Commun. math. Phys. 12, 16—35 (1969)

Construction de solutions radiatives approchées des equations d'Einstein

Y. Choquet-Bruhat
Institut Poincaré — Paris

Reçu le 17 Juillet 1968

Abstract. In this paper we construct rigorously, without any averaging scheme, an hyperbolic metric

$$g_{\alpha\beta}(x, \omega\varphi) = \overset{0}{g}_{\alpha\beta}(x) + \frac{1}{\omega}\overset{1}{g}_{\alpha\beta}(x, \omega\varphi) + \frac{1}{\omega^2}\overset{2}{g}_{\alpha\beta}(x, \omega\varphi) \tag{1}$$

where x is a point of the space-time V_4, φ a scalar function on V_4 (the "phase") and ω a great parameter (the "frequency"). This metric is an approximate solution of Einstein's equations: it verifies

$$R_{\alpha\beta} = 0(\omega^{-1}), \tag{2}$$

$\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ and its derivatives, $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}$ and $\overset{2}{g}_{\alpha\beta}$ being bounded, the first and second derivatives of $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}$, $\overset{2}{g}_{\alpha\beta}$ of order respectively $0(\omega)$ and $0(\omega^2)$.

We first show that the Ricci tensor of (1) stays bounded (when ω increases), with a perturbation $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}$ physically significant, if and only if φ verifies the characteristic equation of the back-ground metric and $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}$ four algebraic, linear relations, (5.7) and (5.8) in radiative coordinates $x^0 = \varphi$.

We show afterwards that (1) satisfies (2) if $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}$ satisfies ordinary differential first order equations (which take a very simple form in radiative coordinates) along the rays of the background, the preceding algebraic relations can be considered as "initial conditions" if the Ricci tensor of the background is of the radiative form

$$R_{\alpha\beta}(\overset{0}{g}_{\lambda\mu}) = \tau\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi. \tag{3}$$

It is possible to find $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}$ and $\overset{2}{g}_{\alpha\beta}$ with the required conditions of boundedness only if

$$\tau > 0.$$

We apply the results to the Vaydya metric (13.1) and show that, by an oscillatory perturbation of this metric one can satisfy Einstein's equations (to the order ω^{-1}) if the coefficient m usually interpreted as the mass is a decreasing function of $\varphi = u$, which gives, in this context, a proof of the loss of mass by gravitational radiation.

Introduction

Nous nous proposons dans cet article d'utiliser pour l'étude de solutions radiatives des équations d'Einstein[1] une méthode générale de construction d'ondes asymptotiques et d'ondes approchées, dérivée de la

[1] Nous construisons ici des solutions (approchées) des équations du vide, c'est-à-dire des géons gravitationnels au sens de J. A. Wheeler [3]. Une méthode analogue pourrait être utilisée pour des équations des milieux matériels.

méthode W.K.B., généralisée aux systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires par LAX [13], LUDWIG [14], GÅRDING, KOTAKÉ et LERAY [2], et que nous avons étendue aux équations non linéaires dans [1]. Nous avons déjà indiqué dans [1] une application possible de cette méthode à la recherche de solutions rapidement oscillatoires des équations d'Einstein et cette application a été développée et approfondie par GOMES [8], en utilisant des coordonnées harmoniques et en cherchant une solution somme d'une métrique de base et d'un terme petit, mais rapidement oscillatoire, fournissant à la courbure de l'espace temps une contribution de l'ordre de grandeur de la courbure de la métrique de base.

Dans cet article[2] conformément aux idées de BRILL and HARTLE [4] et de ISAACSON [5], nous ajoutons à la métrique de base $\overset{0}{g}$ un terme petit, rapidement oscillatoire $\frac{1}{\omega}\overset{1}{g}$, ω grand, dont les dérivées premières (et non les dérivées secondes) sont de l'ordre de grandeur de la métrique de base et de ses dérivées.

Dans la première partie, après avoir donné les notations et définitions nécessaires, nous montrons que la métrique $\overset{1}{g}$ admet une partie significative, invariante par des changements de coordonnées oscillatoires conservant la métrique de base, et une partie qui peut être rendue arbitraire par ces transformations.

Dans la deuxième partie, sans utiliser aucun artifice de moyennisation de certains termes, nous obtenons un système exact d'équations différentielles exprimant que la métrique $\overset{0}{g} + \frac{1}{\omega}\overset{1}{g}$ est solution, à des termes en $1/\omega$ près, des équations d'Einstein: en calculant le tenseur de Ricci R de cette métrique sous la forme

$$R = \omega \overset{-1}{R} + \overset{0}{R} + \frac{1}{\omega}\overset{1}{R} + \cdots$$

et en annulant $\overset{-1}{R}$ et $\overset{0}{R}$. Nous montrons que ces équations sont équivalentes à un système de quatre «conditions initiales» (algébriques) pour la partie physiquement significative de la métrique $\overset{1}{g}$ et à des équations différentielles ordinaires exprimant la propagation le long des rayons gravitationnels de cette partie significative, la métrique de base $\overset{0}{g}$, qui était à priori arbitraire, étant astreinte à quatre conditions algébriques portant sur son tenseur de Ricci, vérifiées en particulier si celui-ci est de la forme radiative:

$$R_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta \tag{1}$$

(l_α vecteur isotrope, τ scalaire quelconque).

[2] Nous n'utilisons pas ici, les coordonnées harmoniques.

Dans la troisième partie nous étudions les conditions pour qu'une métrique $\overset{0}{g} + \frac{1}{\omega}\overset{1}{g}$ solution des équations différentielles précédemment obtenues soit effectivement une solution approchée des équations d'Einstein c'est-à-dire que son tenseur de Ricci vérifie une inégalité de la forme

$$|R_{\alpha\beta}| \leqq M\omega^{-1}$$

où M est une constante. Nous obtenons, pour la vérification de cette propriété des conditions nécessaires et suffisantes qui sont que $R_{\alpha\beta}$ soit de la forme (1), que τ soit une fonction non nulle $\left(\text{si } \overset{1}{g} \text{ n'est pas nul}\right)$ strictement positive.

Ce dernier résultat, physiquement très satisfaisant, exprime la perte d'énergie par radiation gravitationnelle, en particulier le fait que le scalaire interprété comme masse dans les solutions classiques (solution de Vaydya par exemple) décroit par cette radiation.

I. Definitions et generalités

1. Ondes asymptotiques

La méthode W.K.B. consiste en la recherche de solutions d'une équation différentielle de la forme $Ae^{i\Phi}$ où A est une amplitude lentement variable et Φ une phase, rapidement oscillatoire. On généralise[3] cette méthode à un système de N équations aux dérivées partielles aux inconnues f_t

$$L_s(f_t) = 0\,, \qquad s, t = 1, \ldots, N \tag{1.1}$$

sur une variété différentiable V_n de point courant x, en cherchant f_t sous forme d'une série formelle[4] de puissances négatives d'un paramètre ω qui sera considéré comme grand (ω sera interprété comme fréquence)

$$f_t(x, \omega\varphi) = \sum_{q=0}^{\infty} \omega^{-q} \overset{q}{f}_t \circ \omega\varphi\,, \tag{1.2}$$

où φ est une fonction scalaire sur V_n, nommée phase, et où les $\overset{q}{f}_t$ sont des fonctions de $x \in V_n$ et d'un paramètre numérique réel ξ; on a posé d'autre part

$$\overset{q}{f}_t \circ \omega\varphi = \left\{\overset{q}{f}_t(x, \xi)\right\}_{\xi = \omega\varphi} = \overset{q}{f}_t(x, \omega\varphi)\,. \tag{1.3}$$

En reportant formellement 1.2 dans 1.1 on trouve un développement formel:

$$L_s(f_t) = \sum_{q=-n}^{\infty} \omega^{-q} \overset{q}{F}_s \circ \omega\varphi$$

[3] Cf LAX [13], LUDWIG [14], GARDING-KOTAKÉ-LERAY [2], CHOQUET-BRUHAT [1].

[4] C'est-à-dire que nous ne nous préoccupons pas ici de la convergence de cette série.

où les $\overset{q}{F}_s$ sont $\left(\text{par l'intermédiaire des } \overset{p}{f}_t \text{ et de leurs dérivées partielles}\right)$ des fonctions de x et de ξ.

