

SUR LA FAMILLE SOUS-ORDONNÉE AU NOYAU DE CONVOLUTION DE HUNT II

MASAYUKI ITÔ

1. Introduction et préliminaires

Dans toute la suite X désignera un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini; ξ sera sa mesure de Haar. Un noyau de convolution N sur X signifie une mesure de Radon positive dans X , et, pour une mesure de Radon réelle μ dans X , $N * \mu$ s'appelle le N -potentiel de μ dès que cette convolution a un sens. En particulier, s'il est absolument continu par rapport à ξ , sa densité s'écrira N_μ . Pour une fonction f localement ξ -sommable dans X , on notera $N * f$ et Nf au lieu de $N * (f\xi)$ et $N(f\xi)$ dès que ceux sont définis.

Un noyau de convolution de Hunt N sur X est, par définition, un noyau de convolution sur X de la forme

$$N = \int_0^\infty \alpha_t dt ,$$

où $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives $\neq 0$ dans X ; c'est-à-dire, $\alpha_0 =$ mesure de Dirac, $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s}$ ($\forall t \geq 0, \forall s \geq 0$) et l'application $t \rightarrow \alpha_t$ est vaguement continue. Dans ce cas, ce semi-groupe est uniquement déterminé (cf. [2]), qui s'appelle le semi-group associé au noyau N . N est borné¹⁾ (cela est équivalent au principe complet du maximum pour N) si et seulement si, quel que soit $t \geq 0$, $\int d\alpha_t \leq 1$. Dans ce cas, il existe une fonction définie-négative ψ sur le groupe dual $\hat{X}$ de X , et une seule telle que, quel que soit $t \geq 0$, $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi)$ (cf. par exemple, [4])²⁾, où la signe $\hat{}$ représente la transfor-

Received December 11, 1972.

¹⁾ Un noyau de convolution N sur X est dit borné si, quelle que soit f de $C_K(X)$, $N * f$ est bornée sur X .

²⁾ Une fonction ψ complexe et continue dans $\hat{X}$ est dite définie-négative si $\psi(\hat{0}) \geq 0$, $\psi(-\hat{x}) = \overline{\psi(\hat{x})}$ ($\forall \hat{x} \in \hat{X}$) et quels que soient n un entier > 0 , $(\hat{x}_i)_{i=1}^n$ une famille de points de $\hat{X}$ et $(c_i)_{i=1}^n$ une famille de nombres complexes avec $\sum_{i=1}^n c_i = 0$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi(\hat{x}_i - \hat{x}_j) c_i \overline{c_j} \leq 0 .$$

mation de Fourier. On a symboliquement $\hat{N} = 1/\psi$, et ψ s'appelle la fonction définie-négative associée au noyau N . Sous une condition additionnelle, un noyau de convolution de Hunt est un noyau de convolution N qui satisfait au principe de domination; c'est-à-dire, quelles que soient f et g de $C_K^+(X)$, $N*f \leq N*g$ partout sur X dès que $N*f \leq N*g$ sur le support de f , $\text{supp}(f)$ (cf. [8]). On note ici $C_K(X)$ et $C_K^+(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans X à support compact et son sous-ensemble des fonctions non-négatives, respectivement.

Dans l'article précédent [9], nous avons montré le théorème suivant:

Soit κ un noyau de convolution borné sur la droite réelle $\mathbf{R}$ porté par $\mathbf{R}^+ = \{t \in \mathbf{R}; t \geq 0\}$. Pour que, quels que soient X un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini, et $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X , $N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t)$ satisfasse au principe de domination, il faut et il suffit que κ satisfasse au principe de domination.

Dans cette note, on obtiendra d'abord le théorème suivant:

Soient κ un noyau de convolution non-zéro sur $\mathbf{R}$ porté par $\mathbf{R}^+$ et $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X . Si κ satisfait au principe de domination et si $N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t)$ a un sens, alors $N_{(\kappa)}$ est un noyau de convolution de Hunt. Dans ce cas, le semi-groupe associé au noyau $N_{(\kappa)}$ est explicitement représenté.

Sous une condition additionnelle pour X , on obtiendra ensuite l'équivalence suivante: Soit κ un noyau de convolution sur $\mathbf{R}$ porté par $\mathbf{R}^+$; alors les deux énoncés suivants sont équivalents.

