$ la fonction de Green de Ω_0 . Alors on a

$$G_0(q, p) \geq G(q, p)$$

pour tout p de ω , en particulier, si on prend $p = p_n$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(q, p_n) \text{ existe et est positive}$$

*) Le fait qu'il existe un tel r_0 arbitrairement grand est grâce au [1].

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_0(q, p_n) \text{ existe}$$

quand n tend vers ∞ , on a

$$(3) \quad G_0(q) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} G_0(q, p_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} G(q, p_n) \equiv G(q).$$

D'après un théorème de Harnack, $G_0(q, p_n)$ et $G(q, p_n)$ tendent vers $G_0(q)$ et $G(q)$ uniformément au sens large respectivement, par conséquent, $G_0(q)$ et $G(q)$ sont élément de $P_{\mathcal{Q}_0}$ et de P_ω respectivement et l'inégalité (3) est valable pour tout q de ω . En considérant que $H(R_f) = k$, on peut écrire

$$G_0(q) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot h_i(q)$$

où $h_i(q)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sont minimales dans $P_{\mathcal{Q}_0}$ et au moins un coefficient de c_i ne réduit pas à 0. D'après le Lemme 2,

$$\lambda_\omega(G_0) = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_\omega(h_i) \geq G \geq 0$$

et $G \neq 0$, par conséquent il existe un i_0 tel que $c_{i_0} \neq 0$ et $\lambda_\omega(h_{i_0}) \neq 0$. D'après le Lemme 4, $\lambda_\omega(h_{i_0}) \equiv U$ est minimale dans P_ω et appartient à $\mathcal{Q}_\omega$, et puis grâce au Lemme 3, $\mu_\omega(U)$ est minimale dans $P_{\mathcal{Q}_0}$, qui est égale à h_{i_0} .

Le fait précédent est applicable pour tout ω_i , en conséquence pour tout i , $\mu_{\omega_i}(U_i)$ est minimale dans $P_{\mathcal{Q}_0}$. Pour $i \neq j$, il n'y a pas de relation proportionnelle entre $\mu_{\omega_i}(U_i)$ et $\mu_{\omega_j}(U_j)$ d'après le Lemme 5. Cela veut dire qu'il y a l fonctions minimales dans $P_{\mathcal{Q}_0}$. Ce fait est contraire à l'hypothèse, c'est-à-dire il existe au plus composants connexes dans $\mathcal{Q}_0 - \pi^{-1}(E)$.

B) Ensuite, on considère le cas où R_f admet $(1 <) m (\leq n)$ éléments-frontière au sens de Kerékjártó-Stoilow.

Il existe un nombre positif M_0 tel que la partie R_f^0 de R_f sur $(|z| > M_0)$ se compose de m domaines connexes:

$$R_f^0 = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{Q}_0^i, \mathcal{Q}_0^i: \text{domaine connexe tel que } \mathcal{Q}_0^i \cap \mathcal{Q}_0^j = \emptyset \text{ pour } i \neq j.$$

On peut prendre chaque $\mathcal{Q}_0^i$ comme $\mathcal{Q}_0$ du cas où R_f admet un seul élément-frontière. Soit $H(\mathcal{Q}_0^i)$ le nombre minimum d'éléments de $P_{\mathcal{Q}_0^i}$ qui

générent $P_{\Omega_0^i}$. Dans ce cas on définit la dimension harmonique $H(R_f)$ de R_f comme suivant :

$$H(R_f) = \sum_{i=1}^m H(\Omega_0^i).$$

Pour cette définition, qui est naturelle, on a le Lemme 6 immédiatement en considérant dans chaque Ω_0^i .

3. Théorème.

En appliquant le Lemme 6, on a un précisé du Théorème 2 dans [6].

THÉORÈME.

Si $H(R_f) = k (\leq n)$, $\tilde{C}_f(\infty)$ contient au plus k éléments quand il n'est pas total.

Démonstration.

On peut supposer que $\tilde{C}_f(\infty)$ ne contient pas ∞ en utilisant une transformation linéaire. Chaque coefficient de (1) admet une limite fine finie en ∞ . En utilisant un résultat de L. Naïm ([5]), on trouve qu'il existe un ensemble E fermé, effilé en ∞ tel que $\mathcal{C}E$ est connexe, chaque composant connexe de sa frontière se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques et dans $\mathcal{C}E$ chaque coefficient tend vers sa limite fine uniformément par rapport à θ en ∞ quand on écrit $z = re^{i\theta}$.

D'après le Lemme 6, on a

$$\Omega_0 - \pi^{-1}(E) = \bigcup_{i=1}^{k'} \omega_0^i \text{ où } \omega_0^i \text{ sont connexes } (i = 1, 2, \dots, k')$$

.....

$$\Omega_t - \pi^{-1}(E) = \bigcup_{i=1}^{k'} \omega_t^i \text{ où } \omega_t^i \text{ sont connexes } (i = 1, 2, \dots, k')$$

.....

où $k' \leq k$ si r_0 est suffisamment grand.

Numérotant convenablement, on peut prendre pour tout $i = 1, 2, \dots, k'$ comme suivant :

$$\omega_0^i \supset \omega_1^i \supset \omega_2^i \supset \omega_3^i \supset \dots \supset \omega_t^i \supset \dots$$

L'ensemble

$$\tilde{C}_f(\infty) = \bigcap_{t=0}^{\infty} \overline{f(\mathcal{C}\pi^{-1}(E) \cap \Omega_t)}$$

se compose d'au plus n éléments. Pour chaque i , l'ensemble

$$C_i = \bigcap_{t=0}^{\infty} \overline{f(\omega_t^i)}$$

est un continuum ou un point parce que ω_t^i est connexe. D'autre part, $\tilde{C}_f(\infty) \supset C_i$, par conséquent C_i n'est pas un continuum, c'est-à-dire il se réduit à un point. Par définition de $\tilde{C}_f(\infty)$, $\bigcup_{i=1}^{k'} C_i \supset \tilde{C}_f(\infty)$, de sorte que $\tilde{C}_f(\infty)$ contient au plus k éléments.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Brelot: Éléments de la théorie classique du potentiel, C.D.U. Paris, 3^e édition 1965.
- [2] M. Heins: Riemann surfaces of infinite genus, Ann. Math. **55** (1952) 296–317.
- [3] M. Heins: On the Lindelöf principle, ibid. **61** (1955) 440–473.
- [4] K. Matsumoto: On subsurfaces of some Riemann surfaces, Nagoya Math. J. **15** (1958) 261–274.
- [5] L. Naim: Sur le rôle de la frontière de R.S. Martin dans la théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier **7** (1957) 5–103.
- [6] N. Toda: Sur l'ensemble d'adhérence fine des fonctions algébroïdes, Nagoya Math. J. **30** (1967) 295–302.

*Institut de Mathématiques,
Université de Nagoya*