

CLASSIFICATION D'ORBITES POUR UNE CLASSE D'ESPACES PRÉHOMOGÈNES

IRIS MULLER

Résumé. Dans cet article, on donne la classification des orbites des préhomogènes de type parabolique $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ correspondants aux paraboliqes maximaux, notés (Δ, λ_0) , suivants: (A_{2n-1}, α_n) , (B_n, α_1) ou (D_n, α_1) , (C_n, α_n) , (D_{2n}, α_{2n}) ou (D_{2n}, α_{2n-1}) , (E_7, α_7) , (F_4, α_1) , (E_6, α_2) , (E_7, α_1) , (E_8, α_8) lorsque $\mathbb{F}$ est un corps local ou global de caractéristique zéro, à l'aide de formes quadratiques, ceci lorsque le sous-espace radiciel $\mathfrak{g}^{\lambda_0}$ est de dimension un.

§1. Introduction, rappels et notations

Soit $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=-p}^{i=p} \mathfrak{g}_i$ une algèbre de Lie semi-simple graduée de dimension finie, définie sur un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique zéro. On note H_0 l'élément de $\mathfrak{g}$ définissant la graduation:

$$\mathfrak{g}_i = \{x \in \mathfrak{g} \mid [H_0, x] = ix\}$$

G le centralisateur de H_0 dans le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui sont élémentaires sur une clôture algébrique de $\mathbb{F}$, G_e le groupe des automorphismes élémentaires de $\mathfrak{g}_0$, qui centralisent donc H_0 .

G opère sur chaque $\mathfrak{g}_i$, et l'action de G sur $\mathfrak{g}_1$ est géométriquement préhomogène. On considère le triplet $(G, Ad, \mathfrak{g}_1)$ que l'on note de manière infinitésimale $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$ ou encore $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$.

Le problème de déterminer les orbites de G dans $\mathfrak{g}_1$ a été résolu dans le cas algébriquement clos dans [21]. Plus généralement les orbites de G dans $\mathfrak{g}_1$ ont été déterminées dans un certain nombres d'exemples par des démonstrations cas par cas.

Il existe une famille de préhomogènes pour lesquels la description des orbites se donne simplement à l'aide de systèmes de racines et formes quadratiques ([11], [12]).

Rappelons brièvement de quels préhomogènes il s'agit.

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre abélienne déployée maximale de $\mathfrak{g}$ contenant H_0 (ou ce qui revient au même une sous-algèbre abélienne déployée maximale de $\mathfrak{g}_0$). On note Δ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, il est également gradué par H_0 :

$$\Delta_i = \{\lambda \in \Delta / \lambda(H_0) = i\}$$

L'ordre considéré est toujours tel que toute racine de Δ_i , $i > 0$ soit positive. W est le groupe de Weyl associé à Δ et $W_0 = \{w \in W / w(H_0) = H_0\}$ celui associé à Δ_0 . On note B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

DEFINITION 1.1. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est dit quasi commutatif si il existe des racines de Δ_1 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, deux à deux fortement orthogonales dont la somme des co-racines vaut $2H_0$.

Dans ces conditions, sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ engendrent $\mathfrak{g}$ ([13]), ce que l'on supposera dorénavant.

DEFINITION 1.2. On suppose que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est quasi commutatif, on appelle système orthogonal maximal un ensemble de racines de Δ_1 , deux à deux fortement orthogonales, ayant un nombre maximal d'éléments que l'on note n .

Notons que la somme des co-racines d'un système orthogonal maximal vaut $2H_0$ (proposition 4.4 de [13]). Rappelons que tout élément x non nul de $\mathfrak{g}_1$ se complète en un sl_2 -triplet (x, h, y) tel que h soit dans $\mathfrak{g}_0$ et y dans $\mathfrak{g}_{-1}$. Un tel sl_2 -triplet est dit 1-adapté et un tel h est dit 1-simple.

PROPOSITION 1.3. *On suppose que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est quasi commutatif, alors*

- 1) $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ pour $|i| \geq 3$
- 2) Deux systèmes orthogonaux maximaux sont conjugués par W_0
- 3) Les orbites de G dans les éléments 1-simples sont en bijection avec $W_0 \backslash W/W_0 - W_0$.

(propositions 4.1, 4.4 et corollaire 4.6 de [13])

Soit $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ un système orthogonal maximal de co-racines respectives $h_1, \dots, h_n$, fixé. Le 3) de cette proposition énonce que tout h 1-simple est dans l'orbite de G_e d'un élément de la forme $\sum_{i \in I} h_i$, I étant une partie non vide de $\{1, \dots, n\}$.

Pour toute racine μ de Δ , on note $\mathfrak{g}^\mu$ le sous-espace radiciel associé à μ et h_μ la co-racine de μ .

DEFINITION 1.4. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ quasi commutatif est dit presque déployé si les sous-espaces radiciels $\mathfrak{g}^{\lambda_i}$ sont tous de dimension un.

Dans [11] on a montré que la classification des orbites des préhomogènes quasi commutatifs presque déployés, lorsque Δ est irréductible, se fait de manière analogue à la classification des formes quadratiques, lorsque $\mathbb{F}$ est un corps local ou global de caractéristique zéro. Sous ces hypothèses les orbites de G non réduites à 0 sont classées par trois invariants. Soit $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ engendrée par h_i , $1 \leq i \leq n$, et R le système de racines obtenu à partir des restrictions non nulles de Δ à $\mathfrak{b}$ (cf. [13] ainsi que la démonstration de la proposition 2.2.1 de cet article). Les trois invariants sont alors donnés par: l'orbite 1-simple associée, la valeur d'un caractère (éventuellement trivial), et une classe de formes quadratiques déterminées par le système de racines R . L'objet de cet article est de donner les orbites des préhomogènes quasi commutatifs presque déployés pour lesquels le sous-groupe de W_0 défini par

$$\{w \in W_0 / w\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}\}$$

est en surjection avec le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, ce qui est équivalent à supposer que R est de type C_n ou F_4 (propositions 5.1.3 et 6.6 de [13]). En effet, si on définit le rang d'un élément par la

DEFINITION 1.5. Soit (x, h, y) un sl_2 -triplet 1-adapté, on appelle rang de x ou de h la quantité $r(x) = r(h) = \frac{nB(h, H_0)}{2B(H_0, H_0)}$.

Lorsque R est de type C_n ou F_4 , deux éléments 1-simples sont dans la même orbite si et seulement si ils ont même rang, de plus on utilise essentiellement les mêmes automorphismes élémentaires pour démontrer les conditions suffisantes de caractérisation des orbites. Ces résultats serviront ultérieurement à

- donner un calcul des coefficients de la fonction Zéta locale lorsque $R = C_n$ (annoncé dans [9])
- donner une fonction Zéta adélique avec son prolongement lorsque $R = \Delta = F_4$.

Rappelons que, comme $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ engendrent $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$ est un $\mathfrak{g}_0$ -module simple si et seulement si $\bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i$ est une sous-algèbre parabolique maximale ([14]); lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est quasi-commutatif, $\mathfrak{g}_1$ est un $\mathfrak{g}_0$ -module simple lorsque Δ est irréductible (proposition 5.1.1 de [13]), on note alors λ_0

l'unique racine simple de Δ_1 pour l'ordre choisi et suivant [14] on adopte la notation (Δ, λ_0) ainsi que (R, λ_0) , on prend sur R le même ordre que celui de Δ ; on rappelle alors le résultat suivant déduit de la proposition 6.6 de [13]:

PROPOSITION 1.6. *Soit $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ quasi-commutatif alors*

- 1) *R est de type C_n si et seulement si (Δ, λ_0) est de type (A_{2n-1}, α_n) , (C_n, α_n) , (D_{2n}, α_{2n}) ou (D_{2n}, α_{2n-1}) , (E_7, α_7) , (B_n, α_1) ou (D_n, α_1) (et $\Delta_2 = \emptyset$)*
- 2) *R est de type F_4 si et seulement si (Δ, λ_0) est de type (F_4, α_1) , (E_6, α_2) , (E_7, α_1) , (E_8, α_8) (et $\Delta_2 = \{\omega\}$).*

Par les propositions 6.4, et 2) de 5.1.1 de [13], $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ quasi-commutatif de type (Δ, λ_0) , avec Δ irréductible et (Δ, λ_0) différent de (G_2, α_2) ou (B_{2k-1}, α_k) , est presque déployé si et seulement si $\mathfrak{g}^{\lambda_0}$ est de dimension un, c'est à dire si la racine λ_0 du diagramme de Satake de (Δ, λ_0) est blanche, non fléchée et non contigüe à une racine noire (i.e. compacte). Donnons un bref descriptif du contenu de cet article. On commence par donner des compléments sur les préhomogènes quasi-commutatifs dans les paragraphes 2 et 3. C'est ainsi que dans le paragraphe 2, après avoir précisé la décomposition de G (lemme 2.1), on montre que le système de racines R correspond au système de racines d'une sous-algèbre semi-simple déployée de $\mathfrak{g}$, notée $\mathfrak{g}_R$ (proposition 2.2.1). On y construit également les automorphismes de base associés aux racines de Δ_2 (paragraphe 2.3 et lemme 2.3.1). Dans le paragraphe 3, on suppose que le préhomogène quasi-commutatif est de plus presque déployé et que $\mathfrak{g}_1$ est un $\mathfrak{g}_0$ -module simple. On y donne la forme explicite de la forme quadratique invariante construite à partir de la restriction de la forme de Killing au centralisateur dans $\mathfrak{g}_0$ d'un élément de $\mathfrak{g}_1$ (proposition 3.1.3). On y explicite également le lien entre le degré de l'invariant relatif fondamental du préhomogène et le rang de R (proposition 3.2). Le paragraphe 4 est consacré aux cas particuliers de cet article c'est à dire aux cas où (R, λ_0) est de type (C_n, α_n) (tableau 1) ou (F_4, α_1) (tableau 2) et $\mathfrak{g}^{\lambda_0}$ est de dimension un. Après avoir construit les automorphismes élémentaires de base de ces deux cas (paragraphe 4.1, proposition 4.1.5) et avoir explicité le choix d'une base de Chevalley de $\mathfrak{g}_R$ (proposition 4.1.1), on donne les orbites de ces deux cas (théorèmes 4.2.3 et 4.3.2) ainsi que quelques conséquences (théorème 4.4.2).

Les résultats contenus dans cet article ont été annoncés dans [10].

Voici quelques notations utilisées dans la suite de ce travail:

- 1) Lorsque h appartenant à $\mathfrak{g}_0$ est semi-simple, on note $E_i(h) = \{x \in \mathfrak{g} / [h, x] = ix\}$.
- 2) Si $\mathfrak{c}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on définit $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}_i$.
- 3) Soit $\mathfrak{c}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, réductive dans $\mathfrak{g}$ alors le centralisateur de $\mathfrak{c}$, encore noté $E_0(\mathfrak{c})$, est une algèbre réductive dans $\mathfrak{g}$ ([2]) dont on note $\mathfrak{U}(\mathfrak{c})$ sa partie semi-simple.
Lorsque H_0 est un élément de la sous-algèbre $\mathfrak{c} + E_0(\mathfrak{c})$, $\mathfrak{c}$ est graduée: $\mathfrak{c} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{c})$ est également graduée: $\mathfrak{U}(\mathfrak{c}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{U}(\mathfrak{c})_i$ et de plus pour i non nul on a $\mathfrak{U}(\mathfrak{c})_i = (E_0(\mathfrak{c}))_i$.
- 4) Lorsque (x, h, y) est un sl_2 -triplet, on note $h_h(t)$ (resp. $\theta_{x,y}$) l'automorphisme élémentaire défini par $\theta_{x,y}(t)\theta_{x,y}(-1)$ (resp. $\theta_{x,y}(1)$) avec

$$\theta_{x,y}(t) = \exp(ad(tx)) \exp(ad(t^{-1}y)) \exp(ad(tx)) \quad ([2]).$$

Dans le cas particulier où h est la co-racine d'une racine μ de Δ , on note simplement $h_\mu(t)$ l'élément $h_h(t)$ et pour i variant de 1 à n , $h_i(t) = h_{\lambda_i}(t)$. Rappelons que la restriction de $h_\mu(t)$ à $\mathfrak{g}^\lambda$, $\lambda \in \Delta$, est l'homothétie de rapport $t^{n(\lambda, \mu)}$

- 5) Pour t élément de $\mathbb{F}^*$, $c(t)$ désigne l'automorphisme de G dont la restriction à $\mathfrak{g}_1$ est $tId_{\mathfrak{g}_1}$.
- 6) Pour x élément de $\mathfrak{g}$, G_x (resp. $\text{Aut}(\mathfrak{g})_x$) désigne le centralisateur de x dans G (resp. $\text{Aut}(\mathfrak{g})$).

Notons que dans les paragraphes 2.1 et 2.2, on ne suppose pas que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est presque déployé et que dans les paragraphes 2 et 3 $(x_i, h_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille quelconque de sl_2 -triplets 1-adaptés.

- 7) Une racine λ de Δ_1 est appelée 1-longue (resp. 1-courte) si elle est longue (resp. courte) parmi les racines de Δ_1 qui sont dans la même composante irréductible que λ .

§2. Compléments sur les préhomogènes quasi commutatifs: construction d'automorphismes élémentaires

2.1. Une précision sur les groupes

LEMME 2.1. 1) $\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0} = G_e \cdot \bigcap_{1 \leq i \leq n} \text{Aut}(\mathfrak{g})_{h_i}$ et $G = G_e \cdot \bigcap_{1 \leq i \leq n} G_{h_i}$
 2) Soit $1 \leq p < n$, si x et x' sont deux éléments de $\bigoplus_{1 \leq i \leq p} (\mathfrak{g}^{\lambda_i} - \{0\})$, dans la même orbite de G (resp. G_e), alors x et x' sont dans la même orbite du centralisateur dans G (resp. G_e) de $h = \sum_{1 \leq i \leq p} h_i$ et de h_i pour $p+1 \leq i \leq n$.