(1) Quel que soit $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X , $N_{(\kappa)}$ a un sens et il est un noyau de convolution de Hunt sur X .

(2) κ est un noyau de convolution de Hunt borné sur $\mathbf{R}$.

Soit $H_b(\mathbf{R}^+)$ la totalité des noyaux convolution de Hunt bornés sur $\mathbf{R}$ portés par $\mathbf{R}^+$. Pour un noyau de convolution de Hunt $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ sur X , on appelle

$$H(N; X) = \left\{ N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t); \kappa \in H_b(\mathbf{R}^+) \right\}$$

la famille sous-ordonnée au noyau N (cf. [9]). D'après la présente équivalence, cette terminologie est plus justifiée.

Dans le cas où N est borné, la fonction définie-négative associée à un élément de $H(N; X)$ sera écrite explicitement au moyen de la fonction définie-négative associée au noyau N et d'une fonction de Bernstein (voir le théorème 3).

Nous discuterons finalement une caractérisation pour qu'un noyau de convolution sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$) appartienne à la famille sous-ordonnée au noyau newtonien sur $\mathbf{R}^n$.

2. La famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt

Commençons d'abord avec la définition d'une résolvante. Une famille $(N_p)_{p>0}$ de noyaux de convolution sur X est, par définition, une résolvante si l'on a

$$N_p - N_q = (q - p)N_p * N_q \quad (\forall p > 0, \forall q > 0).$$

Dans ce cas, il est évident que l'application $(0, +\infty) \ni p \rightarrow N_p$ est vaguement continue. Si, pour un noyau de convolution N sur X , il existe une résolvante $(N_p)_{p>0}$ telle que $\lim_{p \rightarrow 0} N_p = N$ (au sens de la topologie vague), alors elle est uniquement déterminée et $(N_p)_{p \geq 0}$ s'appelle la résolvante associée au noyau N , où $N_0 = N$ (cf. [2]).

Soient N et $(N_p)_{p \geq 0}$ respectivement un noyau de convolution de Hunt sur X et la résolvante associée au noyau N . Alors, quelle que soit λ une mesure de Radon positive dans $\mathbf{R}^+$, $\int N_p d\lambda(p)$ appartient à la famille sous-ordonnée au noyau N dès que cette intégrale a un sens. Il est connu qu'il existe la famille $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$ des puissances fractionnaires de N (cf. par exemple, [10]). Pour une mesure de Radon positive ν quelconque sur $[0, 1]$, $\int N^\alpha d\nu(\alpha)$ appartient aussi à $H(N; X)$, car il existe une autre mesure de Radon positive λ dans $\mathbf{R}^+$ telle que $\int N^\alpha d\nu(\alpha) = \int N_p d\lambda(p)$ (cf. par exemple, [10]). La proposition suivante est déjà presque connue dans [8].

PROPOSITION 1. *Soit N un noyau de convolution non-zéro sur X . Pour que N soit un noyau de convolution de Hunt sur X , il faut et il suffit qu'il existe la résolvante associée au noyau N et que N soit non-périodique³⁾.*

³⁾ N est dit périodique à un point x si $N = N * \varepsilon_x$, où ε_x est la mesure de Dirac au point x . Si, quel que soit $x \neq 0$ de X , $N \neq N * \varepsilon_x$, alors N est dit non-périodique.

En effet, la condition est évidemment nécessaire. S'il existe la résolvante associée au noyau N , alors, pour un voisinage compact V de l'origine, il existe une mesure de Radon positive ε'_{CV} dans X portée par $\overline{CV}$ telle que $N \geq N * \varepsilon'_{CV}$ dans X et $N = N * \varepsilon'_{CV}$ dans CV ⁴⁾ (cf. le lemme 3 dans [8]), et on a

$$\lim_{V \uparrow X} N * \varepsilon'_{CV} = 0$$

(au sens de la topologie vague) (cf. le lemme 5 dans [8]). Si, quel que soit V un voisinage compact de l'origine, $N \neq N * \varepsilon'_{CV}$, alors notre proposition peut être montrée de la même manière que dans la proposition 3 dans [8]. Supposons donc qu'il existe un voisinage compact V de l'origine telle que $N = N * \varepsilon'_{CV}$ dans X . On a alors, quel que soit W un voisinage compact de l'origine, $N * \varepsilon'_{CW} = (N * \varepsilon'_{CW}) * \varepsilon'_{CV}$ dans X . Il existe évidemment un autre voisinage compact W de l'origine tel que $N \neq N * \varepsilon'_{CW}$, car $N \neq 0$. $N - N * \varepsilon'_{CW}$ étant une mesure de Radon positive dans X à support compact et ayant