Nous dirons, avec J. LERAY, que la série formelle 1.2 est une onde asymptotique pour le système d'équations (1.1) si

$$\overset{q}{F}_s(x, \xi) = 0\,, \qquad \text{quels que soient } x, \xi \text{ et } q\,.$$

2. Ondes approchées. Cas des équations d'Einstein

La somme finie

$$f_t(x, \omega\varphi) = \sum_{q=0}^{r} \omega^{-q} \overset{q}{f}_t \circ \omega\varphi$$

sera dite une onde approchée d'ordre p, dans le domaine $\Omega \subset V_n$ si, pour tout $x \in \Omega$

$$|L_s(f_t)| \leqq M\omega^{-p}\,, \qquad \text{quelque soit } \xi$$

où M est une constante.

Nous appliquerons la méthode indiquée à la recherche de solutions radiatives approchées[5] des équations d'Einstein du vide[6]

$$R_{\alpha\beta} \equiv \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\beta\lambda} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\lambda\mu} - \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} = 0 \tag{2.1}$$

sous forme d'un développement limité

$$g_{\lambda\mu}(x, \omega\varphi) = \overset{0}{g}_{\lambda\mu}(x) + \frac{1}{\omega}\overset{1}{g}_{\lambda\mu}(x, \omega\varphi) + \frac{1}{\omega^2}\overset{2}{g}_{\lambda\mu}(x, \omega\varphi) \tag{2.2}$$

où $\overset{0}{g}_{\lambda\mu}$, dite métrique de base, ne vérifie pas d'autre condition a priori que d'être une métrique hyperbolique normale, suffisamment différentiable. Désignons par

$$g^{\lambda\mu} = \overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}(x) + \frac{1}{\omega}\overset{1}{g}{}^{\lambda\mu}(x, \omega\varphi) + \frac{1}{\omega^2}\overset{2}{g}{}^{\lambda\mu}(x, \omega\varphi) + \cdots \tag{2.3}$$

les élements de la matrice inverse de $g_{\lambda\mu}$, définis par

$$g^{\lambda\mu} g_{\lambda\alpha} = \delta^\mu_\alpha$$

c'est-à-dire

$\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\overset{0}{g}_{\lambda\alpha} = \delta^\mu_\alpha$, $\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}$ est la matrice inverse de $\overset{0}{g}_{\lambda\mu}$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{1}{g}{}^{\lambda\mu}\overset{0}{g}_{\lambda\alpha} + \overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\overset{1}{g}_{\lambda\alpha} = 0\,, \qquad \text{c'est à dire} \qquad \overset{1}{g}{}^{\lambda\mu} = -\overset{0}{g}{}^{\lambda\alpha}\overset{0}{g}{}^{\mu\beta}\overset{1}{g}_{\alpha\beta} \\ \vdots \\ \overset{p}{g}{}^{\lambda\mu}\overset{0}{g}_{\lambda\alpha} + \overset{q-1}{g}{}^{\lambda\mu}\overset{1}{g}_{\lambda\alpha} + \overset{p-2}{g}{}^{\lambda\mu}\overset{2}{g}_{\lambda\alpha} = 0 \end{array}\right. \tag{2.4}$$

qui détermine par récurrence $\overset{p}{g}{}^{\lambda\mu}$ en fonction de $\overset{q}{g}_{\lambda\mu}$, $q = 0, 1, 2$.

---

[5] La méthode peut aussi fournir (cf [1], [8]) des ondes asymptotiques, mais la recherche d'ondes approchées d'ordre > 1 s'avère comme difficile (et peut-etre impossible, du moins au sens précédent, phénomène à rapprocher de la non éxistence de solutions périodiques des équations d'Einstein (cf PAPAPETRON).

[6] La même méthode permettrait de rechercher de telles solutions à l'intérieur de la matière. Nous nous bornons ici au cas du vide pour simplifier l'exposé.

Le développement (2.3) est convergent dès que ω est assez grand $\left(g^{\lambda\mu}\right.$ est une fraction rationnelle, à dénominateur non nul, de $\left.\overset{q}{g}_{\lambda\mu}\right)$ *si les fonctions* $\overset{q}{g}_{\lambda\mu}(x, \xi)$ *sont des fonctions bornées de* x, ξ. Nous chercherons toujours des fonctions $\overset{q}{g}_{\lambda\mu}(x, \xi)$ possédant cette propriété, nécessaire pour que les termes de (2.2) aient effectivement l'ordre de grandeur des puissances de ω qui les multiplient.

La dérivation (2.3) donne

$$\bar{\partial}_\alpha g_{\lambda\mu} = \partial_\alpha \overset{0}{g}_{\lambda\mu} + \overset{1}{g}{}'_{\lambda\mu} n_\alpha + \frac{1}{\omega} \partial_\alpha \overset{1}{g}_{\lambda\mu} + \frac{1}{\omega} \overset{2}{g}{}'_{\lambda\mu} n_\alpha + \frac{1}{\omega^2} \partial_\alpha \overset{2}{g}_{\lambda\mu} \tag{2.5}$$

où on a posé

$$\bar{\partial}_\alpha g_{\lambda\mu}(x, \omega\varphi) = \frac{\partial g_{\lambda\mu}(x, \omega\varphi(x))}{\partial x^\alpha}$$

$$n_\alpha = \partial_\alpha \varphi$$

$$g'_{\lambda\mu} = \left\{\frac{\partial g_{\lambda\mu}(x, \xi)}{\partial \xi}\right\}_{\xi = \omega\varphi}$$

et

$$\partial_\alpha g_{\lambda\mu} = \left\{\frac{\partial g_{\lambda\mu}(x, \xi)}{\partial x^\alpha}\right\}_{\xi = \omega\varphi}$$

on déduit de (2.5) et (2.3) le développement des symboles de Cristoffel $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \overset{0}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} + \frac{1}{\omega} \overset{1}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} + \frac{1}{\omega^2} \overset{2}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} + \cdots \tag{2.6}$$

avec

$$\overset{0}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{\lambda\mu} \left(\overset{1}{g}{}'_{\beta\mu} n_\alpha + \overset{1}{g}{}'_{\alpha\mu} n_\beta - \overset{1}{g}{}'_{\alpha\beta} n_\mu\right)$$

où on désigne par $\bar{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta}$ les symboles de Cristoffel de la métrique de base $\overset{0}{g}_{\lambda\mu}$

$$\begin{aligned} \overset{1}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} = {} & \frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{\lambda\mu} \left(\overset{2}{g}{}'_{\beta\mu} n_\alpha + \overset{2}{g}{}'_{\alpha\mu} n_\beta - \overset{2}{g}{}'_{\alpha\beta} n_\mu\right) \\ & + \frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{\lambda\mu} \left(\partial_\alpha \overset{1}{g}_{\beta\mu} + \partial_\beta \overset{1}{g}_{\alpha\mu} - \partial_\mu \overset{1}{g}_{\alpha\beta}\right) \\ & + \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}^{\lambda\mu} \left(\partial_\alpha \overset{0}{g}_{\beta\mu} + \partial_\beta \overset{0}{g}_{\alpha\mu} - \partial_\mu \overset{0}{g}_{\alpha\beta}\right) \\ & + \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}^{\lambda\mu} \left(\overset{1}{g}{}'_{\beta\mu} n_\alpha + \overset{1}{g}{}'_{\alpha\mu} n_\beta - \overset{1}{g}{}'_{\alpha\beta} n_\mu\right). \end{aligned}$$

Du développement (2.6) on déduit le développement du tenseur de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = \omega \overset{-1}{R}_{\alpha\beta} + \overset{0}{R}_{\alpha\beta} + \frac{1}{\omega} \overset{1}{R}_{\alpha\beta} + \cdots$$

Conformément à nos définitions la métrique $g_{\lambda\mu}$ sera onde approchée d'ordre zéro si $\overset{-1}{R}_{\alpha\beta} = 0$ (et $R_{\alpha\beta}$ borné), onde approchée d'ordre 1 si $\overset{-1}{R}_{\alpha\beta} = 0$ et $\overset{0}{R}_{\alpha\beta} = 0$ (et $\omega R_{\alpha\beta}$ borné).