Démonstration. 1) Résulte du 2) de la proposition 1.3 et de la conjugaison des sous-algèbres abéliennes, déployées, maximales de $\mathfrak{g}_0$ par G_e ([19]).

2) Soit $(x, h = \sum_{1 \leq i \leq p} h_i, y)$ un sl_2 -triplet 1-adapté avec y appartenant à $\bigoplus_{1 \leq i \leq p} \mathfrak{g}^{-\lambda_i}$ et $\mathfrak{c}$ l'algèbre réductive dans $\mathfrak{g}$ définie par $\mathfrak{c} = \mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}h \oplus \mathbb{F}y$, $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$ la partie semi-simple du centralisateur de $\mathfrak{c}$. Le préhomogène $(\mathcal{U}(\mathfrak{c})_0, \mathcal{U}(\mathfrak{c})_1)$ est encore quasi-commutatif car $\bigoplus_{p+1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ (resp. $\bigoplus_{p+1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}^{-\lambda_i}$) est inclus dans $\mathcal{U}(\mathfrak{c})_1$ (resp. $\mathcal{U}(\mathfrak{c})_{-1}$). Un système orthogonal maximal de $(\mathcal{U}(\mathfrak{c})_0, \mathcal{U}(\mathfrak{c})_1)$ est donné par $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$. x et x' sont dans la même orbite de G et admettent tout deux h comme élément 1-simple donc ils sont également dans la même orbite de G_h , soit $x = gx'$, avec g dans G_h . A l'action des automorphismes élémentaires de $\mathcal{U}(\mathfrak{c})_0$, $\{gh_{p+1}, \dots, gh_n\}$ correspond à un deuxième système orthogonal maximal de $(\mathcal{U}(\mathfrak{c})_0, \mathcal{U}(\mathfrak{c})_1)$, on applique alors le 2) de la proposition 1.3 ainsi que la proposition 5.1.1 de [13], en notant que lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est quasi commutatif, il y a au plus une racine λ_i 1-courte par composante irréductible de Δ . $\square$

2.2. Existence d'une sous-algèbre

PROPOSITION 2.2.1. Soit $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ un préhomogène quasi commutatif alors il existe une sous-algèbre, $\mathfrak{g}_R$, de $\mathfrak{g}$, semi-simple déployée admettant $\mathfrak{b}$ comme sous-algèbre de Cartan.

Démonstration. Elle découle directement du fait que R est un système de racines. Explicitons la démonstration. Soit $\theta = \prod_{1 \leq i \leq n} s_{\lambda_i}$, s_{λ_i} étant la symétrie relative à la racine λ_i (notons que θ est un représentant dans W/W_0 de l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl W) alors si $\lambda - \theta(\lambda)$ n'est pas une racine de Δ et si $\lambda \neq \theta(\lambda)$, montrons par l'absurde que $\lambda + \theta(\lambda)$ n'est pas une racine de Δ . Supposons que $\mu = \lambda + \theta(\lambda)$ soit

une racine de Δ alors μ est une racine de Δ_0 orthogonale aux racines λ_i , $1 \leq i \leq n$, et par orthogonalité des λ_i

$$\theta(\lambda) = \lambda - \sum_{1 \leq i \leq n} n(\lambda, \lambda_i) \lambda_i, \quad \lambda = \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} n(\lambda, \lambda_i) \lambda_i$$

Soit

$$\delta = \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ n(\lambda, \lambda_j) < 0}} s_j(\lambda) = \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} |n(\lambda, \lambda_i)| \lambda_i$$

alors $\delta(H_0) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} |n(\lambda, \lambda_i)|$. Comme $\lambda - \theta(\lambda)$ n'est pas une racine et que $\lambda \neq \theta(\lambda)$, la quantité $n(\theta(\lambda), \lambda)$ est strictement négative et comme λ et $\theta(\lambda)$ ont même longueur, elle vaut -1 donc

$$-n(\theta(\lambda), \lambda) = -2 + \sum_{1 \leq i \leq n} n(\lambda, \lambda_i) \cdot n(\lambda_i, \lambda) = 1$$

ce qui donne l'égalité:

$$(1) \quad \sum_{1 \leq i \leq n} n(\lambda, \lambda_i) n(\lambda_i, \lambda) = 3$$

ainsi $\delta(H_0) > 0$ d'où $\delta \in \Delta_1 \cup \Delta_2$; comme toute racine de Δ_2 est combinaison linéaire des λ_i , $1 \leq i \leq n$, (lemme 4.2 de [13]), δ est dans Δ_1 . Or pour tout i compris entre 1 et n on a $n(\delta, \lambda_i) = |n(\lambda, \lambda_i)| \geq 0$, par la démonstration du lemme 4.3 de [13], deux cas sont alors possibles: soit δ est combinaison linéaire des λ_i , $1 \leq i \leq n$, ce qui est absurde, soit, à l'indexation près, on a les égalités:

$$n(\delta, \lambda_1) = n(\lambda_1, \delta) = n(\delta, \lambda_2) = n(\lambda_2, \delta) = 1, \quad n(\delta, \lambda_i) = 0 \quad \text{pour } i \geq 3$$

ce qui est incompatible avec (1).

Montrons que pour toute racine μ de R il existe un sl_2 -triplet 1-adapté $(X_\mu, h_\mu, X_{-\mu})$ tel que X_μ (resp. $X_{-\mu}$) soit dans $\bigcap_{1 \leq i \leq n} E_{\mu(h_i)}(h_i)$ (resp. $\bigcap_{1 \leq i \leq n} E_{-\mu(h_i)}(h_i)$). Soit λ dans Δ tel que $\lambda/\mathfrak{b} = \mu$, et considérons $\lambda' = \frac{1}{2}(\lambda - \theta(\lambda))$ alors $\lambda'/\mathfrak{b} = \mu$ donc $\lambda \neq \theta(\lambda)$. Comme R est réduct (proposition 6.6 de [13]), $2\lambda'$ n'est pas dans Δ donc $\lambda \pm \theta(\lambda)$ n'est pas une racine. Premier cas: $n(\lambda, \theta(\lambda)) < 0$ donc $\lambda = -\theta(\lambda)$ et $\lambda' = \lambda$ alors $h_\mu = h_\lambda$, on prend le sl_2 -triplet suivant $(X_\lambda, h_\mu, X_{-\lambda})$ avec X_λ (resp. $X_{-\lambda}$) dans $\mathfrak{g}^\lambda$ (resp. $\mathfrak{g}^{-\lambda}$). Deuxième cas: $\lambda' \notin \Delta$ alors les racines λ et $\theta(\lambda)$ sont fortement

orthogonales et $h_\mu = h_\lambda - h_{\theta(\lambda)}$; soit $(X_\lambda, h_\lambda, X_{-\lambda})$ et $(X_{\theta(\lambda)}, h_{\theta(\lambda)}, X_{-\theta(\lambda)})$ deux sl_2 -triplets tels que X_λ (resp. $X_{-\lambda}$, $X_{\theta(\lambda)}$, $X_{-\theta(\lambda)}$) soient dans $\mathfrak{g}^\lambda$ (resp. $\mathfrak{g}^{-\lambda}$, $\mathfrak{g}^{\theta(\lambda)}$, $\mathfrak{g}^{-\theta(\lambda)}$) alors $(X_\lambda - X_{-\theta(\lambda)}, h_\mu, X_{-\lambda} - X_{\theta(\lambda)})$ est un sl_2 -triplet ayant la propriété demandée. Soit B une base de R correspondant à l'ordre suivant habituel: $\{\mu \in R/\mu(H_0) > 0\} \subset R^+$, alors la sous-algèbre $\mathfrak{g}_R$ engendrée par $(X_\mu, h_\mu, X_{-\mu})_{\mu \in B}$ vérifie les propriétés de la proposition 2.2.1 $\square$

Remarques. 1) La proposition 2.2.1 subsiste pour les préhomogènes faiblement commutatifs avec quelques modifications ([11]).

2) Lorsque $\frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_j)$, $i \neq j$ est une racine de R , par la proposition 2.2.1, il existe un sl_2 -triplet $(A, h_j - h_i, B)$ tel que A et B commutent aux h_k , $k \neq i, j$ et $[h_i, A] = -A$ (resp. $[h_i, B] = B$), $[h_j, A] = A$ (resp. $[h_j, B] = -B$). Un calcul immédiat montre que la restriction de $\theta_{A,B}$ au sous-espace $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ est une involution réduite à l'identité sur $\bigoplus_{1 \leq i \leq n, i \neq j, k} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ telle que $\theta_{A,B}(\mathfrak{g}^{\lambda_j}) = \mathfrak{g}^{\lambda_k}$ (on rappelle que $\theta_{A,B} = \exp(ad(B)) \exp(ad(A)) \exp(ad(B))$). Pour simplifier, on note dorénavant g_A l'élément $\theta_{A,B}$.

Ces sl_2 -triplets sont caractérisés par

LEMME 2.2.2. *On suppose que les racines distinctes λ_i et λ_j sont 1-longues. Soit A non nul commutant avec h_k , $k \neq i$ et j et vérifiant $[h_j, A] = -[h_i, A] = A$ alors $ad(A)^2$ restreinte à $\mathfrak{g}^{\lambda_i}$ est injective si et seulement si il existe un élément B appartenant à $\mathfrak{g}_0$ tel que $(A, h_j - h_i, B)$ soit un sl_2 -triplet et dans ce cas si (A, u, B) est un sl_2 -triplet de $\mathfrak{g}_0$ pour lequel u commute à $\mathfrak{b}$, on a $u = h_j - h_i$.*

Démonstration. 1) La condition est suffisante de manière évidente car d'après les propriétés usuelles des sl_2 -triplets, $ad(A)^2$ est une bijection de $E_{-2}(h)$ sur $E_2(h)$, avec $h = h_j - h_i$ ([2], chapitre 8, paragraphe 1 n°2, corollaire).

2) Montrons que la condition est nécessaire.

Soit (A, u, B) un sl_2 -triplet de $\mathfrak{g}_0$.

On peut toujours supposer que u commute à $\mathfrak{b} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathbb{F}h_i$, pour ceci il suffit de choisir B dans $E_1(h_i) \cap E_{-1}(h_j) \bigcap_{k \neq i, j} E_0(h_k)$. Réciproquement, si u commute à $\mathfrak{b}$, une vérification immédiate montre que la composante, notée B' , de B suivant le sous-espace $E_1(h_i) \cap E_{-1}(h_j) \bigcap_{k \neq i, j} E_0(h_k)$ est non nulle (car $[A, B'] = -u$) et que (A, u, B') est encore un sl_2 -triplet. Nous

choisirons donc dorénavant B dans $E_1(h_i) \cap E_{-1}(h_j) \cap_{k \neq i,j} E_0(h_k)$. Soient (x, h_i, y) un sl_2 -triplet 1-adapté et $\theta_{A,B}$ l'automorphisme élémentaire associé à (A, u, B) , un calcul facile donne alors

$$1 \leq k \neq i, j \leq n \quad \theta_{A,B}(h_k) = h_k \quad \theta_{A,B}(h_i) = h_i + u \quad \theta_{A,B}(h_j) = h_j - u.$$

λ_i étant 1-longue, tout élément non nul de $E_2(h_i) \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ se complète en un sl_2 -triplet 1-adapté d'élément 1-simple h_i , ceci est encore vérifié pour tout élément non nul de $E_2(\theta_{A,B}(h_i)) \cap \mathfrak{g}_1 = \theta_{A,B}(\mathfrak{g}^{\lambda_i})$ avec $\theta_{A,B}(h_i)$. Or $\theta_{A,B}(h_i)$ commute aux $(h_k)_{1 \leq k \leq n}$ donc $\theta_{A,B}(x)$ est encore un vecteur propre de chaque $ad(h_k)$ mais la projection de $\theta_{A,B}(x)$ selon g^{λ_j} est donnée par $adA^2(x)/2$, qui est non nulle par hypothèse, donc $g_A(x) = adA^2(x)/2$ et est un élément non nul de g^{λ_j} . Rappelons que $ad(A)^3(x) = [B, x] = 0$ car λ_j est 1-longue. Comme

$$0 \neq B(x, y) = B(\theta_{A,B}(x), \theta_{A,B}(y))$$

la projection de $\theta_{A,B}(y)$ selon $g^{-\lambda_j}$ est également non nulle donc $\theta_{A,B}(y)$ est un élément non nul de $g^{-\lambda_j}$ d'où le sl_2 -triplet $(\theta_{A,B}(x), \theta_{A,B}(h_i), \theta_{A,B}(y))$ est tel que $\theta_{A,B}(x)$ (resp. $\theta_{A,B}(y)$) est dans g^{λ_j} (resp. $g^{-\lambda_j}$) donc $\theta_{A,B}(h_i) = h_j$ or $\theta_{A,B}(h_i) = h_i + u$ d'où $u = h_j - h_i$. $\square$

2.3. Calculs dans un préhomogène de type (D_4, α_2)

Supposons que $\omega = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)/2$ soit une racine de Δ_2 (à l'indexation près), alors le sous-ensemble de Δ constitué des racines suivantes

$$D_4^{(\omega)} = \{\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \pm\lambda_3, \pm\lambda_4, \frac{1}{2}(\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \lambda_3 \pm \lambda_4)\}$$

est un système de racines de type D_4 , on peut prendre comme racines simples:

$$\Sigma = \{\lambda_1, \frac{1}{2}(-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4), \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)\}$$

La sous-algèbre $\mathfrak{g}^{(\omega)}$ de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in D_4^{(\omega)}$, graduée par $(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)/2$ donne un préhomogène quasi-commutatif de type (D_4, α_2) . On suppose que $\mathfrak{g}^\omega$ est de dimension un, alors l'algèbre $\mathfrak{g}^{(\omega)}$ est déployée et soit X_ω un élément non nul de $\mathfrak{g}^\omega$. On note $\omega_i = \omega - \lambda_i$, et $\tilde{X}_{\omega_i} = [y_i, X_\omega]$, $\tilde{X}_{\omega_{i,j}} = [y_j, [y_i, X_\omega]]$, etc et

$$c_\omega = -\frac{B([y_1, [y_2, [y_3, [y_4, X_\omega]]]], X_\omega)}{2B(h_1, h_1)}$$

et $(x_i, h_i, y_i)_{1 \leq i \leq 4}$ est une famille fixée de sl_2 -triplets 1-adaptés

LEMME 2.3.1. 1) Soient a_1, a_2, a_3, a_4 des éléments de $\mathbb{F}^*$, s dans $\mathbb{F}$
 $g(a, s) = \exp(ad(-a_2 a_4 s X_{\omega_{1,3}})) \exp(ad(-a_2 a_3 s X_{\omega_{1,4}})) \exp(ad(a_1 a_2 s X_{\omega_{3,4}}))$
 alors $g(a, s)(\sum_{1 \leq i \leq 4} a_i x_i) = a_1 x_1 + a_2 A_p(2s)x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 - \frac{2sp}{a_1} \tilde{X}_{\omega_1}$ avec
 $p = \prod_{1 \leq i \leq 4} a_i$ et $A_p(s) = 1 + c_\omega p s^2$.