$$(N - N * \varepsilon'_{CW}) = (N - N * \varepsilon'_{CW}) * \varepsilon'_{CV}$$

dans X , on obtient que $\int d\varepsilon'_{CV} = 1$ et $N - N * \varepsilon'_{CW}$ est périodique à tout le point de $\text{supp}(\varepsilon'_{CV})$ (cf. [1]). Faisant $W \uparrow X$, on obtient que N est périodique à tout le point de $\text{supp}(\varepsilon'_{CV})$, d'où cela est en contradiction avec l'hypothèse que N est non-périodique.

COROLLAIRE 1. *Soit κ un noyau de convolution non-zéro sur $\mathbf{R}$ porté par $\mathbf{R}^+$. Alors pour que κ soit un noyau de convolution de Hunt sur $\mathbf{R}$, il faut et il suffit que κ satisfasse au principe de domination.*

En effet, il est évident que la condition est nécessaire, et on montrera son inverse. S'il existe un point ($\neq 0$) auquel κ est périodique, alors on a $\text{supp}(\kappa) \ni 0$, mais cela est en contradiction avec $\kappa \neq 0$ et le principe de domination pour κ , d'où κ est non-périodique. Pour une fonction f de $C_K(\mathbf{R})$, la fonction $\kappa * f(x) \kappa * f(-x)$ est à support compact, et donc $\kappa * \kappa$ a un sens. On a, pour deux fonctions f, g non-négatives, mesurables et bornées dans $\mathbf{R}$ à support compact, $\kappa f \leq \kappa g$ presque partout sur $\mathbf{R}$ dès que $\kappa f \leq \kappa g$ presque partout sur $\{x \in \mathbf{R}; f(x) > 0\}$, qui résulte de l'équivalence des deux sortes de principes de domination (cf. [7]). Les

⁴⁾ Cette mesure s'appelle une mesure balayée de ε sur CV relativement au noyau N .

présents deux énoncés déduisent l'existence de la résolvante associée au noyau κ (cf. [6] ou [10]). D'après la proposition, κ est un noyau de convolution de Hunt sur $\mathbf{R}$.

THÉORÈME 1. *Soient $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X et κ un noyau de convolution non-zéro sur $\mathbf{R}$ porté par $\mathbf{R}^+$ satisfaisant au principe de domination. Alors $N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t)$ est un noyau de convolution de Hunt sur X dès que l'intégrale $\int \alpha_t d\kappa(t)$ a un sens.*

Démonstration. D'après le présent corollaire, il existe la résolvante $(\kappa_p)_{p \geq 0}$ associée au noyau κ . D'après $\kappa_p \leq \kappa$,

$$N_{(\kappa_p)} = \int \alpha_t d\kappa_p(t)$$

a un sens pour tout $p \geq 0$. On a, quels que soient $p \geq 0$ et $q > 0$,

$$\begin{aligned} N_{(\kappa_p)} - N_{(\kappa_q)} &= \int \alpha_t d(\kappa_p - \kappa_q)(t) = (q - p) \int \alpha_t d\kappa_p * \kappa_q(t) \\ &= (q - p) \iint \alpha_{t+s} d\kappa_p(t) d\kappa_q(s) = (q - p) \iint \alpha_t * \alpha_s d\kappa_p(t) d\kappa_q(s) \\ &= (q - p) N_{(\kappa_p)} * N_{(\kappa_q)}, \end{aligned}$$