3. Invariances par changement de coordonnées

Un changement de coordonnées oscillatoire de phase φ et fréquence ω, et conservant le premier terme (métrique de base) du développement limité est de la forme

$$x^\alpha = \tilde{x}^\alpha + \frac{1}{\omega^2}\,\psi^\alpha(x, \omega\varphi) \tag{3.1}$$

en effet on a:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} = \delta^\alpha_\beta + \frac{1}{\omega}\,\psi'^{\,\alpha}\, n_\beta + \frac{1}{\omega^2}\,\partial_\beta\, \psi^\alpha \tag{3.2}$$

où on a posé

$$\begin{aligned} n_\beta &= \partial_\beta \varphi \\ \psi'^{\,\alpha}(x, \omega\varphi) &= \left\{\frac{\partial\, \psi^\alpha(x, \xi)}{\partial \xi}\right\}_{\xi = \omega\varphi} . \end{aligned} \tag{3.3}$$

D'où le développement de la métrique g dans les nouvelles coordonnées

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \overset{0}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} + \frac{1}{\omega}\,\overset{1}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} + \frac{1}{\omega^2}\,\overset{2}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} + \cdots \tag{3.4}$$

avec

$$\begin{aligned} \overset{0}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} &= \overset{0}{g}_{\alpha\beta} \\ \overset{1}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} &= \overset{1}{g}_{\alpha\beta} + \left(\overset{0}{g}_{\alpha\mu}\,\psi'^{\,\mu}\, n_\beta + \overset{0}{g}_{\beta\mu}\,\psi'^{\,\mu}\, n_\alpha\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

On déduit de (3.5) que, pour une phase φ donnée les composantes, en chaque point, de la partie principale radiative $\overset{1}{g}_{\lambda\mu}$ prises dans le 3-plan tangent à la sous variété $\varphi = C^{te}$ passant par ce point, ont seules une signification physique intrinsèque, étant seules invariantes par le changement de coordonnées.

Les composantes du tenseur de Ricci dans les nouvelles coordonnées sont d'autre part:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + \frac{1}{\omega}\,(R_{\alpha\mu}\,\psi'^{\,\mu}\, n_\beta + R_{\beta\mu}\,\psi'^{\,\mu}\, n_\alpha) + \cdots$$

c'est-à-dire que l'on a:

$$\begin{aligned} \overset{-1}{\tilde{R}}_{\alpha\beta} &= \overset{-1}{R}_{\alpha\beta} \\ \overset{0}{\tilde{R}}_{\iota\beta} &= \overset{0}{R}_{\alpha\beta} + \left(\overset{-1}{R}_{\alpha\mu}\, n_\beta + \overset{-1}{R}_{\beta\mu}\, n_\alpha\right)\psi'^{\,\mu} . \end{aligned}$$

On en déduit que les équations $\overset{-1}{R}_{\alpha\beta} = 0$ d'une part, l'ensemble des équations $\overset{-1}{R}_{\alpha\beta} = 0$ et $\overset{0}{R}_{\alpha\beta} = 0$ d'autre part, sont invariantes par le changement de coordonnées (3.1).

II. Conditions algébriques et différentielles

4. Ondes approchées d'ordre zéro

On a par un simple calcul d'identification:

$$\overset{-1}{R}_{\alpha\beta} = \overset{0}{\Gamma}{}'^{\lambda}_{\alpha\beta}\, n_\lambda - \overset{0}{\Gamma}{}'^{\lambda}_{\beta\lambda}\, n_\alpha .$$

D'où l'équation des ondes approchées d'ordre zéro:

$$\overset{-1}{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\left\{\left(\overset{1}{g}{}''_{\alpha\mu} n_\beta + \overset{1}{g}{}''_{\beta\mu} n_\alpha\right) n_\lambda - \overset{1}{g}{}''_{\lambda\mu} n_\alpha n_\beta - \overset{1}{g}{}''_{\alpha\beta} n_\lambda n_\mu\right\} = 0 \quad (4.1)$$

où on a posé

$$\overset{1}{g}{}''_{\lambda\mu} = \left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\overset{1}{g}_{\lambda\mu}(x,\xi)\right\}_{\xi=\omega\varphi} .$$

Les équations (4.1) se présentent, quelle que soit la métrique $\overset{0}{g}_{\lambda\mu}$, comme un système de 10 équations linéaires homogènes aux 10 inconnues $\overset{1}{g}{}''_{\alpha\beta}$: on vérifie aisément que ces équations, analogues à celles que l'on trouve dans l'étude des chocs gravitationnels, ne sont pas indépendantes. Deux cas sont à distinguer:

1°) $$\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu} n_\lambda n_\mu \neq 0 . \quad (4.2)$$

La solution générale des équations (4.1), dans les $\overset{1}{g}{}''_{\lambda\mu}$, est alors

$$\overset{1}{g}{}''_{\alpha\mu} = \theta_\alpha n_\mu + \theta_\mu n_\alpha \quad (4.3)$$

où $\theta_\alpha(x, \omega\varphi)$ est un vecteur covariant arbitraire.

Il résulte du § 5 que le changement de coordonnées

$$x^\alpha = \tilde{x}^\alpha + \frac{1}{\omega^2}\psi^\alpha(x,\omega\varphi) , \qquad \psi''^\alpha = -\overset{0}{g}{}^{\alpha\mu}\theta_\alpha$$

annule $\overset{1}{g}{}''_{\alpha\mu}$. Il est clair d'autre part que si $\overset{1}{g}{}''_{\alpha\mu}$ est nul $\overset{1}{g}_{\alpha\mu}$ ne pourra pas être borné pour tout ξ et dépendre effectivement de ξ.

Le cas $\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu} n_\lambda n_\mu \neq 0$ est donc peu intéressant physiquement, la partie oscillatoire du champ pouvant être annulée par un changement de coordonnées conservant la partie principale.

2°) $$\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu} n_\lambda n_\mu = 0 \quad (4.4)$$

c'est-à-dire $\varphi =$ constante variété caractéristique de l'équation d'onde de la métrique $\overset{0}{g}_{\lambda\mu}$.

Les équations (4.1) s'écrivent alors:

$$\overset{-1}{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\left(\overset{1}{g}{}''_{\alpha\mu} n_\beta n_\lambda + \overset{1}{g}{}''_{\beta\mu} n_\alpha n_\lambda - \overset{1}{g}{}''_{\lambda\mu} n_\alpha n_\beta\right) = 0 , \quad (4.5)$$

c'est-à-dire:

$$\overset{-1}{R}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(n_\alpha \Phi''_\beta + n_\beta \Phi''_\alpha) = 0 \quad (4.6)$$

et sont équivalentes aux quatre équations

$$\Phi''_\alpha = 0 \quad (4.7)$$

où on a posé

$$\Phi_\alpha = \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\left(\overset{1}{g}_{\lambda\mu} n_\alpha - \overset{1}{g}_{\alpha\mu} n_\lambda\right) . \quad (4.8)$$

D'après une remarque déjà faite les équations (4.7) entraînent, si $\overset{1}{g}_{\lambda\mu}$ est borné pour tout ξ:

$$\Phi_\alpha = 0 . \tag{4.9}$$

On remarque que, si F^μ désigne le premier membre des conditions d'harmonicité:

$$F^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\lambda\mu}\right) \equiv \partial_\lambda g^{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial_\lambda |g|}{|g|} g^{\lambda\mu}$$

avec les formules bien connues

$$\partial_\lambda g^{\lambda\mu} = - g^{\lambda\varrho} g^{\mu\sigma} \partial_\lambda g_{\varrho\sigma}$$

$$\frac{1}{|g|} \partial_\lambda |g| = g^{\alpha\beta} \partial_\lambda g_{\alpha\beta} .$$

On a, en utilisant les développements (2.1) et (2.3)

$$F^\mu = \overset{0}{F^\mu} + \frac{1}{\omega} \overset{1}{F^\mu} + \cdots$$

avec

$$\overset{0}{F^\mu} = F^\mu \left(\overset{0}{g}_{\lambda\mu}\right) + \Phi^\beta .$$

Les équations (4.9) expriment donc la conservation des conditions d'harmonicité, quand on remplace $\overset{0}{g}_{\lambda\mu}$ par $\overset{0}{g}_{\lambda\mu} + \frac{1}{\omega} \overset{1}{g}_{\lambda\mu}$. D'où le.

Théorème[7]. *La métrique* $\overset{0}{g}_{\lambda\mu} + \frac{1}{\omega} \overset{1}{g}_{\lambda\mu} + \cdots$ *vérifie les équations* $\overset{-1}{R}_{\alpha\beta} = 0$ $\left(\textit{sans être équivalente à } \overset{0}{g}_{\lambda\mu}\right)$ *si et seulement si:*

1) $\varphi = Cte$ *est variété caractéristique de l'équation d'onde associée à* $\overset{0}{g}_{\lambda\mu}$.