En particulier $\sum_{1 \leq i \leq 4} a_i x_i$ et $a_1 x_1 + a_2 A_p(s)x_2 + a_3 A_p(s)^{-1} x_3 + a_4 x_4$ sont dans la même orbite de G_e

2) Soient u et t non nuls alors $ux_1 + t\tilde{X}_{\omega_1}$ et $\sum_{1 \leq i \leq 4} a_i x_i$ vérifiant $-c_\omega \cdot \prod_{1 \leq i \leq 4} a_i \in \mathbb{F}^{*2}$ sont dans la même orbite de G .

3) Pour tout x dans $\bigoplus_{1 \leq i \leq 4} \mathfrak{g}^{\lambda_i} \oplus \mathfrak{g}^{\omega - \lambda_4}$ il existe g dans G_e tel que gx soit dans $\bigoplus_{1 \leq i \leq 4} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$.

Démonstration. 1) C'est un calcul. En échangeant les rôles de 2 et 3 dans $g(a, s)$, on obtient:

$$g(a', t)(\sum_{1 \leq i \leq 4} a'_i x_i) = a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 A_{p'}(t)x_3 + a'_4 x_4 - \frac{2tp'}{a'_1} \tilde{X}_{\omega_1}$$

avec $p' = \prod_{1 \leq i \leq 4} a'_i$. L'égalité

$$g(a, s)(\sum_{1 \leq i \leq 4} a_i x_i) = g(a', t)(\sum_{1 \leq i \leq 4} a'_i x_i)$$

implique que

$$\sum_{1 \leq i \leq 4} a_i x_i \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i \leq 4} a'_i x_i$$

sont dans la même orbite de G_e .

2) On peut supposer que $p = \frac{-1}{4c_\omega}$ alors $A_p(2) = 0$ et

$$g(a, 1)(\sum_{1 \leq i \leq 4} a_i x_i) = a_1 x_1 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \frac{1}{2c_\omega a_1} \tilde{X}_{\omega_1}$$

On vérifie sans peine que:

$$g'g(a, 1)(\sum_{1 \leq i \leq 4} a_i x_i) = a_1 x_1 + \frac{1}{2c_\omega a_1} \tilde{X}_{\omega_1}$$

avec

$$g' = \exp(ad(-\frac{a_3 a_4}{2} \tilde{X}_{\omega_{1,2}})) \exp(ad(\frac{a_1 a_3}{2} \tilde{X}_{\omega_{2,4}})) \exp(ad(\frac{a_1 a_4}{2} \tilde{X}_{\omega_{2,3}}))$$

d'où

$$c\left(\frac{u}{a_1}\right)h_2\left(\frac{2c_\omega a_1^2 t}{u}\right)g'g(a, 1)\left(\sum_{1 \leq i \leq 4} a_i x_i\right) = ux_1 + t\tilde{X}_{\omega_1}$$

3) Soit $x = \sum_{1 \leq i \leq 4} a_i x_i + z$ avec z non nul appartenant à $\mathfrak{g}^{\omega - \lambda_4}$. Deux cas sont à considérer: Premier cas: $a_4 = 0$. Le cas $x = z$ est immédiat car les racines $\omega - \lambda_4$ et λ_1 sont dans la même orbite de W_0 . Sinon il existe i compris entre 1 et 3 tel que $a_i \neq 0$, soit A appartenant à $\mathfrak{g}^{\omega - \lambda_i - \lambda_4}$ tel que $[A, a_i x_i] = -z$, alors $\exp(\text{ad}(A))(x) = \sum_{1 \leq i \leq 3} a_i x_i$. Deuxième cas: $a_4 \neq 0$. On peut toujours supposer qu'au plus une composante a_i est nulle. En effet si $x = a_4 x_4 + z$, soit A non nul dans $\mathfrak{g}^{\omega - \lambda_2 - \lambda_3}$ alors

$$x' = \exp(\text{ad}(A))(x) = a_1 x_1 + a_4 x_4 + z \text{ avec } a_1 x_1 = [A, z] \neq 0$$

De même, soit B non nul dans $\mathfrak{g}^{\omega - \lambda_1 - \lambda_3}$ (resp. C non nul dans $\mathfrak{g}^{\omega - \lambda_3 - \lambda_4}$ tel que $[C, a_4 x_4] = -[B, a_1 x_1]$) alors

$$\exp(\text{ad}C)\exp(\text{ad}B)(x') = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4 x_4 + z \text{ avec } a_2 x_2 = [B, z] \neq 0$$

Soient $x = \sum_{1 \leq i \leq 4} a_i x_i + z$ avec $a_1 a_2 a_4 \neq 0$ et

$$D = \frac{[[[z, a_4 x_4], y_2], y_1]}{2a_1 a_2} \quad B = \frac{[z, y_2]}{2a_2} \quad C = \frac{[z, y_1]}{2a_1}$$

D (resp. B, C) est dans le sous-espace radiciel de $(-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)/2$ (resp. $(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)/2, (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)/2$). On a:

$$\exp(\text{ad}D)\exp(\text{ad}(B + C))(x') = a_1 x_1 + a_2 x_2 + bx_3 + a_4 x_4$$

avec

$$bx_3 = a_3 x_3 + [B, [C, a_4 x_4]] \quad \square$$

Une conséquence est la suivante:

LEMME 2.3.2. *Lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est quasi-commutatif de type (R, λ_0) : (C_n, α_n) ou (F_4, α_1) quasi-déployé, toute orbite de G_e dans $\mathfrak{g}_1$ rencontre $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$.*

Démonstration. Par la proposition 5.2.2 de [13], on sait que pour l'ordre: $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n-1}| \geq \dots \geq |\lambda_1|$, toute orbite de G_e dans $\mathfrak{g}_1$ rencontre $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_i} \bigoplus_{\mu \in \Delta_1^-} \mathfrak{g}^\mu$, avec

$$\Delta_1^- = \{\lambda \in \Delta_1 / \exists i \ n(\lambda, \lambda_i) = -1, \ n(\lambda, \lambda_j) = 0 \text{ pour } i + 1 \leq j \leq n\}.$$

Lorsque (R, λ_0) est de type (C_n, α_n) on a $\Delta_2 = \emptyset$ donc $\Delta_1^- = \emptyset$. Dans le cas où (R, λ_0) est de type (F_4, α_1) , on a $\Delta_2 = \{\omega\}$ donc $\Delta_1^- = \{\omega - \lambda_4\}$, il suffit d'appliquer le 3) du lemme 2.3.1 $\square$

Remarques. On peut montrer que le lemme 2.3.2 est vérifié pour tout les préhomogènes quasi-commutatifs, presque déployés, n'ayant pas de composantes irréductibles de type G_2 (cf. [11], [12]).

§3. Compléments sur les préhomogènes quasi commutatifs presque déployés: formes quadratiques et invariant relatif fondamental

Dans ce paragraphe, on suppose que le préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est quasi commutatif presque déployé.

3.1. Une forme quadratique

On rappelle que $(x_i, h_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille fixée de sl_2 -triplets 1-adaptés. Lorsque $\lambda = (\lambda_j - \lambda_i)/2$ est une racine de R , par le paragraphe 2.2, le sous-espace $E_{\pm 1, \pm 1}^{i,j}$ est non réduit à $\{0\}$ lorsqu'on note:

$$E_{k,r}^{i,j} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h_i, x] = kx, [h_j, x] = rx, [h_s, x] = 0 \text{ pour } s \neq i, j, 1 \leq s \leq n\}$$

DEFINITION 3.1.1. f_λ est la forme quadratique définie sur $E_{-1,1}^{i,j}$ par

$$f_\lambda(u) = \frac{B(ad(u)^2(x_i), y_j)}{2B(x_j, y_j)}.$$

Remarques 3.1.2. 1) f_λ est non dégénérée. La définition et ce résultat sont encore vrais lorsque le préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ quasi commutatif n'est pas presque déployé.

2) Pour tout élément g de G centralisant tous les h_i , on pose $\phi_g(\lambda_i) = B(g(x_i), y_i)/B(x_i, y_i)$ alors la restriction de g à $\mathfrak{g}^{\lambda_i}$ est donnée par $\phi_g(\lambda_i)\text{Id}_{\mathfrak{g}^{\lambda_i}}$ et $\phi_g(\lambda_i)\phi_g(\lambda_j)f_{(\lambda_j - \lambda_i)/2}$ est équivalente à $f_{(\lambda_j - \lambda_i)/2}$.

Soit x un élément de $\mathfrak{g}_1$, Q_x est la forme quadratique définie par la forme bilinéaire obtenue par restriction de la forme de Killing B au centralisateur de x dans $\mathfrak{g}_0$. $Q_0 = Q$ est la forme quadratique correspondant à la forme de Killing. On utilise les notations suivantes:

$$1) E_0 = \bigcap_{1 \leq i \leq n} E_0(h_i).$$

- 2) Soit J une partie non vide de $\{1, \dots, n\}$, $\mathfrak{Z}_J$ est le centralisateur de $\bigoplus_{i \in J} \mathfrak{g}^{\pm \lambda_i}$ et R_J la restriction de Q à $\mathfrak{Z}_J$.
- 3) On désigne par $R_{i,J} = \{\lambda \in R \mid \lambda(H_0) = i \text{ et } s(\lambda) \subset J\}$ avec $s(\lambda) = \{i \mid n(\lambda, \lambda_i) \neq 0\}$ et $l(\lambda)$ est le cardinal de $s(\lambda)$
- 4) q_0 (resp. q_1) est la forme quadratique en 2 variables

$$q_0(u, v) = u^2 + 3v^2 \quad (\text{resp. } q_1(u, v) = u^2 - v^2)$$

- 5) Pour $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{F}^n$ et $\omega \in \Delta$ on note $a^\omega = \prod_{i=1}^n a_i^{n(\omega, \lambda_i)}$.

On rappelle que lorsque Δ est irréductible, et que (Δ, λ_0) n'est pas de type (G_2, α_2) ou (B_{2k-1}, α_k) , toute racine de $\Delta_2 = R_2$ est de la forme $\omega = (\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l)/2$ avec $1 \leq i < j < k < l \leq n$ et que les différents éléments $X_{\omega_{i,j}}$, c_ω ont été définis dans le paragraphe 2.3.

PROPOSITION 3.1.3. *On suppose que Δ est irréductible et que (Δ, λ_0) n'est pas de type (G_2, α_2) ou (B_{2k-1}, α_k) . Soit $x = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i$. x_i de rang p , $J = \{1, \dots, p\}$, $\frac{-nQ_x}{2B(H_0, H_0)}$ est équivalente à*

$$R_J \bigoplus_{\{\omega \in R_2, s(\omega) \cap J = 2 \text{ elements}\}} c_\omega \cdot \left(\prod_{1 \leq i \leq p} a_i^{n(\omega, \lambda_i)} \right) q_1 \bigoplus_{\{\omega \in R_2, J\}} c_\omega a^\omega q_0 \bigoplus_{\{\lambda \in R_1, J/l(\lambda)=2\}} a^\lambda f_\lambda.$$

Démonstration. Soit $h = \sum_{1 \leq i \leq p} h_i$ alors $(\mathfrak{g}_0)_x = (\mathfrak{g}_0)_{x,h} \bigoplus_{i \geq 1} (E_i(h) \cap \mathfrak{g}_1)_x$. Il suffit donc de déterminer $(\mathfrak{g}_0)_{x,h}$ sachant que

$$\mathfrak{g}_0 = \bigoplus_{\frac{(\lambda_i + \lambda_j)}{2} \in R} (E_{-1,1}^{i,j} \oplus E_{-1,1}^{j,i}) \bigoplus_{\omega \in \Delta_0, l(\omega)=4} \mathfrak{g}^\omega \oplus E_0$$

et que

$$ad(x_i)(E_{-1,1}^{k,l}) = \{0\} \quad \text{si } k \neq i \quad ad(x_i)(E_{-1,1}^{i,l}) = E_{1,1}^{i,l}$$

et si $l(\omega) = 4$:

$$ad(x_i)\mathfrak{g}^\omega = \mathfrak{g}^{\omega + \lambda_i} \quad \text{si } \omega + \lambda_i \in \Delta \quad \text{et } 0 \quad \text{sinon}$$

d'où

$$(\mathfrak{g}_0)_{x,h} = \mathfrak{Z}_J \bigoplus_{\{\lambda \in R_1, l(\lambda)=2, s(\lambda) \subset J\}} \mathfrak{g}^\lambda$$

$$\bigoplus_{\{\omega \in \Delta_2, s(\omega) \subset J\}} \mathfrak{W}^\omega \quad \bigoplus_{\{\omega' \in \Delta_2, s(\omega') \cap J = 2 \text{ elements}\}} \mathfrak{T}^{\omega'}$$

avec

$$\lambda = \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} \quad \mathfrak{V}^\lambda = ad(a_j y_i - a_i y_j) E_{1,1}^{i,j}$$

$$\omega = \frac{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l}{2}, \quad \{i, j, k, l\} \subset J \quad \mathfrak{W}^\omega = \mathbb{F}u_\omega \oplus \mathbb{F}v_\omega$$

et:

$$u_\omega = a_k a_l \tilde{X}_{\omega_{i,j}} - a_i a_l \tilde{X}_{\omega_{j,k}} + a_i a_j \tilde{X}_{\omega_{k,l}} - a_j a_k \tilde{X}_{\omega_{i,l}}$$

$$v_\omega = a_j a_l \tilde{X}_{\omega_{i,k}} - a_j a_k \tilde{X}_{\omega_{i,l}} + a_i a_k \tilde{X}_{\omega_{j,l}} - a_i a_l \tilde{X}_{\omega_{j,k}}$$

$$\omega' = \frac{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l}{2}, \quad s(\omega') \cap J = \{i, j\} \quad \mathfrak{T}^{\omega'} = \mathbb{F}u'_{\omega'} \oplus \mathbb{F}v'_{\omega'}$$

et:

$$u'_{\omega'} = a_j \tilde{X}_{\omega'_{i,k}} - a_i \tilde{X}_{\omega'_{j,k}} \quad v'_{\omega'} = a_j \tilde{X}_{\omega'_{i,l}} - a_i \tilde{X}_{\omega'_{j,l}}$$