et par suite $(N_{(\kappa_p)})_{p \geq 0}$ est une résolvante et $N_{(\kappa_p)} \leq N_{(\kappa)}$ ($p \geq 0$). La famille $(\kappa_p)_{p > 0}$ converge d'une manière croissante vers κ avec $p \downarrow 0$, et par suite $(N_{(\kappa_p)})_{p > 0}$ converge aussi d'une manière croissante vers $N_{(\kappa)}$ avec $p \downarrow 0$, d'où il existe la résolvante associée au noyau $N_{(\kappa)}$. Montrons ensuite que $N_{(\kappa)}$ est non-périodique. κ étant un noyau de convolution de Hunt sur $\mathbf{R}$, pour un entier $n > 0$ quelconque, il existe une mesure de Radon positive ε'_n dans $\mathbf{R}$ portée par $[1/n, +\infty)$ telle que $\kappa \geq \kappa * \varepsilon'_n$ dans $\mathbf{R}$, $\kappa = \kappa * \varepsilon'_n$ dans $(-\infty, 0) \cup (1/n, +\infty)$ et $\kappa \neq \kappa * \varepsilon'_n$. Soit x un point quelconque auquel $N_{(\kappa)}$ est périodique; alors, d'après l'égalité

$$N_{(\kappa - \kappa * \varepsilon'_n)} = N_{(\kappa)} * (\varepsilon - N_{(\varepsilon'_n)}),$$

$N_{(\kappa - \kappa * \varepsilon'_n)}$ est aussi périodique au point x , où ε est la mesure de Dirac à l'origine dans X . Posons $1/a_n = \int d(\kappa - \kappa * \varepsilon'_n) > 0$; alors $\text{supp}(a_n(\kappa - \kappa * \varepsilon'_n)) \subset [0, 1]$ ($\forall n \geq 1$) et la suite $(a_n(\kappa - \kappa * \varepsilon'_n))_{n=1}^\infty$ converge vaguement vers la mesure de Dirac dans $\mathbf{R}$ avec $n \rightarrow +\infty$. Donc $(a_n N_{(\kappa - \kappa * \varepsilon'_n)})_{n=1}^\infty$ converge vaguement vers ε avec $n \rightarrow +\infty$, d'où $x = 0$. Il est non-périodique, et

par suite $N_{(\kappa)}$ est un noyau de convolution de Hunt sur X . La démonstration est ainsi complète.

PROPOSITION 2. Soient $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X symétrique par rapport à l'origine et avec $\int dN = +\infty$, et κ un noyau de convolution de Hunt sur $\mathbf{R}$ porté par $\mathbf{R}^+$; alors pour que $N_{(\kappa)}$ ait un sens, il faut et il suffit que κ satisfasse au principe complet du maximum⁵⁾.

Démonstration. La condition est évidemment suffisante (cf. le lemme 1 dans [9]). Montrons que la condition est nécessaire. On peut supposer $\kappa \neq 0$, et donc, d'après le présent théorème, $N_{(\kappa)}$ est un noyau de convolution de Hunt sur X et $(N_{(\kappa_p)})_{p \geq 0}$ est la résolvante associée au noyau $N_{(\kappa)}$, où $(\kappa_p)_{p \geq 0}$ est la résolvante associée au noyau κ . N étant symétrique par rapport à l'origine, quel que soit $t \geq 0$, α_t l'est aussi. Donc $N_{(\kappa)}$ est symétrique par rapport à l'origine, et par suite, quel que soit $p > 0$,

$$p \int dN_{(\kappa_p)} = \iint d\alpha_t d(p\kappa_p)(t) \leq 1$$

(cf. par exemple, [7]). Ayant $\int dN = +\infty$, on a, quel que soit $t \geq 0$, $\int d\alpha_t = 1$, et par suite $p \int d\kappa_p \leq 1$ ($\forall p > 0$), d'où κ satisfait au principe complet du maximum. La démonstration est ainsi complète.

Pour montrer l'inverse du théorème 1, on préparera d'abord le lemme suivant:

LEMME 1. Pour qu'il existe un noyau de convolution de Hunt sur X associé auquel la fonction définie-négative est purement imaginaire, il faut et il suffit qu'il existe un espace vectoriel topologique sur $\mathbf{R}$ appartenant à X et homéomorphe avec $\mathbf{R}$.