2) *Les conditions d'harmonicité sont les même, (à des termes en* $1/\omega$ *près) pour les métriques* $\overset{0}{g}_{\lambda\mu}$ *et* $\overset{0}{g}_{\lambda\mu} + \frac{1}{\omega} \overset{1}{g}_{\lambda\mu} + \cdots$

Une métrique $\overset{0}{g}_{\lambda\mu} + \frac{1}{\omega} \overset{1}{g}_{\lambda\mu} + \cdots$ vérifiant les équations (4.1) sera effectivement une solution approchée d'ordre zéro si son tenseur de Ricci est borné pour tout x et tout ξ, ce qui sera réalisé si $\overset{0}{g}_{\lambda\mu}$, $\overset{1}{g}_{\lambda\mu}$ (et les termes suivant du développement limité si on en fait figurer), sont bornés pour tout x et ξ ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres par rapport à ces variables.

5. *Coordonnées radiatives*

Nous appellerons coordonnées radiatives des coordonnées telles que x^0 soit définie par:

$$x^0 = \varphi(x) , \quad \text{donc} \quad n_0 = 1 , \quad n_i = 0 . \tag{5.1}$$

Ce choix est toujours possible localement.

[7] On voit, qu'à cet ordre, aucune restriction n'est imposée à la métrique de base $\overset{0}{g}_{\lambda\mu}$.

La condition pour φ d'être surface d'onde de la métrique de base $\overset{0}{g}_{\lambda\mu}$ se traduit dans ces coordonnées par:

$$\overset{0}{g}{}^{00} = 0 \,. \tag{5.2}$$

La partie significative du terme oscillatoire $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}$ est

$$\overset{1}{g}_{ij} \,; \qquad i, j = 1, 2, 3 \,.$$

Les équations (4.1) s'écrivent:

$$\overset{-1}{R}_{ij} \equiv 0 \,, \tag{5.3}$$

$$\overset{-1}{R}_{0i} \equiv \frac{1}{2} n^j \overset{1}{g}{}''_{ij} = 0 \tag{5.4}$$

$$\overset{-1}{R}_{00} \equiv -\frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{ij} \overset{1}{g}{}''_{ij} = 0 \tag{5.5}$$

où on a posé $n^\lambda = \overset{0}{g}{}^{\lambda\mu} n_\mu$, c'est-à-dire

$$n^0 = 0 \,, \qquad n^j = \overset{0}{g}{}^{0j} \,. \tag{5.6}$$

Les quatre équations (5.3) sont, en coordonnées radiatives, les quatre conditions pour que l'on ait une onde approchée d'ordre zéro, nécessaires et suffisantes[8], moyennant les conditions de finitude énoncées à la fin du paragraphe précédent. Ces dernières conditions entraînent que l'on déduit des équations (5.3)

$$\frac{1}{2} n^j \overset{1}{g}_{ij} = 0 \tag{5.7}$$

$$-\frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{ij} \overset{1}{g}_{ij} = 0 \tag{5.8}$$

multipliant (5.7) par n^i donne, compte tenu de (5.2) et (5.8)

$$\overset{1}{g}{}^{00} = 0 \,.$$

Donc $\varphi = C^{te}$ est aussi variété caractéristique à la deuxième approximation[9].

6. *Ondes approchées d'ordre 1*

Cherchons maintenant à vérifier, outre les équations $\overset{-1}{R}_{\alpha\beta} = 0$, les équations $\overset{0}{R}_{\alpha\beta} = 0$. On a:

$$\overset{0}{R}_{\alpha\beta} = \overset{1}{\Gamma}{}'^{\lambda}_{\alpha\beta} n_\lambda - \overset{1}{\Gamma}{}'^{\lambda}_{\beta\lambda} n_\alpha + \partial_\lambda \overset{0}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \overset{0}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\beta\lambda} + \overset{0}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\alpha\beta} \overset{0}{\Gamma}{}^{\mu}_{\lambda\mu} - \overset{0}{\Gamma}{}^{\mu}_{\lambda\mu} \overset{0}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\beta\mu}$$

[8] Ce ne sont donc pas ici des conditions de coordonnées comme elles apparaissent dans d'autres travaux.

[9] Les surfaces d'onde gravitationnelles sont des surfaces d'onde "exceptionnelles" au sens de LAX et BOILLAT.

d'où on déduit si $n^\lambda n_\lambda = 0$

$$\overset{0}{R}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\left(\overset{2}{g}{}''_{\alpha\mu}\, n_\beta\, n_\lambda + \overset{2}{g}{}''_{\beta\mu}\, n_\alpha\, n_\lambda - \overset{2}{g}{}''_{\lambda\mu}\, n_\alpha\, n_\beta\right) + \mathscr{H}_{\alpha\beta} = 0 \qquad 6.1$$

où $\mathscr{H}_{\alpha\beta}$ est la somme des termes suivants

$$\mathscr{H}_{\alpha\beta} = \mathrm{I}_{\alpha\beta} + \mathrm{II}_{\alpha\beta} + \mathrm{III}_{\alpha\beta} + \mathrm{IV}_{\alpha\beta} + \mathrm{V}_{\alpha\beta}$$

$$\mathrm{I}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\overset{1}{g}{}^{\lambda\mu}\left(\overset{1}{g}{}''_{\alpha\mu}\, n_\beta\, n_\lambda + \overset{1}{g}{}''_{\beta\mu}\, n_\alpha\, n_\lambda - \overset{1}{g}{}''_{\lambda\mu}\, n_\alpha\, n_\beta\right)$$

$\left(\text{termes en } \overset{1}{g}{}''_{\lambda\mu}\right)$

$$\mathrm{II}_{\alpha\beta} \equiv -\, n^\lambda\, \partial_\lambda \overset{1}{g}{}'_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\left(\partial_\lambda \overset{1}{g}{}'_{\alpha\mu}\, n_\beta + \partial_\lambda \overset{1}{g}{}'_{\beta\mu}\, n_\alpha - \partial_\alpha \overset{1}{g}{}'_{\lambda\mu}\, n_\beta - \partial_\beta \overset{1}{g}{}'_{\lambda\mu}\, n_\alpha\right)$$
$$+ \frac{1}{2} n^\lambda \left(\partial_\alpha \overset{1}{g}{}'_{\lambda\beta} + \partial_\beta \overset{1}{g}{}'_{\lambda\alpha}\right)$$

$\left(\text{termes en dérivées } \partial_\nu \overset{1}{g}{}'_{\mu\lambda}\right)$

$$\mathrm{III}_{\alpha\beta} \equiv +\frac{1}{2}\overset{1}{g}{}'^{\lambda\mu}\left\{\left(\overset{1}{g}{}'_{\alpha\mu}\, n_\beta + \overset{1}{g}{}'_{\beta\mu}\, n_\alpha\right) n_\lambda - \overset{1}{g}{}'_{\lambda\mu}\, n_\alpha\, n_\beta - \overset{1}{g}{}'_{\alpha\beta}\, n_\lambda\, n_\mu\right\}$$
$$+ \frac{1}{4} n^\lambda\, \overset{0}{g}{}^{\varrho\sigma}\, \overset{1}{g}{}'_{\varrho\sigma}\left(\overset{1}{g}{}'_{\beta\lambda}\, n_\alpha + \overset{1}{g}{}'_{\alpha\lambda}\, n_\beta\right)$$
$$- \frac{1}{4}\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\, \overset{0}{g}{}^{\varrho\nu}\left(\overset{1}{g}{}'_{\varrho\mu}\, n_\alpha + \overset{1}{g}{}'_{\alpha\mu}\, n_\varrho - \overset{1}{g}{}'_{\alpha\varrho}\, n_\mu\right)\left(\overset{1}{g}{}'_{\lambda\nu}\, n_\beta + \overset{1}{g}{}'_{\beta\nu}\, n_\lambda - \overset{1}{g}{}'_{\beta\lambda}\, n_\nu\right)$$

$\left(\text{termes quadratiques en } \overset{1}{g}{}'_{\lambda\mu}\right)$

$$\mathrm{IV}_{\alpha\beta} = \left\{-\, n^\lambda\, \bar{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\varrho\mu}\left(\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\varrho}\, n_\beta + \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\beta\varrho}\, n_\alpha\right)\right\}\overset{1}{g}{}'_{\lambda\mu}$$
$$- \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\, \overset{1}{g}{}'_{\lambda\mu}\, \bar{\nabla}_\alpha n_\beta + \frac{1}{2}\overset{1}{g}{}'_{\beta\mu}\left(\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\, \bar{\nabla}_\lambda n_\alpha + m^\lambda\, \bar{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\lambda} - \overset{0}{g}{}^{\varrho\lambda}\, \bar{\Gamma}^{\mu}_{\lambda\varrho}\, n_\alpha\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\overset{1}{g}{}'_{\alpha\mu}\left(\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\, \bar{\nabla}_\lambda n_\beta + n^\lambda\, \bar{\Gamma}^{\mu}_{\beta\lambda} - \overset{0}{g}{}^{\varrho\lambda}\, \bar{\Gamma}^{\mu}_{\lambda\varrho}\, n_\beta\right) - \frac{1}{2}\overset{1}{g}{}'_{\alpha\beta}\, \bar{\nabla}_\lambda n^\lambda$$

$\mathrm{V}_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta}$ ($\bar{R}_{\alpha\beta}$ tenseur de Ricci de la métrique de base).