Les sous-espaces $\mathfrak{Z}_J$, $\mathfrak{V}^\lambda$, $\mathfrak{W}^\omega$, $\mathfrak{T}^{\omega'}$ sont deux à deux orthogonaux pour B d'où $\frac{-nQ_x}{2B(H_0, H_0)}$ est la somme directe des formes quadratiques R_J , de la restriction à chaque $\mathfrak{V}^\lambda$ qui est équivalente à $a^\lambda f_\lambda$, de la restriction à chaque $\mathfrak{W}^\omega$ qui est équivalente à $c_\omega a^\omega q_0$ et de la restriction à chaque $\mathfrak{T}^{\omega'}$ qui est équivalente à $c_\omega (\prod_{1 \leq i \leq p} a_i^{n(\omega, \lambda_i)}) q_1$. $\square$

3.2. Invariant relatif fondamental

Lorsqu'on a les trois propriétés suivantes:

- i) $\mathfrak{g}_1$ est un $\mathfrak{g}_0$ -module simple
- ii) $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ engendrent $\mathfrak{g}$
- iii) il existe un sous-espace radiciel d'une racine de Δ_1 de dimension un

le centre de $\mathfrak{g}_0$ est de dimension un, engendré par H_0 donc $\mathfrak{g}_1$ est un $\mathfrak{g}_0$ -module absolument simple ([14]), lorsque de plus $2H_0$ est 1-simple, il existe un polynôme non constant, défini sur $\mathfrak{g}_1$, relativement invariant par G , de degré minimal ([18], [14]), noté P et appelé invariant relatif fondamental, le caractère correspondant est noté χ , on a donc

$$\forall x \in \mathfrak{g}_1 \quad \forall g \in (\text{Aut}(\mathfrak{g}))_{H_0} \quad P(g(x)) = \chi(g)P(x)$$

$$(2) \quad P(x) \neq 0 \iff x \text{ admet } 2H_0 \text{ comme élément 1-simple ([14])}$$

PROPOSITION 3.2. *Soit $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ un préhomogène quasi-commutatif, presque déployé tel que Δ soit irréductible et (R, λ_0) n'est pas de type (B_{2k-1}, α_k) ou (G_2, α_2) alors P est de degré n . De plus*

- 1) *Si n est impair, $\chi(\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0}) = \chi(G) = \mathbb{F}^*$.*
- 2) *Si n est pair*
 - i) *Lorsque (R, λ_0) est de type (F_4, α_1) on a $\chi(\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0}) = \chi(G) = \mathbb{F}^{*2}$.*
 - ii) *Lorsque (R, λ_0) est de type (C_n, α_n) , $\chi(\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0})$ est inclus dans $\{s \in \mathbb{F}^* \mid sf_\lambda \sim f_\lambda\}$.*

Démonstration. 1) Soit t un élément de $\mathbb{F}^*$, p le degré de P , comme P est homogène et que $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i$ admet $2H_0$ comme élément 1-simple, on a:

$$\begin{aligned} 0 \neq P\left(t^2 \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)\right) &= t^{2p} P\left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right) \\ &= P\left(\prod_{1 \leq i \leq n} h_i(t) \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right) \right) \\ &= \chi(h_1(t))^n P\left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right) \end{aligned}$$

car toutes les racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont dans la même orbite de W_0 (2) de 5.1.1 et proposition 6.6 de [13]), il suffit de calculer $\chi(h_1(t))$. On utilise la démonstration de la formule des degrés de [18] (proposition 15). L'élément $x = \sum_{2 \leq i \leq n} x_i$ est un représentant d'une orbite de codimension 1 vérifiant $\mathfrak{g}_1/[\mathfrak{g}_0, x] \approx \mathbb{F}x_1$. Or h_1 centralise x et la restriction de $\text{ad}(h_1)$ à $\mathbb{F}x_1$ est égale à 2. Id donc $\chi(h_1(t)) = t^2$. Par la relation (2) on déduit également que

$$(3) \quad P\left(\sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i \right) = \left(\prod_{1 \leq i \leq n} a_i \right) P\left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right).$$

2) Le cas n impair est évident. Lorsque n est pair, on utilise la décomposition de G donné dans le 1) du lemme 2.1. Tout élément g'' de G (ou de $\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0}$) est le produit d'un élément g' de G_e et d'un élément g qui appartient à $\cap_{1 \leq i \leq n} G_{h_i}$ (ou à $\cap_{1 \leq i \leq n} \text{Aut}(\mathfrak{g})_{h_i}$) et par la relation (3) et la définition donnée dans le 2) de la remarque 3.2, on a

$$\chi(g) = \prod_{1 \leq i \leq n} \phi_g(\lambda_i).$$

Lorsque (R, λ_0) est de type (C_n, α_n) avec n pair, on a le résultat par la remarque 3.1.2. Lorsque (R, λ_0) est de type (F_4, α_1) , $\Delta_2 = \{\omega\}$, ϕ_g est un homomorphisme de $D_4^{(\omega)}$ dans $\mathbb{F}^*$, comme

$$\omega, \omega - \lambda_1, \omega - \lambda_1 - \lambda_2, \omega - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3, \omega - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = -\omega$$

sont également des racines de $D_4^{(\omega)}$,

$$\phi_g(\lambda_1)\phi_g(\lambda_2)\phi_g(\lambda_3)\phi_g(\lambda_4) = \phi_g(\omega)^2 \in \mathbb{F}^{*2}. \quad \square$$

Remarques. 1) La proposition 3.2 n'est pas vérifiée dans les cas (G_2, α_2) et (B_{2k-1}, α_k) . En effet dans le cas (G_2, α_2) , P est de degré 4; P est de degré $2k$ dans le cas (B_{2k-1}, α_k) .

2) En utilisant les mêmes arguments que dans la proposition 3.2, on montre élémentairement que lorsque (R, λ_0) est de type (E_8, α_1) ou (B_{2p}, α_p) ou (D_{2p}, α_p) avec p pair, on a $\chi(\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0}) = \chi(G) = \mathbb{F}^{*2}$, et lorsque (R, λ_0) est de type (B_{2p}, α_p) avec p impair, $\chi(\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0})$ est inclus dans $\{s \in \mathbb{F}^* \mid sf_\lambda \sim f_\lambda\}$.

§4. Les orbites des cas pour lesquels (R, λ_0) est de type (C_n, α_n) ou (F_4, α_1) lorsque $\mathbb{F}$ est un corps local ou global de caractéristique 0

Dorénavant on suppose que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est un préhomogène quasi-commutatif, presque déployé pour lequel (R, λ_0) est de type (C_n, α_n) ou (F_4, α_1) .

4.1. Décomposition de $\mathfrak{g}$ et premiers résultats de conjugaison

Nous avons les décompositions suivantes: $R = C_n$ (4)

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &= \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}^{\lambda_i} \bigoplus_{1 \leq k < r \leq n} E_{1,1}^{k,r} \\ \mathfrak{g}_0 &= E(0) \bigoplus_{1 \leq k < r \leq n} (E_{-1,1}^{k,r} \oplus E_{1,-1}^{k,r}) \\ R &= \{\pm \lambda_i, 1 \leq i \leq n, \frac{1}{2}(\pm \lambda_i \pm \lambda_j), 1 \leq i < j \leq n\} \end{aligned}$$

$$R = F_4 \quad (5)$$

$$\mathfrak{g}_1 = \bigoplus_{i=1}^4 \mathfrak{g}^{\lambda_i} \bigoplus_{1 \leq k < r \leq 4} E_{1,1}^{k,r} \bigoplus_{i=1}^4 \mathfrak{g}^{\omega - \lambda_i}$$

$$\mathfrak{g}_0 = E(0) \bigoplus_{1 \leq k < r \leq 4} (E_{-1,1}^{k,r} \oplus E_{1,-1}^{k,r}) \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 4} \mathfrak{g}^{\omega - \lambda_i - \lambda_j}$$

$$R = \{\pm \lambda_i, 1 \leq i \leq 4, \frac{1}{2}(\pm \lambda_i \pm \lambda_j), 1 \leq i < j \leq 4, \frac{1}{2}(\pm \lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \lambda_3 \pm \lambda_4)\}$$

On rappelle que $E(0) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} E_0(h_i)$ et que les sous-espaces radiciels $\mathfrak{g}^{\lambda_i}$ et $\mathfrak{g}^\omega$ sont de dimension un. Soit (k, r) tel que $1 \leq k < r \leq n$

PROPOSITION 4.1.1.

- 1) $E_{1,1}^{k,r} \neq \{0\}$
- 2) Il existe un élément de G_e , $g_{k,r}$ dont la restriction à $\bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ soit une involution qui se réduise à l'identité sur $\bigoplus_{1 \leq i \neq k, r \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ et $g_{k,r}(\mathfrak{g}^{\lambda_k}) = \mathfrak{g}^{\lambda_r}$.
- 3) Il existe un système de Chevalley $(X_\mu, h_\mu, X_{-\mu})_{\mu \in R}$ de l'algèbre déployée $\mathfrak{g}_R$ tel que si l'on pose pour $1 \leq i \leq n$ $x_i = X_{\lambda_i}$ et $y_i = X_{-\lambda_i}$ on a:
 - i) pour toutes racines courtes de R_0 , λ et μ , l'équivalence de f_λ et de f_μ
 - ii) $4c_\omega = 1$ lorsque $R = F_4$.

Démonstration. 1) et 2) Résulte du système de racines R (cf. décompositions (4) et (5)). Il suffit alors d'appliquer la deuxième remarque qui précède le lemme 2.2.2 et le lemme 2.2.2.

3) On fixe un sl_2 -triplet 1-adapté (x_1, h_1, y_1) et $n - 1$ éléments A_i dans $E_{-1,1}^{i,1}$, tels que $ad A_i^2(\mathfrak{g}^{\lambda_i}) \neq 0$ et on définit pour $2 \leq i \leq n$:

$$g_i = g_{A_i} \quad x_i = g_i(x_1) \quad y_i = g_i(y_1)$$

On rappelle que g_A a été défini dans la remarque qui précède le lemme 2.2.2. Soit $f = f_{(\lambda_1 - \lambda_2)/2}$ et $f_{(\lambda_j - \lambda_i)/2}(u) = \frac{B((adu)^2(x_i, y_j))}{2B(x_j, y_j)}$; on a $g_i(y_j) = y_j$ pour $i \neq j$ et pour $j \neq 2$ on a $y_j = g_2(y_j) = g_2 g_j g_2(y_2)$ or $g_2 g_j g_2 = g_{g_2(A_j)}$ centralise x_1 ; pour $j = 2$ $x_i = g_i(x_1)$ et g_i centralise y_2 . Ainsi f et f_λ sont équivalentes avec $\lambda = (\lambda_j - \lambda_i)/2$, ce résultat est également vrai pour toute racine de la forme $(\pm \lambda_j \pm \lambda_i)/2$. Lorsque $f_{(\lambda_j - \lambda_i)/2}(u) \neq 0$ on a:

$$(6) \quad g_u(x_i) = f_{(\lambda_j - \lambda_i)/2}(u) \cdot x_j \quad g_u(y_i) = f_{(\lambda_j - \lambda_i)/2}(u)^{-1} \cdot y_j$$

On peut remarquer que l'équivalence de f_λ avec f est indépendante du choix particulier des g_i (cf. 1) du lemme 4.1.3 et relation (6)). Ceci donne les équivalences de f et f_λ . Notons également que f représente 1.