En effet, supposons qu'il existe un noyau de convolution de Hunt N sur X associé auquel la fonction définie-négative ψ est purement imaginaire. Soit $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe associé au noyau N ; alors la transformée de Fourier de $\alpha_t * \check{\alpha}_t$ est égale à 1 pour tout $t \geq 0$, où $\check{\alpha}_t$ est une mesure de Radon positive dans X symétrisant avec α_t par rapport à l'origine. On a donc $\alpha_t * \check{\alpha}_t = \varepsilon$, et par suite il existe un point x_t de X

⁵⁾ Cela signifie que, quelles que soient f, g de $C_K^+(\mathbf{R})$, $\kappa * f \leq \kappa * g + 1$ sur $\mathbf{R}$ dès que $\kappa * f \leq \kappa * g + 1$ sur $\text{supp}(f)$.

tel que $\alpha_t = \varepsilon_{x_t}$. On pose $E = \{x_t \in X; t \in \mathbf{R}\}$, où $x_{-t} = -x_t$. En définissant $sx_t = x_{st}$ ($\forall s, \forall t \in \mathbf{R}$) et en induisant la topologie de X sur E , E est un espace vectoriel topologique sur $\mathbf{R}$. Si, pour deux nombres t et s de $\mathbf{R}$ avec $t \neq s$, $\alpha_t = \alpha_s$, alors $\alpha_{(t-s)} = \varepsilon$, et par suite E est compact, mais cela est en contradiction avec l'hypothèse que $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ est une mesure de Radon positive dans X . Par conséquent, E et $\mathbf{R}$ sont algébriquement isomorphe. Le semi-groupe $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ étant vaguement continu, l'application $t \rightarrow x_t$ est continue. Son inverse est évidemment continue, d'où la condition est nécessaire.

Montrons que la condition est suffisante. Soit E l'espace vectoriel topologique sur $\mathbf{R}$ appartenant à X et homéomorphe avec $\mathbf{R}$. Notons x_t l'image de $t \in \mathbf{R}$ par l'application homéomorphe de $\mathbf{R}$ à E et posons $\alpha_t = \varepsilon_{x_t}$; alors $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est évidemment un semi-groupe vaguement continu. D'après l'hypothèse que E et $\mathbf{R}$ sont homéomorphes, on a $x_t \rightarrow \infty$ dans X avec $|t| \rightarrow +\infty$. Par conséquent, $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ est un noyau de convolution de Hunt sur X . La fonction définie-négative associée au noyau N est purement imaginaire, car $\alpha_t * \check{\alpha}_t = \varepsilon$ ($\forall t \geq 0$).

Nous montrerons notre deuxième théorème suivant:

THÉOREME 2. *Supposons qu'il existe un espace vectoriel topologique E sur $\mathbf{R}$ appartenant à X et homéomorphe avec $\mathbf{R}$, et soit κ un noyau de convolution non-zéro sur $\mathbf{R}$ porté par $\mathbf{R}^+$. Alors pour que, quel que soit $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X , $N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t)$ ait un sens et soit un noyau de convolution de Hunt sur X , il faut et il suffit que κ satisfasse au principe complet du maximum.*

Démonstration. D'après le théorème 1 et le lemme 1 dans [9], la condition est suffisante. On montrera donc que la condition est nécessaire. Notons x_t l'image de $t \in \mathbf{R}$ par l'application homéomorphe de $\mathbf{R}$ à E . D'après le présent lemme, $N = \int_0^\infty \varepsilon_{x_t} dt$ est un noyau de convolution de Hunt sur X , et donc $N_{(\kappa)} = \int \varepsilon_{x_t} d\kappa(t)$ est aussi un noyau de convolution de Hunt sur X , d'où κ est un noyau de convolution de Hunt sur $\mathbf{R}$. Soit α une constante avec $0 < \alpha < 1$. Pour tout $t \geq 0$, il existe une mesure de Radon positive ν_t dans $\mathbf{R}$ telle que la transformée de Fourier de ν_t soit égale à $\exp(-t|x|^\alpha)$. $(\nu_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu sur $\mathbf{R}$ et on a $\int_0^\infty \nu_t dt = C_\alpha |x|^{1-\alpha} dx$ dans $\mathbf{R}$, où C_α est une

constante positive. Posons $\tilde{\nu}_t = \int \varepsilon_{x_s} d\nu_t(s)$; Alors $\tilde{\nu}_t$ est une mesure de Radon positive dans X portée par E et $(\tilde{\nu}_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu. Evidemment $N_\alpha = \int_0^\infty \tilde{\nu}_t dt$ est un noyau de convolution de Hunt sur X . Il est symétrique et $\int dN_\alpha = +\infty$. D'après la proposition 2, κ doit être borné, d'où κ satisfait au principe complet du maximum. La démonstration est ainsi complète.

Remarque. Sans la présente condition pour X , la présente équivalence n'a pas toujours lieu.