Les équations (6.1) sont 10 équations linéaires en les $\overset{2}{g}{}''_{\lambda\mu}$, non homogènes. Les parties homogènes $\left(\text{identiques aux premiers membres des équations (4.5) après remplacement de } \overset{1}{g}{}''_{\lambda\mu} \text{ par } \overset{2}{g}{}''_{\lambda\mu}\right)$ sont non indépendantes: les parties non homogènes doivent donc, pour que les équations (6.1) puissent être satisfaites, vérifier les mêmes identités (qui sont au nombre de 6). Dans les coordonnées radiatives, $n_\alpha = \delta^0_\alpha$, les parties homogènes en $\overset{2}{g}{}''_{\lambda\mu}$ sont identiquement nulles pour $\alpha, \beta = i, j$, arbitraires si α ou $\beta = 0$. Les équations à vérifier par les parties indépendantes de $\overset{2}{g}{}''_{\lambda\mu}$ sont donc:

$$\mathscr{H}_{ij} = 0\,.$$

7. Propagation le long des rayons

On constate que, en coordonnées radiatives, $\overset{0}{R}_{ij}$ se réduit à

$$\begin{aligned}\overset{0}{R}_{ij} = {} & -n^h \partial_h \overset{1}{g}{}'_{ij} + \frac{1}{2} n^h \left(\partial_i \overset{1}{g}{}'_{hj} + \partial_j \overset{1}{g}{}'_{hi}\right) - \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}'^{00} \overset{1}{g}{}'_{ij} \\ & + \frac{1}{4} n^h n^k \overset{1}{g}{}'_{jh} \overset{1}{g}{}'_{ik} - \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}'_{ij} \overline{\nabla}_\lambda n^\lambda - n^h \overline{\Gamma}^k_{ij} \overset{1}{g}{}'_{hk} + \frac{1}{2} \overline{\Gamma}^0_{ij} \overset{0}{g}{}^{lm} \overset{1}{g}{}'_{lm} \\ & - \frac{1}{2} \overline{\Gamma}^0_{i0} n^h \overset{1}{g}{}'_{jh} - \frac{1}{2} \overline{\Gamma}^0_{il} \overset{0}{g}{}^{lm} \overset{1}{g}{}'_{jm} + \frac{1}{2} \overline{\Gamma}^r_{il} \overset{0}{g}{}^{l0} \overset{1}{g}{}'_{rj} + \overline{R}_{ij} = 0\end{aligned} \tag{7.1}$$

expression qui ne contient que $\overset{1}{g}{}'_{ij}$ et ses dérivées par rapport aux x^α les $\overset{1}{g}_{\alpha 0}$ n'y figurent pas $\left(\text{non plus que les } \overset{1}{g}{}''_{ij}\right)$. Compte tenu des relations nécessaires (5.7) et (5.8) les équations (7.1) prennent la forme remarquablement simple[10]

$$\overset{0}{R}{}^{1}_{ij} \equiv -n^h \widetilde{\nabla}_h \overset{1}{g}{}'_{ij} - \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}'_{ij} \overline{\nabla}_\lambda n^\lambda + \overline{R}_{ij} = 0 \tag{7.2}$$

où on a posé:

$$\widetilde{\nabla}_h \overset{1}{g}{}'_{ij} = \partial_h \overset{1}{g}{}'_{ij} - \overline{\Gamma}^l_{hi} \overset{1}{g}{}'_{il} - \overline{\Gamma}^l_{hj} \overset{1}{g}{}'_{il}$$

c'est-à-dire que $\widetilde{\nabla}_h$ est calculé formellement avec les symboles de Christoffel $\overline{\Gamma}^k_{ij}$, à l'exclusion de ceux présentant un indice zéro[11].

Les équations (7.2) sont des équations différentielles ordinaires pour les $\overset{1}{g}{}'_{ij}$, la dérivation étant prise dans la direction du vecteur n^h, vecteur tangent au rayon sur la surface d'onde $\varphi = C^{te}$.

8. Interprétation des conditions d'ordre zéro comme conditions initiales

Les équations (5.7), (5.8) et (7.2) sont des conditions nécessaires que doivent vérifiier les $\overset{1}{g}_{ij}$ pour fournir une onde approchée d'ordre 1. Montrons que la vérification des équations (7.2) dans l'espace temps et des équations (5.7), (5.8) seulement sur une hypersurface initiale transverse aux rayons (trajectoires du champ de vecteurs n^α) entraine la vérification de ces dernières équations dans l'espace temps[12] si le tenseur de Ricci de la métrique de base vérifie les conditions

$$n^j \overline{R}_{ij} = 0\,, \tag{8.1}$$

$$\overset{0}{g}{}^{ij} \overline{R}_{ij} = 0\,. \tag{8.2}$$

---

[10] Rappelons que, en coordonnées radiatives, $\overline{\Gamma}^0_{il} = \overline{\nabla}_l n_i$.

[11] Il serait intéressant d'étudier la signification intrinsèque de cette opération, analogue à la dérivation transverse de Cattaneo, mais pour une direction isotrope.

[12] Du moins tant que le processus suit une évolution régulière. Le problème des caustiques n'est pas envisagé ici.

On déduit alors en effet de (7.2)

$$-n^h n^j \tilde{\nabla}_h \overset{1}{g}'_{ij} - \frac{1}{2} n^j \overset{1}{g}'_{ij} \overline{\nabla}_\lambda n^\lambda = 0$$

qui s'écrit

$$-n^h \tilde{\nabla}_h \left(n^j \overset{1}{g}'_{ij}\right) - \frac{1}{2} n^j \overset{1}{g}'_{ij} \overline{\nabla}_\lambda n^\lambda = 0 \tag{8.3}$$

compte tenu du fait que $\tilde{\nabla}_h n^j = \overline{\nabla}_h n^j$ puisque $n^0 = 0$.

On trouve d'autre part, compte tenu de (7.2)

$$\overset{0}{g}{}^{ij} \overset{0}{R}{}^{1}_{ij} = n^h \partial_h \left(\overset{0}{g}{}^{ij} \overset{1}{g}'_{ij}\right) + 2 n^h \Gamma^i_{h0} n^j \overset{1}{g}'_{ij} - \frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{ij} \overset{1}{g}'_{ij} \overline{\nabla}_\lambda n^\lambda = 0 \,. \tag{8.4}$$

Les équations (8.3) et (8.4) sont quatre équations différentielles ordinaires (dérivation dans la direction des rayons) pour les quatre quantités $n^j \overset{1}{g}'_{ij}$ et $\overset{0}{g}{}^{ij} \overset{1}{g}_{ij}$, d'où le résultat annoncé pour ces quantités, donc pour $n^j \overset{1}{g}_{ij}$ et $\overset{0}{g}{}^{ij} \overset{1}{g}_{ij}$ pour des raisons déjà indiquées.