Si on désire de plus une base de Chevalley, on peut procéder de la manière suivante. On considère une base de Chevalley de $\mathfrak{g}_R$, $(X'_\mu, h_\mu, X'_{-\mu})_{\mu \in R}$, (cf. [2], chapitre VIII, paragraphe 2 n°4) et on conjugue X'_{λ_1} comme il a été dit ci-dessus, dans le préhomogène $((\mathfrak{g}_R)_0, (\mathfrak{g}_R)_1)$, à l'aide des éléments $\theta_{X'_{(\lambda_1-\lambda_i)/2}, X'_{(-\lambda_1+\lambda_i)/2}}$, $2 \leq i \leq n$. Soit Θ l'automorphisme de $\mathfrak{g}_R$ associé à la base de Chevalley, comme

$$\begin{aligned} \theta_{X'_{(\lambda_1-\lambda_i)/2}, X'_{(-\lambda_1+\lambda_i)/2}} \\ &= \exp(\text{ad}(X'_{(\lambda_1-\lambda_i)/2})) \exp(\text{ad}(X'_{(\lambda_i-\lambda_1)/2})) \exp(\text{ad}(X'_{(\lambda_1-\lambda_i)/2})) \\ &= \exp(\text{ad}(X'_{(\lambda_i-\lambda_1)/2})) \exp(\text{ad}(X'_{(\lambda_1-\lambda_i)/2})) \exp(\text{ad}(X'_{(\lambda_i-\lambda_1)/2})) \end{aligned}$$

Θ et $\theta_{X'_{(\lambda_1-\lambda_i)/2}, X'_{(-\lambda_1+\lambda_i)/2}}$ commutent d'où

$$\Theta(\theta_{X'_{(\lambda_1-\lambda_i)/2}, X'_{(-\lambda_1+\lambda_i)/2}}(X'_{\lambda_1})) = \theta_{X'_{(\lambda_1-\lambda_i)/2}, X'_{(-\lambda_1+\lambda_i)/2}}(X'_{-\lambda_1})$$

donc si on pose $X_\mu = X'_\mu$, $\mu \in R$, $\mu \neq \lambda_i$, $2 \leq i \leq n$ et $X_{\lambda_i} = \theta_{X'_{(\lambda_1-\lambda_i)/2}, X'_{(-\lambda_1+\lambda_i)/2}}(X'_{\lambda_1})$ sinon, on a une base de Chevalley qui vérifie la condition i) de la proposition, ce qui termine la démonstration dans le cas $R = C_n$. Pour le cas $R = F_4$ il reste à montrer que sous ces conditions $4c_\omega = 1$. On a:

$$\begin{aligned} 2B(h_1, h_1)c_\omega &= -B([y_1, [y_2, [y_3, [y_4, X_\omega]]]], X_\omega) \\ &= -N_{-\lambda_4, \omega} N_{-\lambda_3, \omega-\lambda_4} N_{-\lambda_2, \omega-\lambda_4-\lambda_3} \\ &\quad N_{-\lambda_1, \omega-\lambda_4-\lambda_3-\lambda_2} B(X_{-\omega}, X_\omega) \\ &= \pm B(X_{-\omega}, X_\omega) \quad (\text{paragraphe 2, n°4, chap. 8, [2]}) \\ &= \frac{\pm 1}{2} B(H_0, [X_{-\omega}, X_\omega]) \\ &= \frac{\pm 1}{2} B(H_0, \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{2}) \\ &= \frac{\pm 1}{2} B(h_1, h_1) \quad \text{donc} \quad c_\omega = \frac{\pm 1}{4} \end{aligned}$$

On se place dans la $\mathbb{Q}$ -algèbre de Lie engendrée par $(X_\mu, h_\mu, X_{-\mu})$, μ appartenant à une base B de R , que l'on note $(\mathfrak{g}_R)_\mathbb{Q}$ et qui contient la base

de Chevalley précédemment construite. Comme $E_{-1,1}^{i,j} \cap (\mathfrak{g}_R)_{\mathbb{Q}}$ est de dimension un et en tenant compte du fait que f_{λ} représente 1, on a $f_{\lambda} \sim X^2$ lorsque $\lambda = (\lambda_i - \lambda_j)/2$. Par le 2) du lemme 2.3.1, $x = -c_{\omega}x_1 + \sum_{2 \leq i \leq 4} x_i$ et $x' = -c_{\omega}x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ sont dans la même orbite, donc les formes quadratiques Q_x et $Q_{x'}$ sont équivalentes ainsi

$$-c_{\omega}X_1^2 - c_{\omega}X_2^2 - c_{\omega}X_3^2 + \sum_{4 \leq i \leq 6} X_i^2$$

est équivalente à

$$-c_{\omega}X_1^2 + c_{\omega}X_2^2 + c_{\omega}X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 + X_6^2$$

(proposition 3.1.3) en tant que formes quadratiques à coefficients dans $\mathbb{Q}$ donc c_{ω} est un carré de $\mathbb{Q}$. $\square$

DEFINITION 4.1.2. On suppose dorénavant choisi un système de Chevalley de $\mathfrak{g}_R$, $(X_{\mu}, h_{\mu}, X_{-\mu})_{\mu \in R}$, vérifiant les propriétés 1) et 2) du 3) de la proposition 4.1.1 et on note f la forme quadratique $f_{(\lambda_1 - \lambda_2)/2}$, $E = E_{-1,1}^{1,2}$, d la dimension de E , pour i compris entre 1 et n , $x_i = X_{\lambda_i}$ et $y_i = X_{-\lambda_i}$.

Pour A élément de $E_{-1,1}^{i,j}$, on note g_A l'automorphisme $\theta_{A,B}$, $(A, h_j - h_i, B)$ étant un sl_2 -triplet.

LEMME 4.1.3. 1) f représente 1 et lorsque $n \geq 3$, f et af sont équivalentes si et seulement si a est un élément de $f(E)^*$.

2) $\Delta = R \Leftrightarrow f$ est anisotrope

Démonstration. 1) Comme f représente 1 la condition est toujours nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit a dans $f(E)^*$, il existe A dans E tel que $a = f(A)$; soit $g = g_2^{-1}g_A$ on a:

$$g(x_1) = f(A)x_1 \quad g(y_i) = y_i \quad \forall i \geq 3$$

d'où pour C dans $E_{-1,1}^{1,3}$:

$$B(ad(C)^2(g(x_1)), y_3) = f(A)B(ad(C)^2(x_1), y_3) = B(ad(g^{-1}C)^2(x_1), y_3)$$

2) D'après le lemme 2.2.2, pour toute racine μ dont le sous espace radiciel est contenu dans $\oplus E_{-1,1}^{i,j}$, la co-racine h_{μ} est dans $\mathfrak{b}$ d'où $\Delta_1 = R_1$ et toute racine μ de Δ_0 est soit dans R_0 soit s'annule sur $\mathfrak{b}$, mais alors h_{μ} commute à $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ qui engendrent $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{g}$ étant semi-simple on a ainsi $h_{\mu} = 0$ ce qui est absurde. On a ainsi vérifié que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. $\square$

Remarques. Ce lemme peut être en défaut dans le cas $n = 2$ comme le montre l'exemple $(\Delta, \lambda_0) = (B_n, \alpha_1)$ avec d impair, pour lequel on peut avoir $f(E)^* = \mathbb{F}^*$ (par exemple lorsque $n \geq 4$) et $\{s \in \mathbb{F}^* / sf \sim f\} = \mathbb{F}^{*2}$. Ceci s'explique aisément car ces cas proviennent en réalité de la situation $(R, \lambda_0) = (B_{2n}, \alpha_n)$.

Introduisons les classes de formes quadratiques qui servent, entre autres, à caractériser les orbites de ces deux cas. N'étant pas capable de les définir de manière intrinsèque, on peut procéder de la manière suivante:

A tout x de $\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)_1 = E_0(h_n) \cap \mathfrak{g}_1$ on associe la classe de formes quadratiques f_x de la manière suivante:

$$f_x \sim \frac{B(ad(A)^2(x), y_n)}{2B(x_n, y_n)} \quad A \in F = E_1(h_n) \cap \mathfrak{g}_0$$

Notation. Pour $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{F}^p$ on définit la forme quadratique sur E^p par $f^a = a_1 f \oplus \dots \oplus a_p f$.

Remarques. Par les décompositions (4) et (5), on constate que le préhomogène quasi-commutatif presque déployé, $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)_1)$ est en fait commutatif, de type (C_{n-1}, α_{n-1}) . Si on note $\chi_{\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)}$ le caractère associé (cf. paragraphe 3.2), on a alors pour tout élément g de G centralisant h_n , la relation $\chi(g) = \chi_1(g)\chi_{\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)}(g)$, (cf. relation (3)) χ_1 étant le caractère défini par la valeur $\frac{B(g(x_n), y_n)}{B(x_n, y_n)}$; ainsi pour tout élément g de $\text{Aut}_e(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)_0)$ on a $\chi(g) = \chi_{\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)}(g) = 1$ d'où $\chi_1(g) = 1$.

LEMME 4.1.4. 1) F et f_x sont invariants par le groupe $\text{Aut}_e(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)_0)$ et pour g de G centralisant h_n on a $f_{g(x)} = \chi_1(g)f_x$.

2) Soient $h = \sum_{1 \leq i \leq n-1} h_i$, $x = \sum_{1 \leq i \leq n-1} a_i x_i$ et $y = \sum_{1 \leq i \leq n-1} b_i x_i$ dans la même orbite de $\text{Aut}(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n))_h$ (resp. $\text{Aut}_e(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)_0)$) alors il existe t non nul tel que $f^b \sim t f^a$ (resp. $f^b \sim f^a$).

Démonstration. 1) Cela résulte des remarques ci-dessus.

2) Par le 1) du lemme 2.1 appliqué au préhomogène quasi-commutatif $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)_1)$, on peut écrire:

$$\text{Aut}(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n))_h = \text{Aut}_e(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)_0) \cdot \bigcap_{1 \leq i \leq n-1} \text{Aut}(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n))_{h_i}$$

Soit $y = g(x)$ alors $g = g_1 g_2$, avec $g_1 \in \text{Aut}_e(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_n)_0)$ et g_2 centralisant les h_i , $1 \leq i \leq n-1$, d'où $f_y = f_{g_2(x)}$ et $g_2(x) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} \phi_{g_2}(\lambda_i) a_i x_i$. Pour

$z = \sum_{1 \leq i \leq n-1} c_i x_i$, un calcul facile donne à l'aide des décompositions (4) et (5):

$$f_z \sim f^c \oplus (*)$$

avec $(*) = 0$ lorsque (R, λ_0) est de type (C_n, α_n) et lorsque (R, λ_0) est de type (F_4, α_1) on a $(*) \sim c_1 c_2 c_3 q$, q étant une forme quadratique fixe à trois variables. Or $g_2(x)$ et y sont dans la même orbite de $\text{Aut}_e(\mathcal{U}(\mathbb{F}h_n)_0)$ donc $\prod_{1 \leq i \leq n-1} \phi_{g_2}(\lambda_i) a_i = \prod_{1 \leq i \leq n-1} b_i$ (relation (3)) d'où

$$f^b = \bigoplus_{1 \leq i \leq n-1} \phi_{g_2}(\lambda_i) a_i f \sim \phi_{g_2}(\lambda_1) f^a \quad (\text{remarque 3.1.2}) \quad \square$$

PROPOSITION 4.1.5.

- 1) On suppose $n \geq 3$. Soit $1 \leq r \leq n$, $a = (a_1, \dots, a_r)$, et $b = (b_1, \dots, b_r)$ des éléments de $\mathbb{F}^*$.
 - i) Lorsque

$$\prod_{1 \leq i \leq r} a_i = \prod_{1 \leq i \leq r} b_i$$
 f^a et f^b sont équivalentes
 il existe g appartenant à G_e , centralisant $\bigoplus_{r+1 \leq j \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_j}$, tel que $g(\sum_{1 \leq i \leq r} a_i x_i) = \sum_{1 \leq i \leq r} b_i x_i$.
 - ii) Lorsque $1 \leq r \leq n-1$ et f^a et f^b sont équivalentes, il existe g appartenant à G_e , centralisant $\bigoplus_{r+2 \leq j \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_j}$, tel que $g(\sum_{1 \leq i \leq r} a_i x_i) = \sum_{1 \leq i \leq r} b_i x_i$
- 2) Soient $x = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i$ et $x' = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i x_i$ deux éléments non nuls de $\mathfrak{g}_1$ de rang inférieur à n alors x et x' sont dans la même orbite de G si et seulement si il existe c non nul tel que les formes quadratiques f^a et $c f^b$ sont équivalentes.

Démonstration. 0) On commence par montrer le résultat suivant lorsque $n \geq 3$: soit $a = (a_1, \dots, a_r)$, les a_i étant des éléments de $\mathbb{F}^*$, pour tout t non nul représenté par f^a , il existe

- (i) $(c_2, \dots, c_r)$, les c_i étant des éléments de $\mathbb{F}^*$
- (ii) g élément de G_e centralisant $\bigoplus_{r+1 \leq j \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_j}$

tels que

$$(\alpha) \quad g(\sum_{1 \leq i \leq r} a_i x_i) = t x_1 + \sum_{2 \leq i \leq r} c_i x_i$$

(β) f^a est équivalente à $tf \oplus f^c$

(γ) $\prod_{1 \leq i \leq r} a_i = t \prod_{2 \leq i \leq r} c_i$.

La démonstration se fait par récurrence sur r ; le cas $r = 1$ étant trivial, on suppose $r \geq 2$ ainsi que le résultat annoncé démontré pour $r - 1$. Comme t est représenté par f^a , il existe A_1 dans E et u représenté par $\bigoplus_{2 \leq i \leq r} a_i f$, tels que $t = a_1 f(A_1) + u$. Si $u = 0$, le résultat est démontré en utilisant l'automorphisme $g_2 g_{A_1}$. Supposons donc u non nul. Lorsque $r \geq 3$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence: il existe g élément de G_e , centralisant $\bigoplus_{r+1 \leq j \leq n, j=1} g^{\lambda_j}, c_3, \dots, c_r$ non nuls tels que

(α) $g(\sum_{2 \leq i \leq r} a_i x_i) = u x_2 + \sum_{3 \leq i \leq r} c_i x_i$

(β) $\bigoplus_{2 \leq i \leq r} a_i f$ est équivalente à $u f \oplus f^c$

(γ) $\prod_{2 \leq i \leq r} a_i = u \prod_{3 \leq i \leq r} c_i$.