Nous considérerons ensuite une caractérisation d'un élément de la famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt donnée, en utilisant les fonctions définies-négatives.

LEMME 2. *Soit κ un noyau de convolution sur $\mathbf{R}$ porté par $\mathbf{R}^+$. Pour que κ soit un noyau de convolution de Hunt borné sur $\mathbf{R}$, il faut et il suffit que la transformée de Laplace de κ soit de la forme $\tilde{\kappa} = 1/F$ dans $(0, +\infty)$, où F est une fonction de Bernstein.*

On dit qu'une fonction non-négative et infiniment dérivable F dans $(0, +\infty)$ est une fonction de Bernstein si $F^{(2k)}(t) \leq 0$ et $F^{(2k-1)}(t) \geq 0$ dans $(0, +\infty)$ ($k = 1, 2, \dots$), où, pour un entier $m \geq 0$, $F^{(m)}$ désigne la dérivée de F d'ordre m . Il est connu qu'une fonction de Bernstein est de la forme

$$F(t) = c_1 + c_2 t + \int (1 - \exp(-tu)) d\sigma(u),$$

où c_i ($i = 1, 2$) et σ sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive dans $(0, +\infty)$ avec

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t} d\sigma(t) < +\infty$$

(cf. par exemple, [4]).

Montrons le lemme 2. Supposons d'abord que κ est un noyau de convolution de Hunt borné sur $\mathbf{R}$, et soit $(\kappa_p)_{p \geq 0}$ la résolvante associée au noyau κ . Alors $p \int d\kappa_p \leq 1$ ($\forall p > 0$). On a, quel que soit $p > 0$, $\tilde{\kappa}_p(t) < 1/p$ dans $(0, +\infty)$. En effet, si $\text{supp}(\kappa_p) \neq \{0\}$, alors cela est évident. S'il existe un nombre $p > 0$ tel que $\text{supp}(\kappa_p) = \{0\}$, alors, quel que soit

$q \geq 0$, $\text{supp } (\kappa_q) = \{0\}$, et par suite $q \int d\kappa_q < 1$. D'après l'égalité

$$\kappa = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (p\kappa_p)^n, \quad \text{où} \quad (p\kappa_p)^m = (p\kappa_p)^{m-1} * (p\kappa_p) \quad (m \geq 2),$$

la transformée de Laplace $\tilde{\kappa}$ de κ est une fonction positive et continue dans $(0, +\infty)$. On a, quels que soient $p > 0$ et $q > 0$,

$$\frac{1 - p\tilde{\kappa}_p}{\tilde{\kappa}_p} = \frac{1 - q\tilde{\kappa}_p}{\tilde{\kappa}_q}.$$

Notons F cette fonction dans $(0, +\infty)$; alors $\tilde{\kappa} = 1/F$. La famille $(p(1 - p\tilde{\kappa}_p))_{p>0}$ converge uniformément vers F sur tout compact de $(0, +\infty)$ avec $p \rightarrow +\infty$, car

$$\tilde{\kappa} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p(1 - p\tilde{\kappa}_p)}.$$

Donc F est une fonction de Bernstein, d'où la condition est nécessaire.

Montrons ensuite que la condition est suffisante. Pour cela, il suffit de voir que, quel que soit $p > 0$, il existe un noyau de convolution sur $\mathbf{R}$ porté par $\mathbf{R}^+$ tel que $\tilde{\kappa}_p = 1/(p + F)$, car si c'est vrai, $(\kappa_p)_{p \geq 0}$ est évidemment la résolvante associée au noyau κ , où $\kappa_0 = \kappa$. Écrivons

$$F(t) = c_1 + c_2 t + \int (1 - \exp(-tu)) d\sigma(u),$$

où c_i ($i = 1, 2$) et σ sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive dans $(0, +\infty)$ avec $\int \frac{t}{1+t} d\sigma(t) < +\infty$.