9. *Intégration des équations de propagation*

Le système d'équations différentielles linéaires est de la forme

$$\frac{dU}{dt} = A(x)\, U + B(x) \tag{9.1}$$

où $U = U(x, \xi)$ est une inconnue vectorielle, de composantes $\overset{1}{g}'_{ij}(x, \xi)$, $A(x)$ une matrice et $B(x)$ a pour composantes $\overline{R}_{ij}(x)$, la dérivation d/dt dans la direction du vecteur n^λ est définie par

$$\frac{d}{dt} = n^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

le point x dans (9.1) est une fonction de t définie par intégration du système différentiel bicaractéristique

$$\frac{dx^\lambda}{n_\lambda} = dt \Rightarrow x = x(t, y) \tag{9.2}$$

où y désigne un point d'une variété initiale S non tangente au vecteur n^λ:

$$x(0, y) = y \,, \qquad y \in S \,.$$

La solution générale de (9.1) est, sur le rayon issu du point y, pour la valeur t du paramètre sur ce rayon:

$$U(t, y, \xi) = \Phi(t, y)\,(\Psi(t, y) + \Theta(y, \xi)) \tag{9.3}$$

où

$$\Phi(t, y) = \exp \int_0^t A(x(\tau, y))\, d\tau \,,$$

$$\Psi(t, y) = \int_0^t B^0(x(\tau, y))\, \Phi^{-1}(\tau, y)\, d\tau$$

et $\Theta(y, \xi)$ est une fonction arbitraire, valeur initiale de U pour S:

$$U(0, y, \xi) = \Theta(y, \xi) \,. \tag{9.4}$$

On déduit de U l'expression de V, de composantes $\overset{1}{g}_{ij}$:

$$V(t, y, \xi) = \Phi(t, y)\,\Psi(t, y)\,\xi + \Phi(t, y)\,\chi(y, \xi) \tag{9.5}$$

où $\chi(y, \xi)$ est une primitive de $\Theta(y, \xi)$ par rapport à ξ. L'expression de $\overset{1}{g}_{ij}(x, \xi)$, c'est à dire de $V(x, \xi)$ se déduit de $V(t, y, \xi)$ par le changement de variables inverse de

$$(t, y) \to x(t, y)\,, \qquad y \in S \tag{9.6}$$

qui existe, au moins dans un voisinage de S, et donne les paramètres (t, y) d'un point de l'espace temps en fonction de ce point: $t = t(x)$, $y = y(x)$.

On voit alors sur (9.5) que $\overset{1}{g}_{ij}(x, \xi)$ ne pourra être borné pour tout ξ (condition que nous avons demandée à une onde approchée) que si $\Psi = 0$, c'est-à-dire si, en coordonnées radiatives

$$\overline{R}_{ij} = 0\,. \tag{9.7}$$

Autrement dit si, en coordonnées quelconques, $\overline{R}_{\alpha\beta}$ est de la forme

$$\overline{R}_{\alpha\beta} = m_\alpha n_\beta + m_\beta n_\alpha$$

où m_α est un vecteur quelconque, et $n_\alpha = \partial_\alpha \varphi$.

Remarque. Les conditions (9.7) entraînent les conditions (8.1) et (8.2).

En résumé nous avons montré le

Théorème. *Pour que, en coordonnées radiatives, les équations* $\overset{-1}{R}_{\alpha\beta} = 0$ *et* $\overset{0}{R}_{ij} = 0$ *soient vérifiées avec des* $\overset{1}{g}_{ij}(x, \xi)$ *bornés pour tout* ξ $\Big($*les* $\overset{1}{g}_{\alpha 0}$ *sont arbitraires*$\Big)$ *il est nécessaire et suffisant que.*

1) *La métrique de base vérifie les conditions,*

$$\overline{R}_{ij} = 0\,.$$

2) *les* $\overset{1}{g}_{ij}$ *vérifient les équations différentielles* (7.2) *de propagation le long des rayons,*

3) *les* $\overset{1}{g}_{ij}$ *vérifient les quatre conditions initiales* (5.7) *et* (5.8) *sur une variété initiale transverse aux rayons, et sont réguliers (de classe* C^2*) sur cette variété.*

Les $\overset{1}{g}_{ij}$ dépendent donc de deux fonctions arbitraires sur cette variété initiale: l'onde gravitationnelle ainsi définie a deux modes indépendants[13].

III. Perte d'énergie par radiation gravitationelle

10. Forme radiative du tenseur de Ricci $\overline{R}_{\alpha\beta}$

Les $\overset{1}{g}_{ij}$ satisfaisant aux hypothèses du théorème précédent, il est toujours possible de déterminer les $\overset{2}{g}_{ij}$ de manière à vérifier les quatre équations restantes $\overset{0}{R}_{0\alpha} = 0$, avec un choix arbitraire des $\overset{1}{g}_{0\alpha}$. Cependant

[13] Résultat en accord avec celui obtenu dans des cadres différents par d'autres auteurs.

il ne sera pas toujours possible de déterminer des $\overset{2}{g}_{ij}$ bornés pour tout ξ, ce qui est nécessaire pour avoir effectivement une onde approchée. Les équations $\overset{0}{R}_{0\alpha} = 0$ s'écrivent en effet si les conditions (5.7) et (5.8) sont vérifiées (on remarque alors que $\overset{1}{g}{}^{0j} = n^j n^h \overset{1}{g}_{0h}$, donc est proportionnel à n^j):

$$\begin{aligned}\overset{0}{R}_{0i} \equiv \frac{1}{2} n^j \overset{2}{g}{}''_{ij} - \frac{1}{2} n^j \left(\tilde{\nabla}_j \overset{1}{g}{}'_{0i} + \tilde{\nabla}_i \overset{1}{g}{}'_{0j}\right) \frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{hj} \tilde{\nabla}_h \overset{1}{g}{}'_{ij} \\ + \overline{R}_{0i} = 0\end{aligned} \tag{10.1}$$

(avec $\tilde{\nabla}_h \overset{1}{g}{}'_{0i} = \partial_h \overset{1}{g}{}'_{0i} - \overline{\Gamma}{}^l_{hi} \overset{1}{g}{}'_{0l}$);

pour qu'il existe des fonctions[14] $\overset{1}{g}_{0i}$ et $\overset{2}{g}{}'_{ij}$ bornées pour tout ξ, satisfaisant les équations (10.1), les $\overset{1}{g}_{ij}$ étant connus, bornés, il faut et il suffit que (rappelons que $\overline{R}_{0i}$ ne dépend pas de ξ)

$$\overline{R}_{0i} = 0\,. \tag{10.2}$$

Pour que, de plus, $\overset{2}{g}_{ij}$ puisse être trouvé borné il suffit que, en outre, $\overset{1}{g}_{ij}$ et $\overset{1}{g}_{0i}$ admettent des primitives bornées par rapport à ξ.

Les équations (10.2) s'écrivent en coordonnées quelconques, compte tenu des conditions précédentes

$$\overline{R}_{\alpha\beta} = \tau n_\alpha n_\beta \tag{10.3}$$

considérée habituellement comme représentant une radiation électromagnétique pure.

11. Perte d'énergie par radiation gravitationelle

Considérons enfin la dernière équation $\overset{0}{R}_{00} = 0$: on trouve, sous les mêmes hypothèses que dans le calcul de $\overset{0}{R}_{0i}$:

$$\begin{aligned}\overset{0}{R}_{00} \equiv -\frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{ij} \overset{2}{g}{}''_{ij} - \frac{1}{4}\left(\overset{1}{g}{}^{ij} \overset{1}{g}_{ij}\right)'' + \frac{1}{4} \overset{1}{g}{}'^{ij} \overset{1}{g}{}'_{ij} \\ + \overset{0}{g}{}^{lm} + \tilde{\nabla}_l \overset{1}{g}{}'_{0m} + \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}'_{00} \overline{\nabla}_\lambda n^\lambda + \overline{R}_{00} = 0\,.\end{aligned} \tag{11.1}$$

On déduit de l'équation (11.1), par intégration par rapport à ξ:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{ij} \overset{2}{g}{}'_{ij} - \frac{1}{4}\left(\overset{1}{g}{}^{ij} \overset{1}{g}_{ij}\right)' + \overset{0}{g}{}^{lm} \tilde{\nabla}_l \overset{1}{g}_{0m} + \frac{1}{2} \overset{1}{g}_{00} \overline{\nabla}_\lambda n^\lambda \\ + \frac{1}{4} \int_a^\xi \overset{1}{g}{}'^{ij} \overset{1}{g}{}'_{ij} \, d\xi + \xi \overline{R}_{00} = c\,.\end{aligned} \tag{11.2}$$

On a toujours (cf. 2.4)

$$\overset{1}{g}{}'^{ij} \overset{1}{g}{}'_{ij} \leqq 0\,.$$

---

[14] Ces inconnues sont évidemment surabondantes: on a vu que l'on pouvait par exemple prendre $\overset{1}{g}_{0i} = 0$ sans restreindre la généralité physique de la solution.

On déduit donc de l'équation (11.2) que $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}$ et $\overset{2}{g}'_{ij}$ ne peuvent pas être bornés pour tout ξ si $\overline{R}_{00} < 0$, on a donc nécessairement $\overline{R}_{00} \geqq 0$.