Lorsque $r = 2$ on a $u = a_2 f(A_2)$. Soit $x' = g(x)$ pour $r \geq 3$ et $x' = x$ pour $r = 2$, on note $x' = a_1 x_1 + v x_2 + w$ avec $w = \sum_{3 \leq i \leq r} c_i x_i$ et $v = u$ (resp. $w = 0$ et $v = a_2$) lorsque $r \geq 3$ (resp. lorsque $r = 2$). On a $g_2 g_{A_1}(x') = a_1 f(A_1) x_1 + v f(A_1)^{-1} x_2 + w$. Or il existe B_2 dans $E_{1,-1}^{1,2}$ tel que

$$f_{(\lambda_1 - \lambda_2)/2}(B_2) = u v^{-1} f(A_1)$$

(1) du lemme 4.1.3) et C_2 dans E tel que

$$[B_2, f(A_1)^{-1} v x_2] + [C_2, t x_1] = 0$$

alors:

$$\exp(ad(C_2)) \exp(ad(B_2)) x' = t x_1 + c_2 x_2 + w \quad \text{avec} \quad c_2 = \frac{a_1 v}{t}$$

Par le 2) du lemme 4.1.4 appliqué à $a_1 x_1 + u x_2$ et à $t x_1 + c_2 x_2$ les formes quadratiques $a_1 f \oplus u f$ et $t f \oplus c_2 f$ sont équivalentes. $\square$

de 0

Montrons le 1) i) de la proposition par récurrence sur r . Pour $r = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons le résultat vrai pour $r - 1 \geq 1$. Pour r , comme $f^a \sim f^b$ il existe t non nul, représenté par f^a et f^b ; d'après le 0) ci-dessus, il existe

$$(c_2, \dots, c_r), \quad (d_2, \dots, d_r), \quad g \quad \text{et} \quad g' \quad \text{dans} \quad G_e$$

centralisant $\bigoplus_{r+1 \leq j \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_j}$ tels que

$$g\left(\sum_{1 \leq i \leq r} a_i x_i\right) = tx_1 + \sum_{2 \leq i \leq r} c_i x_i \quad \text{et} \quad g'\left(\sum_{1 \leq i \leq r} b_i x_i\right) = tx_1 + \sum_{2 \leq i \leq r} d_i x_i$$

$$tf \oplus f^c \sim f^a \quad \text{et} \quad f^b \sim tf \oplus f^d$$

$$t \prod_{2 \leq i \leq r} c_i = \prod_{1 \leq i \leq r} a_i \quad \text{et} \quad t \prod_{2 \leq i \leq r} d_i = \prod_{1 \leq i \leq r} b_i$$

Donc d'après les hypothèses, les deux formes quadratiques f^c et f^d sont équivalentes et on a l'égalité $\prod_{2 \leq i \leq r} c_i = \prod_{2 \leq i \leq r} d_i$; il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\sum_{2 \leq i \leq r} c_i x_i$ et à $\sum_{2 \leq i \leq r} d_i x_i$ pour obtenir le résultat.

1) ii) Lorsque $r = 1$ il existe A et B dans E tels que $a_1 f(A) = b_1 f(B)$. Il suffit d'appliquer à $a_1 x_1$ l'élément $g_B^{-1} g_A$. f est une forme quadratique qui représente 1, l'équivalence de f^a et f^b implique que $p = (\prod_{1 \leq i \leq r} a_i)^{-1} \cdot (\prod_{1 \leq i \leq r} b_i)$ est représenté par f . Il existe A dans $E_{-1,1}^{1,n}$ tel que $f_{(\lambda_n - \lambda_1)/2}(A) = p$, alors

$$g_n g_A(x') = \sum_{1 \leq i \leq r} c_i x_i \quad \text{et on a} \quad \prod_{1 \leq i \leq r} c_i = \prod_{1 \leq i \leq r} b_i \quad \text{ainsi que} \quad f^c \sim f^b$$

Il suffit alors d'appliquer le 1) i) de cette proposition.

2) x et x' ont même rang p ($1 \leq p \leq n-1$) et par le 2) du lemme 4.1.1, on peut supposer que $x = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i$ et $x' = \sum_{1 \leq i \leq p} b_i x_i$. Lorsque $p = 1$ le résultat est évident; lorsque $p \geq 2$, on a $n \geq 3$ donc les formes quadratiques associées sont inchangées (cf. 1) du lemme 4.1.3).

Par le 1) ii) de cette proposition, les conditions sont suffisantes; par le 2) des lemmes 2.1 et 4.1.4, elles sont également nécessaires. $\square$

Remarques 4.1.6. En utilisant la même démonstration que dans 1) ii), lorsqu'on suppose que pour tout a non nul de $f(E)$ il existe g dans G centralisant tous les h_i , $1 \leq i \leq n$, dont la restriction à $\bigoplus_{1 \leq i \leq n-1} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ (resp. à $\mathfrak{g}^{\lambda_n}$) se réduise à l'identité (resp. à $a\text{Id}$) alors 2) est vérifié c'est à dire que l'équivalence de λf^a et f^b pour un λ non nul implique x et x' sont dans la même orbite de G . Ceci est toujours vérifié pour n impair (on écrit pour $i = 1, \dots, n-1$ $a = f_{(\lambda_n - \lambda_i)/2}(A_i)$ alors l'élément $h_n(a^{(n+1)/2})(\prod_{1 \leq i \leq n-1} g_{A_i})c(1/a)$ convient).

4.2. Le cas (C_n, α_n)

Dans le paragraphe 4.2, on suppose que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est quasi-commutatif, presque déployé de type $(R, \lambda_0) = (C_n, \alpha_n)$ (i.e. $\Delta_2 = \emptyset$).

PROPOSITION 4.2.1. *Lorsque $n \geq 3$ il existe un préhomogène quasi-commutatif, $(\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_1, \tilde{H}_0)$, presque déployé de type $(R, \lambda_0) = (C_n, \alpha_n)$ ou (F_4, α_1) et un élément 1-simple $\tilde{h}$ de rang un de $(\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_1, \tilde{H}_0)$ tel que*

- 1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(\mathbb{F}\tilde{h})$
- 2) $\tilde{H}_0 = \tilde{h}/2 + H_0$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour chaque corps $\mathbb{F}$, chaque type de système de racines gradué (Δ, λ_0) , de type (A_{2n-1}, α_n) , (C_n, α_n) , (D_{2n}, α_{2n}) ou (D_{2n}, α_{2n-1}) , (E_7, α_7) , donné par son diagramme de Satake vérifiant la propriété suivante: la racine λ_0 du diagramme de Satake de (Δ, λ_0) est blanche, non fléchée et non contigüe à une racine noire, il existe un système de racines gradué $(\tilde{\Delta}, \tilde{\lambda}_0)$, tel qu'il figure dans la liste de la proposition 1.6, et que le diagramme de Satake de (Δ, λ_0) soit exactement le diagramme de Satake de

$$\tilde{\Delta}^{\tilde{\lambda}_0} = \{\lambda \in \tilde{\Delta} / n(\lambda, \tilde{\lambda}_0) = 0\}$$

gradué par la graduation induite par $\tilde{\Delta}$. L'élément $\tilde{h}$ est simplement donné par $h_{\tilde{\lambda}_0}$. Cela résulte du tableau 3. $\square$

COROLLAIRE 4.2.2. 1) *Lorsque $n \geq 3$, pour tout a non nul de $f(E)$, il existe g dans G centralisant tous les h_i , $1 \leq i \leq n$, dont la restriction à $\bigoplus_{1 \leq i \leq n-1} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ (resp. à $\mathfrak{g}^{\lambda_n}$) se réduise à l'identité (resp. à $a\text{Id}$).*

2) $\chi(G) = \chi(\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0}) = \mathbb{F}^*$ lorsque n est impair et à $f(E)^*$ lorsque n est pair et supérieur ou égal à quatre.

3) *Lorsque $n \geq 2$, pour tout t non nul de $\mathbb{F}$ tel que $t^n \in f(E)$, il existe un élément g de $(\text{Ker}\chi)^0$ dont la restriction à $\bigoplus_{1 \leq i \leq n-1} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ soit l'homothétie de rapport t .*

Démonstration. 1) Notons que la restriction à $\mathfrak{g}$ du centralisateur de $\tilde{h}$ dans $\text{Aut}_0(\tilde{\mathfrak{g}})_{\tilde{H}_0}$ est inclus dans G . Soit A appartenant à $E_{-1,1}^{n,n+1}$ tel que $f_{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)/2}(A) = a$, et $\tilde{g}_A$ la restriction de g_A à $\mathfrak{g}$, alors $\tilde{g}_A$ convient. Remarquons que $\chi(\tilde{g}_A) = a$.

2) Cela résulte de la proposition 3.2, du 1) de ce corollaire.

3) Si n est pair, l'élément $c(t)h_n(t^{-n/2})$ convient. Si n est impair, t est dans $f(E)^*$ donc représenté par des éléments de la forme $f_{(\lambda_i - \lambda_n)/2}(A_i)$ et $\prod_{1 \leq i \leq n-1} g_{A_i}$ convient. $\square$

On rappelle que toute orbite de G_e dans $\mathfrak{g}_1$ rencontre $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ (lemme 2.3.2) et que $P(\sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i) = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i$ (à la normalisation près, relation (3)).

THEOREME 4.2.3. *Soient*

$$x = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i, \quad y = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i x_i$$

1) *Lorsque $n \geq 3$, pour que x et y soient conjugués par G_e , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites:*

- (i) $P(x) = P(y)$ (i.e. $\prod_{1 \leq i \leq n} a_i = \prod_{1 \leq i \leq n} b_i$)
- (ii) *les formes quadratiques f^a et f^b sont équivalentes*

2) *Pour que x et y soient conjugués par G (resp. $\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0}$), il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite: il existe λ dans $\mathbb{F}^*$ tel que les formes quadratiques λf^a et f^b soient équivalentes et pour $n = 2$, il faut ajouter la condition " $P(x) \in P(y)\chi(G)$."*

Démonstration. Lorsque $n = 2$ le résultat est évident. Supposons $n \geq 3$. On a $G_e = \text{Aut}_e(\mathcal{U}(\tilde{\mathbb{F}}\tilde{h})_0)$. Le 1) découle du lemme 4.1.4 et de la proposition 4.1.5. Les conditions de 2) sont suffisantes par le 1) du corollaire 4.2.2 et la remarque 4.1.6 et nécessaires par le 2) du lemme 4.1.4 appliqué au préhomogène $(\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_1, \tilde{H}_0)$. $\square$

Remarques. 1) Lorsque $n = 2$, on vérifie immédiatement qu'il y a une seule orbite singulière non triviale et que les orbites régulières sont séparées par $\chi(G)$. Lorsque x et y non nuls vérifient la condition $P(x) \in \chi(G)P(y)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{F}^*$ tel que $\lambda f^a \sim f^b$.

2) Les orbites singulières de $(\text{Ker}(\chi))^0$ et de $G' = \{g \in G / \chi(g) \in f(E)\}$ sont les mêmes (cf. le 3) du corollaire 4.2.2).

3) Le cas où $d = 8$ a été traité entre autre dans [7], il correspond à deux $\mathbb{F}$ -formes de (E_7, α_7) (f isotrope ou f anisotrope).

4) Lorsque $f(E)^* = \mathbb{F}^*$, le rang sépare simplement les orbites ($n + 1$ orbites). Ainsi lorsque $\mathbb{F}$ est un corps p -adique et $n \geq 3$, ceci est réalisé

lorsque $d \geq 4$. Il reste ainsi les cas $d = 1$ ($\mathfrak{g}_1$ s'identifie alors à l'espace des matrices symétriques) et $d = 2$, $\mathfrak{g}_1$ s'identifie alors à l'espace des matrices hermitiennes sur un corps quadratique dans le cas f anisotrope, dans ce dernier cas il y a une orbite de rang impair et deux orbites de rang pair.

On peut également donner la traduction lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ bien que celle-ci soit largement connue dans le cadre des algèbres de Jordan ([17]); signalons également les travaux mentionnés dans [5], qui sont faits dans un cadre un peu plus général (on ne suppose pas de régularité).

PROPOSITION 4.2.4. *On suppose que $n \geq 3$ et que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et soit G_0 la composante connexe réelle de G*

- 1) *Lorsque (Δ, λ_0) n'est pas de type (C_n, α_n) , le rang sépare les orbites singulières de G_0 dans $\mathfrak{g}_1$, et G_0 a deux orbites régulières données par $\{x \in \mathfrak{g}_1 / P(x) > 0\}$ et $\{x \in \mathfrak{g}_1 / P(x) < 0\}$. Les représentants sont donnés par*

$$0 \quad 1 \leq j \leq n \quad \sum_{1 \leq i \leq j} x_i, -x_1 + \sum_{2 \leq i \leq n} x_i$$

- 2) *Lorsque (Δ, λ_0) est de type (C_n, α_n) , pour $1 \leq j \leq n$, G_0 a $j + 1$ orbites de rang j de représentants:*

$$\sum_{1 \leq i \leq j} x_i \quad - \sum_{1 \leq i \leq k} x_i + \sum_{k+1 \leq i \leq j} x_i \quad \text{avec } 1 \leq k \leq j.$$

Démonstration. Comme G_0 est connexe et χ est continue, $\chi(G_0)$ est connexe, or il contient $\mathbb{R}^{*+}$ donc $\chi(G_0) = \mathbb{R}^{*+}$. Ceci est aussi vrai pour tout autre caractère continu.

En tenant compte du 1) du lemme 4.1.3, la proposition 4.2.4 est la traduction du résultat suivant: soient $x = \sum_{1 \leq i \leq j} a_i x_i$ et $x' = \sum_{1 \leq i \leq j} b_i x_i$ de rang j alors x et x' sont dans la même orbite de G_0 si et seulement si les formes quadratiques f^a et f^b sont équivalentes et $P(x)P(x')$ est positif ou nul or G_0 est inclus dans $\text{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}})_{H_0, \tilde{h}}$ d'où les conditions nécessaires par le 1) du lemme 4.1.4. Montrons qu'elles sont suffisantes.

- Lorsque $j < n$, le résultat découle de l'inclusion de G_e dans G_0 et du 1) du théorème 4.2.3.