Posons

$$\nu_n = \frac{c_2 n \varepsilon_{1/n} + \sigma_n}{p + c_1 + c_2 n + \int d\sigma_n},$$

où $\varepsilon_{1/n}$ est la mesure de Dirac au point $1/n$ dans $\mathbf{R}$ et σ_n est la restreinte de σ sur $[1/n, +\infty)$. Alors la suite

$$\left((p + c_1 + c_2 n + \int d\sigma_n)(1 - \tilde{\nu}_n) \right)_{n=1}^{\infty}$$

converge uniformément vers $p + F$ sur tout compact de $\mathbf{R}^+$ avec $n \rightarrow +\infty$, et par suite la suite

$$\left(\frac{1}{p + c_1 + c_2 n + \int d\sigma_n} \sum_{m=0}^{\infty} (\nu_n)^m \right)_{n=1}^{\infty}$$

converge vaguement, où $(\nu_n)^0$ est la mesure de Dirac dans R . Notons κ_p sa limite; alors $\tilde{\kappa}_p = 1/(p + F)$, d'où la condition est suffisante.

THÉORÈME 3. Soient N_0 un noyau de convolution de Hunt borné sur X et ψ_0 la fonction définie-négative associée au noyau N_0 . Pour qu'un noyau de convolution N sur X appartienne à $H(N_0; X)$, il faut et il suffit que N soit un noyau de convolution de Hunt borné sur X et que la fonction définie-négative associée au noyau N soit de la forme $F(\psi_0)$, où F est une fonction de Bernstein.

On remarque, d'après la représentation d'une fonction de Bernstein, qu'une fonction de Bernstein est considérée comme une fonction sur $\{z \in C; \operatorname{Re} z \geq 0\}$, où C est le champ complexe.

Démonstration du théorème 3. Supposons d'abord que N appartient à $H(N_0; X)$. Alors il existe un noyau de convolution de Hunt borné sur R porté par R^+ tel que $N = \int \alpha_t d\kappa(t)$, où $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est le semi-groupe associé au noyau N_0 . Soit $(\kappa_p)_{p \geq 0}$ la résolvante associée au noyau κ ; alors, quel que soit $p > 0$, $\iint d\alpha_t d\kappa_p(t) \leq 1/p$ et

$$\int \hat{\alpha}_t d\kappa_p(t) = \int \exp(-t\psi_0) d\kappa_p(t) = \frac{1}{p + F(\psi_0)},$$

où F est une fonction de Bernstein telle que $\tilde{\kappa} = 1/F$ dans $(0, +\infty)$, et donc la fonction définie-négative associée au noyau N est égale à $F(\psi_0)$.

Montrons ensuite que la condition est suffisante. De la même manière que dans le présent lemme, pour un nombre $p > 0$ quelconque, il existe un noyau de convolution de Hunt borné κ_p sur R porté par R^+ tel que $\tilde{\kappa}_p = 1/(p + F)$. Evidemment $(\kappa_p)_{p > 0}$ est une résolvante. On a, quelle que soit φ de $C_K^+(X)$,

$$N * \varphi \geq \int \alpha_t * \varphi d\kappa_p(t) \quad (\forall p > 0).$$

$(\alpha_t)_{t \geq 0}$ étant semi-groupe et ayant $\alpha_t \rightarrow \varepsilon$ (vaguement) avec $t \rightarrow 0$, $(\kappa_p)_{p > 0}$ est vaguement bornée. Par conséquent, il existe un noyau de convolution de Hunt borné κ sur R porté par R^+ tel que $\tilde{\kappa} = 1/F$ dans $(0, \infty)$. Donc $N = \int \alpha_t d\kappa(t)$, d'où $N \in H(N_0; X)$. La démonstration est ainsi complète.

3. La famille sous-ordonnée au noyau newtonien

Dès maintenant, soit X l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ à n (≥ 3) dimensions. Pour un point x de $\mathbf{R}^n$, on note $|x|$ la distance entre x et l'origine. On notera symboliquement γ^{2-n} le noyau newtonien $|x|^{2-n} dx$ sur $\mathbf{R}^n$. Rappelons d'abord le théorème de Schoenberg.

PROPOSITION 3 (cf. par exemple, [3]). Soit $F(t)$ une fonction finie et continue sur $\mathbf{R}^+$. Pour que, quel que soit n un entier ≥ 1 , $F(|x|)$ soit de type positif dans $\mathbf{R}^n$, il faut et il suffit que F soit de la forme

$$F(t) = \int \exp(-t^2 u) d\mu(u),$$

où μ est une mesure de Radon positive dans $\mathbf{R}^+$ de masse totale finie.

La présente proposition porte naturellement la définition suivante.