Il existe plusieurs manières de voir que le cas $\overline{R}_{00} = 0$ est à éliminer si l'on veut avoir une partie oscillatoire significative non nulle:

1°) On remarque que le cas $\overline{R}_{00} = 0$ implique que l'intégrale $\int_a^\infty \overset{1}{g}'^{ij} \overset{1}{g}'_{ij} \, d\xi$ est bornée, donc en particulier que $\overset{1}{g}'_{ij}$ tend vers zéro[15] quand ξ augmente indéfiniment, ce qui est, dans notre étude une solution peu satisfaisante.

2°) Si $\overset{1}{g}_{0\alpha}$ est à primitive bornée (condition vérifiée d'après le § 10 par $\overset{1}{g}_{0i}$) on voit, en intégrant par rapport à ξ que $\overset{2}{g}_{ij}$ ne peut être borné que si $\overline{R}_{00} > 0$ $\left(\text{une primitive de } \int_a^\xi \overset{1}{g}'^{ij} \overset{1}{g}'_{ij} \, d\xi \text{ étant toujours infiniment grande négative si } \overset{1}{g}'_{ij} \neq 0\right)$.

3°) On a vu que les quantités $\overset{1}{g}_{0\alpha}$ peuvent être éliminées par changementde coordonnées; si l'on fait $\overset{1}{g}_{\alpha 0} = 0$ dans (11.1) il vient

$$\overset{0}{R}_{00} = -\frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{ij} \overset{2}{g}''_{ij} - \frac{1}{4} \left(\overset{1}{g}{}^{ij} \overset{1}{g}_{ij}\right)'' + \frac{1}{4} \overset{1}{g}'^{ij} \overset{1}{g}'_{ij} + \overline{R}_{00} = 0$$

qui implique, si $\overset{1}{g}_{ij}$ et $\overset{2}{g}_{ij}$ sont bornés ainsi que leurs dérivées:

$$\overline{R}_{00} > 0\,. \tag{11.3}$$

D'où finalement.

Conclusion. *Pour que les équations d'Einstein admettent une onde approchée oscillatoire d'ordre* 1 *de la forme* (2.2) *il faut que la métrique de base soit telle que*

$$\overline{R}_{\alpha\beta} = \tau n_\alpha n_\beta\,, \qquad \tau > 0\,. \tag{11.4}$$

Remarque. Le facteur τ précédent représente la perte d'énergie par la radiation gravitationnelle due à la partie oscillatoire de la métrique.

12. Intégration des équations

La condition (11.3) est une condition nécessaire pour qu'existent $\overset{1}{g}_{ij}, \overset{2}{g}_{ij}$ bornés pour tout ξ. Une condition suffisante [la condition (10.3) étant réalisée] est que la somme des deux termes

$$\frac{1}{4} \overset{1}{g}'^{ij} \overset{1}{g}'_{ij} + \overline{R}_{00} \tag{12.1}$$

admette une primitive seconde bornée, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif M tel que

$$\frac{1}{4} \int_0^\xi \left(\overset{1}{g}'^{ij} \overset{1}{g}'_{ij}\right)_{\xi=\eta} (\xi - \eta) \, d\eta + \frac{\xi^2}{2} \overline{R}_{00} \leqq M \tag{12.2}$$

[15] Puisqu'on l'a supposé uniformément continu ($\overset{1}{g}''_{ij}$ uniformément borné).

qui implique

$$\overline{R}_{00} = - \lim_{\xi \to \infty} \frac{1}{2\xi^2} \int_0^{\xi} \left(\overset{1}{g}'^{ij} \overset{1}{g}'_{ij}\right)_{\xi = \eta} (\xi - \eta)\, d\eta \qquad (12.3)$$

les $\overset{1}{g}'_{ij}$ devant satisfaire aux conditions imposées dans les paragraphes précédents on voit que $\overline{R}_{00}$ ne pourra pas être quelconque. L'inégalité (12.2) implique une équation reliant la métrique de base à la perturbation oscillatoire qui doit permettre le calcul de la perte d'énergie par radiation[16].

En particulier si $\overset{1}{g}_{ij}$ est de la forme

$$\overset{1}{g}_{ij} = a_{ij}(x)\, f(\xi)$$

on devra avoir

$$\overline{R}_{00} = \lambda a^{ij}\, aij\,, \qquad \lambda \text{ nombre réel}\,.$$

Nous allons traiter, comme d'autres auteurs avant nous ([3–5]) le cas d'une métrique de base à symétrie sphérique. Notre méthode permet en prenant pour métrique de base la métrique radiative de Vaidya de donner une construction exacte et complète des perturbations oscillatoires se propageant suivant les trajectoires orthogonales des orbites du groupe d'isométrie, ces perturbations ne posséderont pas la symétrie sphérique, résultat prévisible (en liaison avec le théorème de Birkhoff).

13. Perturbation oscillatoire de la métrique de Vaidya

Prenons pour métrique de base la métrique de Vaidya, à symetrie sphérique, en coordonnées radiatives

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right) du^2 + 2du\, dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \qquad (13.1)$$

nous poserons

$$x^0 = u\,, \qquad x^1 = r\,, \qquad x^2 = \theta\,, \qquad x^3 = \psi$$

Les variétés $x^0 = C^{\text{te}}$ sont des surfaces d'onde de la métrique, qui est écrite en coordonnées radiatives. Le tenseur de Ricci de (13.1) est:

$$\overline{R}_{\alpha\beta} = \tau n_\alpha n_\beta\,, \qquad n_\alpha = \delta^0_\alpha\,, \qquad (13.2)$$

$$\tau = -\frac{2}{r^2}\frac{dm}{du} \qquad (13.3)$$

si m est constant, $\tau = 0$, (13.1) est la métrique de Schwarzschild que l'on met sous sa forme usuelle par le changement de variables

$$u = t - r - 2m \log(r - 2m)\,.$$

Cherchens une perturbation de la forme

$$\frac{1}{\omega}\overset{1}{g}_{ij} + \frac{1}{\omega^2}\overset{2}{g}_{ij} \quad \left(\text{avec } \overset{1}{g}_{0\alpha} = 0\right). \qquad (13.4)$$

[16] A relier sans doute à la "news function" de Bondi.

On a ici

$$n^1 = 1\,,\quad n^A = 0\,,\quad A = 2, 3\,. \tag{13.5}$$

Les conditions (5.7), (5.8) se réduisent donc à

$$\overset{1}{g}_{1j} = 0\,, \tag{13.6}$$

$$\overset{0}{g}{}^{AB}\,\overset{1}{g}_{AB} \equiv -\frac{1}{r^2}\left(\overset{1}{g}_{22} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\overset{1}{g}_{33}\right) = 0\,. \tag{13.7}$$

Après calcul de la connexion correspondant à la métrique (13.1) on trouve pour les équations (7.2)

$$\tilde{V}_1\,\overset{1}{g}_{AB} + \frac{1}{r}\,\overset{1}{g}_{AB} \equiv \partial_1\,\overset{1}{g}_{AB} - \frac{1}{r}\,\overset{1}{g}_{AB} = 0$$

d'où[17]

$$\overset{1}{g}_{AB} = r\gamma_{AB}(\theta, \varphi, u, \xi)\,. \tag{13.8}$$

Posons

$$\gamma_{22} = \alpha\,,\qquad \gamma_{23} = \beta$$

les équations (13.7) seront vérifiées si et seulement si

$$\gamma_{33} = -\,\alpha\sin^2\theta\,. \tag{13.9}$$

On trouve en calculant $\overset{0}{R}_{0i}$ et l'égalant à zéro

$$\begin{aligned}
\overset{0}{R}_{01} &\equiv \frac{1}{2}\,\overset{2}{g}{}''_{11} = 0\,,\\
\overset{0}{R}_{02} &\equiv \frac{1}{2}\,\overset{2}{g}{}''_{12} - \frac{1}{2r}\left(\partial_2\alpha' + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\partial_3\beta' + 2\,\alpha'\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = 0\,,\\
\overset{0}{R}_{03} &\equiv \frac{1}{2}\,\overset{2}{g}{}''_{13} + \frac{1}{2r}\left(-\,\partial_2\beta' + \partial_3\alpha' - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\beta'\right) = 0
\end{aligned} \tag{13.10}$$

α et β étant choisis arbitrairement, bornés ainsi que leurs primitives par rapport à ξ, $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, les équations (13.10) déterminent $\overset{2}{g}{}''_{1i}$

$$\begin{aligned}
\overset{2}{g}_{11} &= 0\,,\\
\overset{2}{g}_{12} &= \frac{1}{r}\left(\partial_2\hat{\alpha} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\partial_3\hat{\beta} + 2\hat{\alpha}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right),\\
\overset{2}{g}_{13} &= \frac{1}{r}\left(\partial_2\hat{\beta} - \partial_3\hat{\alpha} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\hat{\beta}\right).
\end{aligned} \tag{13.11}$$

Puis, pour $\overset{0}{R}_{00}$:

$$\overset{0}{R}_{00} \equiv -\frac{1}{2}\,\overset{0}{g}{}^{ij}\,\overset{2}{g}{}''_{ij} - \frac{1}{2\pi^2}\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\sin^2\theta}\right)'' - \frac{1}{2\pi^2}\left(\alpha'^2 + \frac{\beta'^2}{\sin^2\theta}\right) - \frac{2}{r^2}\,\frac{dm}{du} = 0\,. \tag{13.12}$$

[17] La forme (13.8), (13.9) que nous trouvons pour la perturbation $\overset{1}{g}$ coïncides avec celle obtenue par Isaacson en appliquant la méthode W.K.B. aux équations linéarisées, mais le fait que nous avons, ici, appliqué cette méthode aux équations elles-mêmes imposent aux $\overset{1}{\gamma}_{AB}$ d'autres restrictions que nous allons voir par la suite.