- Lorsque $j = n$

$A = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i b_i^{-1} > 0$ donc il existe $g (= \exp(ad(\sqrt{A}h_1)) \in G_0$ tel que $gx' = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i x_i$ avec $f^a \sim f^c$ et $\prod_{1 \leq i \leq n} a_i = \prod_{1 \leq i \leq n} c_i$, ainsi en appliquant le 1) du théorème 4.2.3, x et gx' sont dans la même orbite de G_e d'où x et x' sont dans la même orbite de G_0 . $\square$

4.3. Le cas $(R, \lambda_0) = (F_4, \alpha_1)$

On rappelle que les $(x_i, h_i, y_i)_{1 \leq i \leq 4}$ ont été définis dans la définition 4.1.2 et que $\chi(G) = \chi(\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0}) = \mathbb{F}^{*2}$ (2) i) de la proposition 3.2).

Indiquons rapidement un lemme qui sera utilisé ultérieurement et dont la vérification est laissée au lecteur (cf. [8], [20]).

LEMME 4.3.1. *Soit $\mathbb{F}$ un corps global de caractéristique 0, on note S (resp. $S_{\mathbb{R}}, S_f$) l'ensemble des places (resp. réelles, finies) de $\mathbb{F}$; pour tout v de S , $\mathbb{F}_v$ est le complété de $\mathbb{F}$ à la place v . et $(\cdot, \cdot)_v$ désigne le symbole de Hilbert du complété $\mathbb{F}_v$.*

- 1) *Soient a dans $\mathbb{F}^*$, P et Q deux parties finies ayant un nombre pair de places telles que P est dans S_f alors il existe A, B, C dans $\mathbb{F}^*$ tels que:*
 - i) $(A, a)_v = 1$ pour tout v de S
 - ii) $(A, C)_v = -1$ (resp. $(B, C)_v = -1$) lorsque $v \in P$ (resp. $v \in Q$) et 1 sinon
- 2) *Soit a dans $\mathbb{F}^*$, $P_a(s_1, s_2) = s_1^2 + as_2^2$, Q une partie de $S_{\mathbb{R}}$ alors il y a équivalence entre:*
 - i) *il existe u représenté par P_a et vérifiant $(u, -1)_v = -1$ pour tout v dans Q et 1 pour tout v dans $S_{\mathbb{R}} - Q$*
 - ii) $(a, -1)_v = -1$ pour tout v dans Q

THEOREME 4.3.2.

- 1) *x et y sont dans la même orbite de G (ou $\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0}$) si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:*
 - i) $P(x) \in \mathbb{F}^{*2}P(y)$
 - ii) *Les formes quadratiques Q_x et Q_y sont équivalentes*
- 2) *Les orbites singulières de G (ou $\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0}$) sont les mêmes que celles de $(\text{Ker}\chi)^0$.*

Démonstration. 1) Les conditions énoncées étant clairement nécessaires, il suffit de montrer qu'elles sont suffisantes. Soient x et y vérifiant les conditions i) et ii) du théorème, alors par ii) x et y ont même rang (cf. proposition 3.1.3) donc les éléments 1-simples les complétant en sl_2 -triplets 1-adaptés sont dans la même orbite de G .

Par le lemme 2.3.2 et le choix des sl_2 -triplets, on peut supposer que $x = \sum_{1 \leq i \leq k} a_i x_i$ et $y = \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i$, k étant le rang commun de x et de y . Lorsque k est inférieur ou égal à 3, la condition ii) implique que les formes quadratiques $\bigoplus_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j f$ et $\bigoplus_{1 \leq i < j \leq k} b_i b_j f$ sont équivalentes donc il existe c non nul tel que les formes quadratiques $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} a_i f$ et $c(\bigoplus_{1 \leq i \leq k} b_i f)$ sont équivalentes. Le résultat découle alors du 1) de la proposition 4.1.5. Il reste donc les cas où x et y sont génériques (i.e. $k = 4$). Comme $P(x)P(y)$ est un carré, on peut se ramener au cas où

$$x = px_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3 + \frac{1}{b_1 b_2} x_4, \quad y = px_1 + c_1 x_2 + c_2 x_3 + \frac{1}{c_1 c_2} x_4 \quad \text{et} \quad Q_x \sim Q_y.$$

D'après l'expression explicite de Q_x (proposition 3.1.3), on en déduit que

$$b_1(pf \oplus f) \oplus b_2(pf \oplus f) \oplus b_1 b_2(pf \oplus f) \sim c_1(pf \oplus f) \oplus c_2(pf \oplus f) \oplus c_1 c_2(pf \oplus f)$$

ce qui est toujours vérifié dans le cas p -adique et se traduit dans les autres cas par les conditions suivantes:

1) Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Il existe t tel que les formes quadratiques

$$t(pf \oplus b_1 f \oplus b_2 f \oplus \frac{1}{b_1 b_2} f) \quad \text{et} \quad pf \oplus c_1 f \oplus c_2 f \oplus \frac{1}{c_1 c_2} f$$

soient équivalentes.

2) Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps global. On reprend les notations du lemme 4.3.1. Pour toute place réelle v , il existe t_v tel que les formes quadratiques

$$t_v(pf \oplus b_1 f \oplus b_2 f \oplus \frac{1}{b_1 b_2} f) \quad \text{et} \quad pf \oplus c_1 f \oplus c_2 f \oplus \frac{1}{c_1 c_2} f$$

soient équivalentes. Avant de commencer la démonstration, remarquons que la propriété **(P)** donnée par:

$$\textbf{(P)} \quad b_1 f \oplus b_2 f \oplus \frac{1}{b_1 b_2} f \sim c_1 f \oplus c_2 f \oplus \frac{1}{c_1 c_2} f$$

permet de conclure que x et y sont dans la même orbite (prop. 4.1.5, 1) i)).

(P) est vérifiée lorsque $f(E)^* = \mathbb{F}^* (1)$ du lemme 4.1.3) ou lorsque $\mathbb{F}$ est un

corps p -adique et d est pair. Il reste à faire la démonstration dans les cas restants. $\mathbb{F}$ étant un corps local (resp. un corps global) on vérifie aisément que (P) est vérifié si et seulement si les invariants des formes quadratiques en question donnés respectivement par $(b_1, b_1)(b_2, b_1 b_2)$ et $(c_1, c_1)(c_2, c_1 c_2)$ (resp. en toute place par $(b_1, b_1)_v(b_2, b_1 b_2)_v$ et $(c_1, c_1)_v(c_2, c_1 c_2)_v$) sont égaux. $(\cdot, \cdot)$ désigne le symbole de Hilbert de $\mathbb{F}$. Comme $(b_1, b_1)(b_2, b_1 b_2) = (-1, -1)(-b_1, -b_2)$, (P) est équivalent à $(-b_1, -b_2) = (-c_1, -c_2)$ (resp. en toute place à $(-b_1, -b_2)_v = (-c_1, -c_2)_v$).

1) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. f est alors de signature $(d, 0)$. Lorsque p est négatif, x et y sont dans la même orbite de G_e (2) du lemme 2.3.1, on rappelle que $4c_\omega = 1$, définition 4.1.2). Lorsque p est positif,

$$pf \oplus b_1 f \oplus b_2 f \oplus \frac{1}{b_1 b_2} f$$

est de signature possible $(4d, 0)$ ou $(2d, 2d)$ donc (P) est vérifié.

1) $\mathbb{F}$ est un corps p -adique. D'après la remarque précédente, on peut supposer que $f(E)^*$ est distinct de $\mathbb{F}^*$ et que d est impair (ainsi d est inférieur ou égal à 3). Comme $f(E)^*$ est un sous-groupe de $\mathbb{F}^*$ (1) du lemme 4.1.3), nécessairement $d = 1$ d'où $f(X) = X^2$. Soit s tel que $A = p + s^2$ ne soit pas un carré et u tel que $(-u, A) = -1$. On considère

$$X = px_1 + x_2 + ux_3 + \frac{1}{u}x_4 \quad \text{et} \quad Y = px_1 + Ax_2 + \frac{u}{A}x_3 + \frac{1}{u}x_4$$

D'après le 1) du lemme 2.3.1, X et Y sont dans la même orbite de G_e et par calcul, on vérifie que les invariants des formes quadratiques

$$U^2 + uV^2 + \frac{1}{u}Z^2 \quad AU^2 + \frac{u}{A}V^2 + \frac{1}{u}Z^2$$

sont opposés. Or d'après la proposition 4.1.5, x (resp. y) est soit dans l'orbite de X , soit dans l'orbite de Y , qui sont confondues d'où le résultat.

3) $\mathbb{F}$ est un corps de nombre. On modifie x (et y) de la manière suivante: soit $R = \{v \in S_{\mathbb{R}} / (p, -1)_v = -(b_1, -1)_v = -1\}$, d'après le 2) du lemme 4.3.1, il existe u, s_1, s_2 tels que

$$u = s_1^2 + ps_2^2 \quad (u, -1)_v = -1 \quad \forall v \in R \text{ et } 1 \quad \forall v \in S_{\mathbb{R}} - R$$

d'où x et $x' = px_1 + d_1x_2 + b_2x_3 + \frac{1}{d_1b_2}x_4$ sont dans la même orbite ($d_1 = ub_1$, 1) du lemme 2.3.1). On procède de même pour y : $y' = px_1 + d_2x_2 + c_2x_3 +$

$\frac{1}{d_2 c_2} x_4$ et lorsque, pour $v \in S_{\mathbb{R}}$ on a $(p, -1)_v = -1$, alors $(d_1, -1)_v = (d_2, -1)_v = -1$. Ainsi pour tout $v \in S_{\mathbb{R}}$, les formes quadratiques

$$d_1 f \oplus b_2 f \oplus \frac{1}{d_1 b_2} f \quad \text{et} \quad d_2 f \oplus c_2 f \oplus \frac{1}{d_2 c_2} f$$

sont équivalentes (cf. le cas $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Lorsque d est pair, ces formes quadratiques sont également équivalentes en toute place finie, donc d'après le résultat **(P)** rappelé précédemment, x' et y' sont dans la même orbite, ce qui termine la démonstration. Lorsque $d = 1$ (rappelons qu'alors $f(X) \sim X^2$), notons $h_v(x') = (-1, -1)_v (-d_1, -b_2)_v$ (resp. $h_v(y')$) l'invariant de la forme quadratique $d_1 f \oplus b_2 f \oplus \frac{1}{d_1 b_2} f$ (resp. $d_2 f \oplus c_2 f \oplus \frac{1}{d_2 c_2} f$) et

$$P = \{v \in S / h_v(x') h_v(y') = -1\} \quad Q = \{v \in S / (-d_1, -b_2)_v = -1\}$$

alors P, Q sont deux parties finies ayant un nombre pair de places et P ne contient que des places finies donc par le 1) du lemme 4.3.1, il existe A, B, C tels que:

$$(6) \quad (A, -p)_v = 1 \quad \forall v \in S$$

$$(7) \quad (A, C)_v = -1 \quad \forall v \in P \quad \text{et} \quad 1 \quad \forall v \notin P$$

$$(8) \quad (B, C)_v = -1 \quad \forall v \in Q \quad \text{et} \quad 1 \quad \forall v \notin Q$$

On considère:

$$t = p x_1 - B x_2 - C x_3 + \frac{1}{BC} x_4$$

d'après (8) et **(P)**, t et x' sont dans la même orbite, de même:

$$z = p x_1 - A B x_2 - C x_3 + \frac{1}{ABC} x_4$$

est dans la même orbite que y' par (7), (8) et **(P)** or par (6) z et t sont dans la même orbite (A est représenté par la forme quadratique $U^2 + pV^2$), on applique le 1) du lemme 2.3.1, d'où x et y sont dans la même orbite. $\square$ de 1)

2) est évident car on a vu au cours de la démonstration de 1) que l'on peut se ramener au cas où

$$x = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i \quad y = \sum_{1 \leq i \leq p} b_i x_i$$

de rang p compris entre 1 et 3, tel qu'il existe t dans $\mathbb{F}^*$ tel que $tf^a \sim f^b$. Il suffit alors de considérer l'application de $\mathbb{F}^*$ dans $(\text{Ker}\chi)^0$ donnée par $h_4(t^{-1})h_{\omega-\lambda_4}(t)$ dont la restriction à $\bigoplus_{1 \leq i \leq 3} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ est l'homothétie de rapport t . $\square$

Remarques. Les cas $(\Delta, \lambda_0) = (F_4, \alpha_1)$ et (E_8, α_8) sont traités sous une autre forme dans [3] et [4] respectivement.

Donnons une autre version du théorème précédent dans le cas où $\mathbb{F}$ est un corps local:

COROLLAIRE 4.3.3. *Soient $x = \sum_{1 \leq i \leq 4} a_i x_i$ et $y = \sum_{1 \leq i \leq 4} b_i x_i$ de rang r*

- (1) *Si $r \leq 3$ ou si $r = 4$ et $\mathbb{F}$ est local archimédien, x et y sont dans la même orbite de G (ou $\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0}$) si et seulement si:*
 - (i) *on a $P(x) \in \mathbb{F}^{*2}P(y)$*
 - (ii) *il existe $\lambda \in \mathbb{F}^*$ tels que les formes quadratiques λf^a et f^b soient équivalentes*
- (2) *Si $r = 4$ et si $\mathbb{F}$ est local non archimédien, x et y sont dans la même orbite de G (ou $\text{Aut}(\mathfrak{g})_{H_0}$) si et seulement si $P(x) \in \mathbb{F}^{*2}P(y)$*

Démonstration. C'est la traduction du théorème 4.3.2 à l'aide de la proposition 3.1.3.

Soit $\{u\}$ un ensemble de représentants de $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ dans $\mathbb{F}^*$. Le lemme 4.1.3, le théorème 4.3.2 et le corollaire 4.3.3 permettent d'énoncer:

COROLLAIRE 4.3.4. *Lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est un préhomogène de type $(R, \lambda_0) = (F_4, \alpha_1)$ tel que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiées*

- i) *le rang déployé de $\mathfrak{g}$ est supérieur ou égal à 5*
- ii) *$\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$ -adique et $d \geq 4$*

les orbites singulières sont séparées par le rang et les orbites régulières sont en bijection avec $\mathbb{F}^/\mathbb{F}^{*2}$. Une liste des représentants des orbites est donnée par: $0, x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3 + ux_4$, u décrivant des représentants de $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$.*

Donnons des représentants des orbites des cas restants c'est à dire lorsque $\Delta = F_4$, i.e. f , qui représente 1, est anisotrope; soit $-\delta$ son discriminant.

1) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Ceci correspond aux $\mathbb{R}$ -formes $({}^2E_{6,4}^2, \alpha_2)$, $(E_{7,4}^9, \alpha_1)$, $(E_{8,4}^{28}, \alpha_8)$ ainsi qu'à la forme déployée (F_4, α_1) . Les représentants sont donnés par: 0, x_1 , $x_1 + x_2$, $x_1 - x_2$, $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 + x_2 - x_3$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $x_1 + x_2 + x_3 - x_4$, $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$.

2) $\mathbb{F}$ *p*-adique. Cas $d = 1$ ce qui correspond à la forme déployée de type (F_4, α_1) . Soient a, b tels que $(a, b) = -(-1, -1)$, les représentants sont donnés par: 0, x_1 , $x_1 + x_2 + x_3$, $-ax_1 - bx_2 + \frac{1}{ab}x_3$, $x_1 + ux_2$, $x_1 + x_2 + x_3 + ux_4$, $u \in \{u\}$.

Cas $d = 2$ ce qui correspond à la $\mathbb{F}$ -forme $({}^2E_{6,4}^2, \alpha_2)$. Soit v vérifiant $(v, \delta) = -1$, les représentants sont donnés par: 0, x_1 , $x_1 + x_2$, $x_1 + vx_2$, $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 + x_2 + x_3 + ux_4$, $u \in \{u\}$.

$\mathbb{F}$ est un corps de nombres. On reprend les notations du lemme 4.3.1. On désigne par

$$S_{\mathbb{R},f} = \{v \in S_{\mathbb{R}} / f_v \text{ est anisotrope}\} = \{v \in S_{\mathbb{R}} / \text{rang}(\Delta_v) = 4\}$$

$$S_{f,u} = \{v \in S_{\mathbb{R},f} / (u, -1)_v = 1\} \quad u \in \mathbb{F}^*$$

Les représentants sont donnés par 0, x_1 , $x_{u,P} = x_1 + x_2 + ax_3 + \frac{u}{a}x_4$, $u \in \{u\}$, pour toute partie P , éventuellement vide, incluse dans $S_{f,u}$ et avec a tel que

$$(a, -1)_v = -1 \quad \forall v \in P \quad \text{et} \quad 1 \quad \forall v \in S_{\mathbb{R}} - P$$

pour chaque u il y a ainsi $2^{\text{cardinal}(S_{f,u})}$ orbites, auxquelles il faut rajouter dans les cas

$d = 1$. $x_1 + ux_2$, $u \in \{u\}$ et $x_P = -ax_1 - bx_2 + \frac{1}{ab}x_3$, pour toute partie finie P , de cardinal pair de places de S , éventuellement vide, a et b vérifiant les relations

$$(a, b)_v = -(-1, -1)_v \quad \forall v \in P \quad \text{et} \quad (-1, -1)_v \quad \forall v \notin P$$

$d = 2$. $x_P = x_1 + wx_2$, pour toute partie finie P , de cardinal pair de places v de S pour lesquelles δ n'est pas un carré de $\mathbb{F}_v^*$, w étant défini par les relations

$$(w, \delta)_v = -1 \quad \forall v \in P \quad \text{et} \quad 1 \quad \forall v \notin P$$

ainsi que $x_Q = x_1 + x_2 + tx_3$, pour toute partie Q de places incluses dans $S_{\mathbb{R},f}$, t étant défini par les relations

$$(t, -1)_v = -1 \quad \forall v \in Q \quad \text{et} \quad 1 \quad \forall v \in S_{\mathbb{R},f} - Q$$

4.4. Deux conséquences

On déduit de la proposition 3.1.3 et des théorèmes 4.2.3 et 4.3.2 le

COROLLAIRE 4.4.1. *Sous l'une des deux hypothèses suivantes:*

- i) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$
- ii) $\mathbb{F}$ est un corps local ou global de caractéristique 0 et $d \geq 2$ lorsque $n \geq 4$

(R, λ_0) étant de type (F_4, α_1) ou (C_n, α_n) , deux éléments x et x' , appartenant à $\mathfrak{g}_1$, sont dans la même orbite de G si et seulement si les formes quadratiques Q_x et $Q_{x'}$ sont équivalentes et $P(x) \in P(x')\chi(G)$.

THEOREME 4.4.2. $\mathbb{F}$ est un corps global de caractéristique 0. Soit $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ un préhomogène quasi-commutatif presque déployé tel que (R, λ_0) soit de type (C_n, α_n) , avec $n \geq 3$, ou (F_4, α_1) alors x et y sont dans la même orbite de G si et seulement si ils sont dans la même orbite de G_v pour tout v de S .

Démonstration. Elle découle des théorèmes 4.2.3 et 4.3.2 et des remarques suivantes:

- 1) deux formes quadratiques sont globalement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes en chaque place
- 2) Q_1 et Q_2 étant deux formes quadratiques, il existe t tel que tQ_1 et Q_2 soient globalement équivalentes si et seulement si cette propriété est vérifiée en chaque place. $\square$

5 *Une remarque.* On utilise les notions de “bonne orbite” et “orbite spéciale” données dans [6]. Indiquons rapidement le résultat suivant facile à établir:

LEMME 5. *Soit $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ un préhomogène tel que*

- i) $\mathfrak{g}_1$ est un $\mathfrak{g}_0$ -module absolument simple
- ii) $2H_0$ est 1-simple

Si h et $h' = 2H_0 - h$ sont deux éléments 1-simples au sens de $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ tel que $\mathfrak{U}(\mathbb{F}h)_1$ (resp. $\mathfrak{U}(\mathbb{F}h')_1$) soit un $\mathfrak{U}(\mathbb{F}h)_0$ (resp. $\mathfrak{U}(\mathbb{F}h')_0$) module absolument simple alors pour tout x admettant h comme élément 1-simple, $G \cdot x$ est une bonne orbite spéciale.

Les préhomogènes quasi-commutatifs, presque déployés, irréductibles ont toutes leurs orbites qui sont de bonnes orbites (appendice 2 de [11]). Lorsque de plus, $\mathfrak{g}_2$ est de dimension inférieure ou égale à 1, à l'exception du cas où (R, λ_0) est de type (B_3, α_2) , (i.e. (R, λ_0) est de type (C_n, α_n) , ou (F_4, α_1) ou (G_2, α_2)), les conditions du lemme 5 sont vérifiées; toutes les orbites sont de "bonnes orbites spéciales" au sens de [6]. Par une consultation des résultats donnés dans [6], on constate que ce sont les seuls.

REFERENCES

- [1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chap. 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.
- [2] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chap. 7 et 8, Hermann, Paris, 1975.
- [3] J. I. Igusa, *A classification of spinors up to dimension twelve*, Amer. J. of Math., **92** (1970), 997–1028.
- [4] J. I. Igusa, *Exponential sums associated with a Freudenthal quartic*, J. Fac. Sci. of Tokyo, **24** (1977), 231–246.
- [5] S. Kaneyuki, *The Sylvester law of inertia in simple graded Lie algebras*, preprint, Sophia University, Tokyo.
- [6] T. Kimura, F. Sato and X. W. Zhu, *On the poles of $\mathfrak{P}$ -adic complex powers and the b -functions of prehomogeneous vector spaces*, Am. Journal of Math., **112** (1990), 423–437.
- [7] J. G. Mars, *Les nombres de Tamagawa de certains groupes exceptionnels*, Bull. Soc. Math. France, **94** (1966), 97–140.
- [8] O. T. O'Meara, Introduction to quadratic forms, Springer-Verlag, 1963.
- [9] I. Muller, *Décomposition orbitale des espaces préhomogènes réguliers de type parabolique commutatif et application*, C. R. A. S. Paris, 303, série I, 1986, pp. 495–498.
- [10] I. Muller, *Formes quadratiques et classification d'orbites pour une classe d'espaces préhomogènes*, C. R. A. S. Paris, 312, série I, 1991, pp. 319–322.
- [11] I. Muller, *Systèmes de racines orthogonales et orbites d'espaces préhomogènes*, Thèse, Université de Strasbourg, 1996.
- [12] I. Muller, *Structure and Orbits of certain prehomogeneous vector spaces related with orthogonal roots*, Proc. of the Japan A., LXXII, n°5 (1996), pp. 104–107.
- [13] I. Muller, *Racines orthogonales et orbites d'algèbres de Lie semi-simple graduées*, Journal of Algebra, **193** (1997), 41–74.
- [14] H. Rubenthaler, *Espaces préhomogènes de type parabolique*, Thèse, Université de Strasbourg, 1982.
- [15] H. Rubenthaler, *Espaces vectoriels préhomogènes, sous-groupes paraboliques et sl_2 -triplets*, C. R. A. S. Paris, 290, 1980, pp. 127–129.
- [16] H. Rubenthaler, *Espaces préhomogènes de type parabolique*, Lect. Math. Kyoto Univ., **14** (1988), 189–221.
- [17] I. Satake, *A formula in simple Jordan algebras*, Tôhoku Math. J., **36** (1984), 611–622.

- [18] M. Sato et T. Kimura, *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math. J., **65** (1977), 1–155.
 [19] G. B. Seligman, *Rational methods in lie algebras*, Dekker, 1976.
 [20] J. P. Serre, *Cours d'arithmétique*, P. U. F. (1970).
 [21] E. B. Vinberg, *Classification of Homogeneous Nilpotent Elements of a Semi-simple Graded Lie Algebra*, Selecta Math. Sovietica, **6** (1987), 15–35.

Tableau 1: cas $(R, \lambda_0) = (C_n, \alpha_n)$ $\mathfrak{P}$ pour corps $\mathfrak{p}$ -adique

n pour corps de nombres

(Δ, λ_0)	Diagramme de Satake	$\mathbb{R}$	n	$\mathfrak{P}$	d
(C_n, α_n)		×	×	×	2
		×	×	×	4
		×	×	×	1
(C_3, α_3)		×	×	non	8
(A_{2n-1}, α_n)		×	×	×	2
(D_{2n}, α_{2n-1}) ou (D_{2n}, α_{2n})		×	×	×	4
(E_7, α_7)		×	×	×	8

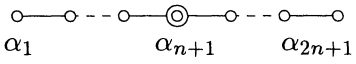
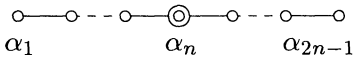
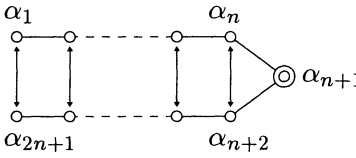
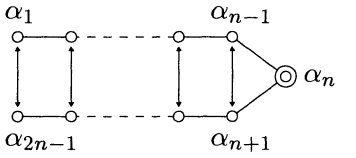
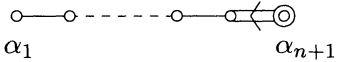
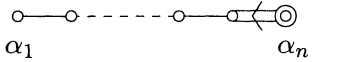
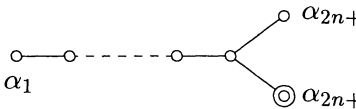
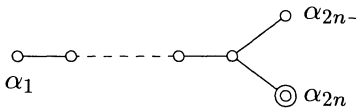
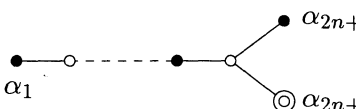
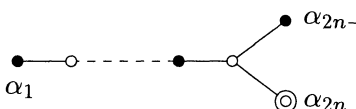
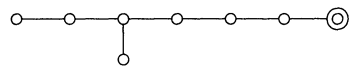
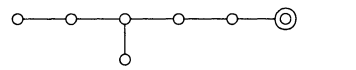
Tableau 2: cas $(R, \lambda_0) = (F_4, \alpha_1)$

(Δ, λ_0)	Diagramme de Satake	d	$\mathbb{R}$	n	$\mathfrak{P}$
(F_4, α_1)		1	$\times$	$\times$	$\times$
		2	$\times$	$\times$	$\times$
		4	$\times$	$\times$	$\times$
		8	$\times$	$\times$	non
(E_6, α_2)		2	$\times$	$\times$	$\times$
(E_7, α_1)		4	$\times$	$\times$	$\times$
(E_8, α_8)		8	$\times$	$\times$	$\times$

Tableau 3:

$$\tilde{\Delta}^{\tilde{\lambda}_0} = \{\lambda \in \tilde{\Delta} / (\lambda, \tilde{\lambda}_0) = 0\}$$

$$\tilde{\Delta}_i^{\tilde{\lambda}_0} = \tilde{\Delta}^{\tilde{\lambda}_0} \cap \tilde{\Delta}_i$$

$(\tilde{\Delta}, \tilde{\lambda}_0)$	$(\tilde{\Delta}_0^{\tilde{\lambda}_0}, \tilde{\Delta}_1^{\tilde{\lambda}_0})$	$\mathbb{R}$	n	$\mathfrak{P}$
(A_{2n+1}, α_{n+1}) 	(A_{2n-1}, α_n) 	$\times$	$\times$	$\times$
$({}^2A_{2n+1}^{(1)}, \alpha_{n+1})$ 	$({}^2A_{2n-1}^{(1)}, \alpha_n)$ 	$\times$	$\times$	$\times$
(C_{n+1}, α_{n+1}) 	(C_n, α_n) 	$\times$	$\times$	$\times$
$(D_{2n+2}, \alpha_{2n+2})$ 	(D_{2n}, α_{2n}) 	$\times$	$\times$	$\times$
$({}^1D_{2n+2,n+1}^{(2)}, \alpha_{2n+2})$ 	$({}^1D_{2n,n}^{(2)}, \alpha_{2n})$ 	$\times$	$\times$	$\times$
(E_8, α_8) 	(E_7, α_7) 	$\times$	$\times$	$\times$