DÉFINITION. Soient φ une fonction finie et continue sur $\mathbf{R}^+$ et k un entier > 0 . On dit que φ appartient à DN_k si la fonction $\varphi(|x|)$ dans $\mathbf{R}^k$ est définie-négative. Si l'on a, quel que soit k un entier positif, $\varphi \in DN_k$, alors on écrit $\varphi \in DN_\infty$.

Il est évident que si $k_1 \leq k_2$, $DN_{k_1} \supset DN_{k_2}$. Notre quatrième théorème est une caractérisation de la famille sous-ordonnée au noyau newtonien γ^{2-n} .

THÉOREME 4. Soit N un noyau de convolution sur $\mathbf{R}^n$. Pour que N appartienne à $H(\gamma^{2-n}; \mathbf{R}^n)$, il faut et il suffit que N soit un noyau de convolution de Hunt sur $\mathbf{R}^n$ et qu'il existe une fonction φ de DN_∞ telle que la fonction définie-négative associée au noyau N soit égale à $\varphi(|x|)$ sur $\mathbf{R}^n$.

Démonstration. Supposons d'abord $N \in H(\gamma^{2-n}; \mathbf{R}^n)$ et soit ψ la fonction définie-négative associée au noyau N ; alors, d'après le théorème 3, il existe constantes $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$ et une mesure de Radon positive σ dans $(0, +\infty)$ avec $\int \frac{t}{1+t} d\sigma(t) < +\infty$ telles que

$$\psi(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + \int (1 - \exp(-t|x|^2)) d\sigma(t),$$

car il existe une constante $c > 0$ telle que $\widehat{\gamma^{2-n}} = c|x|^{-2}$. Quel que soit k un entier positif, la fonctions $|x|^2$ et $1 - \exp(-t|x|^2)$ ($\forall t \geq 0$) dans $\mathbf{R}^k$

sont définie-négatives, d'où la condition est nécessaire.

Montrons que la condition est suffisante. Pour tout entier $k > 0$, la fonction $\varphi(|x|)$ est définie-négative dans $\mathbf{R}^k$, et par suite, quel que soit $p > 0$, la fonction $1/(p + \varphi(|x|))$ dans $\mathbf{R}^k$ est de type positif. D'après la proposition 3, il existe une mesure de Radon positive κ_p dans $\mathbf{R}^+$ de masse totale finie telle que

$$\frac{1}{p + \varphi(|x|)} = \int \exp(-t|x|^2) d\kappa_p(t)$$

dans $\mathbf{R}^k$. On a, quels que soient $p > 0$ et $q > 0$,

$$\begin{aligned} & \int \exp(-ts) d\kappa_p(s) - \int \exp(-ts) d\kappa_q(s) \\ &= (q - p) \int \exp(-ts) d\kappa_p(s) \int \exp(-ts) d\kappa_q(s) \end{aligned}$$

pour tout t de $\mathbf{R}^+$. D'après le fait que la transformation de Laplace est injective, on obtient que $(\kappa_p)_{p>0}$ est une résolvante de noyau de convolution sur $\mathbf{R}$. De la même manière que dans le théorème 3, on peut montrer $N \in H(r^{2-n}; \mathbf{R}^n)$. La démonstration est ainsi complète.

BIBLIOGRAPHIES

- [1] J. Deny: Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$. Sémin. B-C-D, 4ème année, 1959/60, no. 5.
- [2] —: Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale. Ann. Inst. Fourier, **12**, 1962, 643–667.
- [3] W. F. Donoghue, Jr: Distributions and Fourier transforms. Acad. press, New York, 1969.
- [4] C. S. Herz: Analyse harmonique à plusieurs variables. Sémin. Math. d'Orsay, 1965/66.
- [5] I. Higuchi et M. Itô: Characterization of the relative domination principle. Nagoya Math. J., **50**, 1973, 175–184.
- [6] M. Itô: Sur les principes divers du maximum et le type positif. Nagoya Math. J., **44**, 1971, 133–164.
- [7] —: Sur le principe de domination pour les noyaux de convolution. Nagoya Math. J., **50**, 1973, 149–173.
- [8] —: Caractérisation du principe de domination pour les noyaux de convolution, à paraître.
- [9] —: Sur la famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt, Nagoya Math. J., **51**, 1973, 45–56.
- [10] M. Kishi: Puissance fractionnaire d'un noyau positif dont le carré est encore un noyau. Nagoya Math. J., **44**, 1971, 79–88.