On pourra trouver des $\overset{2}{g}_{ij}$ bornés vérifiant (13.12) s'il existe une fonction $f(u, \theta, \varphi\ \xi)$ bornée telle que

$$f'' = \left(\alpha'^2 + \frac{\beta'^2}{\sin^2\theta} + \frac{dm}{du}\right). \tag{13.13}$$

Des examples de solutions donnant des $\overset{2}{g}_{ij}$ bornés [compte tenu de (13.11)] sont:

1°) $\alpha = g(u) \cos\xi \sin\theta\,, \quad \beta = g(u) \sin\xi \sin\theta \cos\theta$

avec

$$(g(u))^2 = -\frac{dm}{du}\,.$$

Alors

$$\overset{2}{g}_{12} = \frac{3}{r}\, g(u) \sin\xi \cos\theta\,,$$

$$\overset{2}{g}_{13} = -\frac{1}{2r}\, g(u) \cos\xi\, (3\cos 2\theta + 1)$$

et on peut prendre

$$\overset{2}{g}_{AB} = 0\,, \quad A, B = 2, 3\,.$$

2°) Un autre exemple de solution est

$$\beta = g(u) \sin\theta\, h(\xi)\,, \quad \alpha = 0$$

$h(\xi)$ fonction oscillatoire bornée ainsi que sa primitive $\hat{h}(\xi)$ et ses dérivées, et

$$(g(u))^2 = -\frac{1}{\lambda}\frac{dm}{du}\,, \quad \lambda \text{ nombre réel} > 0\,.$$

Alors

$$\overset{2}{g}_{12} = 0\,, \quad \overset{2}{g}_{13} = -\frac{2}{r}\, g(u)\, \omega\theta\, \hat{h}(\xi)$$

et on peut prendre $\overset{2}{g}_{AB} = 0$ à condition que h vérifie l'équation différentielle

$$(h^2(\xi))'' + (h'(\xi))^2 - 4\lambda = 0\,. \tag{13.14}$$

Les solutions 1°) et 2°) ne sont évidemment pas à symétrie sphérique, ni axiale. On montre aisément que l'on ne peut pas trouver des solutions de (13.10) et (13.12), satisfaisant aux conditions requises de finitude, possédant une telle symétrie, par les considérations suivantes:

a) On ne peut pas avoir $\beta = 0$; (13.13) entraînerait alors $\alpha = \alpha(u, \xi)$, ce qui est incompatible avec $\overset{2}{g}_{12}$ borné pour tout θ: une telle solution ne pourrait être valable que dans un secteur $0 < \varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$.

b) On ne peut pas avoir $\overset{2}{g}_{12} = 0$ et $\overset{2}{g}_{13} = 0$, car les équations (13.10) donneraient alors l'existence d'une fonction $\gamma(u, \theta, \varphi, \xi)$ telle que

$$\alpha \sin^2\theta = \partial_3\gamma\,, \quad \beta = -\partial_2\gamma$$

γ satisfaisant à

$$\sin\theta\,\partial_2(\sin\theta\,\partial_2\gamma) + \partial_{33}\gamma = 0 \tag{13.15}$$

et on montre par exemple, en cherchant γ sous forme d'un développement en série de Fourier, que (13.15) n'a pas de solution périodique régulière en θ et φ.

Remarque importante. *Les perturbations* $\overset{1}{g}_{ij}$ *et* $\overset{2}{g}_{ij}$ *on un comportement à l'infini* ($r \to \infty$) *déterminé*:
on constate que, dans les coordonnées r, x^A

$$\overset{1}{g}_{1i} = 0\,, \qquad \overset{1}{g}_{AB} = 0(r) \tag{13.16}$$

$$\overset{2}{g}_{AB} = 0(1) \tag{13.17}$$

$$\overset{2}{g}_{11} = 0$$

$$\overset{2}{g}_{1A} = 0\left(\frac{1}{r}\right). \tag{13.18}$$

Pour la métrique de base on a, dans les coordonnées envisagées.

$$\overset{0}{g}{}^{AB} = 0\left(\frac{1}{r^2}\right), \qquad \overset{0}{g}_{AB} = 0(r^2)$$

$$\overset{0}{g}{}^{11} = 0(1)\,, \qquad \overset{0}{g}_{11} = 0\,.$$

On déduit donc des équations (13.16) et (13.17), (13.18) que les *perturbations* $\overset{1}{g}_{ij}$ *et* $\overset{2}{g}_{ij}$ *tendent vers zéro à l'infini*, $\overset{2}{g}_{ij}$ plus vite que $\overset{1}{g}_{ij}$, les invariants donnant la grandeur de ces perturbations étant respectivement

$$\overset{0}{g}{}^{ih}\overset{0}{g}{}^{jk}\overset{1}{g}_{ij}\overset{1}{g}_{hk} = 0\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$\overset{0}{g}{}^{ih}\overset{0}{g}{}^{jk}\overset{2}{g}_{ij}\overset{2}{g}_{hk} = 0\left(\frac{1}{r^4}\right).$$

14. Tenseur de Riemann

On montre aisément que le tenseur de Riemann de (2.2) est de la forme

$$R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \omega \overset{-1}{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu} + \overset{0}{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu} + \cdots$$

où le terme principal

$$\overset{-1}{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}$$

est de la forme obtenue par LICHNEROWICZ [7] dans l'étude des discontinuités des dérivées secondes des potentiels gravitationnels (et que l'on retrouve dans les chocs gravitationnels), et par TRAUTMAN dans ses premières études sur le comportement asymptotique. C'est un tenseur de type N[18]. La nature du terme suivant, dans un cadre un peu différent, a été étudiée par GOMES [8].

[18] Comme dans l'étude générale de SACHS [19] du développement en série de puissances de r^{-1}.

Bibliographie

1. Choquet-Bruhat, Y.: C.R. Acad Sc. **258**, 3809—3812 (1964) et **264**, 625 (1967).
2. Garding, L., T. Kotake et J. Leray: Bull. Soc. Math. **92**, 263 (1964).
3. Wheeler, J. A.: Geometrodynamics. New York: Academic Press 1962.
4. Brill, D. R., and J. B. Hartle: Phys. Rev. **135** B, 271 (1964).
5. Isaacson, R. A.: Thèse, University of Maryland 1967.
6. Cattaneo, C.: Annali di mat. pura ed. appl. **48**, 361 (1959).
7. Lichnerowicz, A.: Ann. di Mat. pura ed. appl. **50**, 1 (1960).
8. Gomes, A.: C.R. Acad. Sc. **262**, 412 (1966); **262**, 603 (1966) et thèse université de Coîmbra 1966.
9. Choquet-Bruhat, Y.: Annales Institut Poincaré série A 1968.
10. Trautman, A.: Bull. Acad. Polon. des Sc. **6**, 407 (1958).
11. Bondi, H., M. van der Bemg, and A. Metzner: Proc. Roy. Soc. A **263**, 21 (1962).
12. Sachs, R. K.: Proc. Roy. Soc. A **270**, 103 (1962).
13. Lax, P.: Duke Math. J. **24**, 627—646 (1957).
14. Ludwig, D.: Comm. on pure and ap. Maths. **99**, 263—361 (1964).

Y. Choquet-Bruhat
Institut Henri Poincaré
11 Rue Pierre-Curie, F 75 Paris 5^e