

## SUR LES STRUCTURES DE COURBURE D'ORDRE 2 DANS $R^n$

JACQUES GASQUI

Une structure de courbure d'ordre 2 dans  $R^n$  est un tenseur de type (0, 4) sur  $R^n$ , vérifiant les identités classiques auxquelles satisfait le tenseur de courbure d'une métrique riemannienne sur  $R^n$  (cf. identités (2) et (3)). Etant donné une structure  $\alpha$  de courbure d'ordre 2 sur  $R^n$ , nous nous proposons de résoudre le système d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} = \alpha_{ijkl},$$

où les  $g_{ij}$  sont les composantes d'une 2-forme symétrique sur  $R^n$ . Si  $g$  est une métrique riemannienne, son tenseur  $R$  de courbure de type (0, 4) s'écrit :

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} \right) + \sum_{p,q} g_{pq} (\Gamma_{jk}^p \Gamma_{il}^q - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jl}^q),$$

avec

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_h g^{hk} \left( \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right).$$

Ainsi le premier membre de (1) est, à  $\frac{1}{2}$  près, la partie principale de  $R$ . La condition de compatibilité de (1) est que  $\alpha$  vérifie la deuxième identité de Bianchi par rapport à la connexion plate canonique sur  $R^n$ . Nos calculs se ramènent facilement à ceux que nous avons fait dans [1] pour l'équation de Cartan pour les immersions isométriques. Si la condition de compatibilité est satisfaite, les résultats classiques sur les systèmes à coefficients constants permettent d'obtenir des solutions de (1) sur tout ouvert convexe de  $R^n$ .

Les notations et le formalisme sont ceux de [2] et [1]. Je tiens à remercier H. Goldschmidt qui a bien voulu relire mon manuscrit et me faire part de ses remarques.

Tous les objets avec lesquels on travaille seront supposés différentiables de classe  $C^\infty$ . On note respectivement  $x^1, \dots, x^n$  et  $T^*$  les coordonnées canoniques

et le fibré cotangent de  $R^n$ . Si  $\omega$  est un tenseur de type  $(0, p)$  sur  $R^n$  (i.e., est une section de  $\otimes^p T^*$  sur  $R^n$ ), on posera

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right) = \omega_{i_1, \dots, i_p},$$

pour tous entiers  $i_1, \dots, i_p$  compris entre 1 et  $n$ . Les tenseurs de type  $(0, p)$  symétriques ou alternés sur une partie de leurs arguments seront toujours repérés par leurs composantes par rapport à la base  $(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p})_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n}$  de  $C^\infty(\otimes^p T^*)$ .

Une structure de courbure d'ordre 2, ou double 2-forme, sur  $R^n$  est une section  $\alpha$  de  $\Lambda^2 T^* \otimes \Lambda^2 T^*$  sur  $R^n$  vérifiant

$$(2) \quad \alpha_{ijkl} = \alpha_{klij},$$

$$(3) \quad \alpha_{ijkl} + \alpha_{jkil} + \alpha_{kijl} = 0,$$

pour tous entiers  $i, j, k, l$ .

Si  $g$  est une 2-forme symétrique sur  $R^n$ , on vérifie facilement que le tenseur  $\omega(g)$  défini par

$$\omega(g)_{ijkl} = \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k}$$

est une structure de courbure d'ordre 2. En outre on a

$$(4) \quad \frac{\partial \omega(g)_{jklm}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega(g)_{kilm}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega(g)_{ijlm}}{\partial x^k} = 0.$$

Les identités (4) reviennent à dire que  $\omega(g)$  vérifie la deuxième identité de Bianchi par rapport à la connexion plate canonique sur  $R^n$  (cf. [3]).

On note  $G$  le sous-fibré de  $\Lambda^2 T^* \otimes \Lambda^2 T^*$  dont les sections sont les structures de courbure d'ordre 2 et  $H$  le sous-fibré de  $T^* \otimes G$  dont les sections  $\omega$  vérifient la deuxième identité de Bianchi :

$$\omega_{ijklm} + \omega_{jkilm} + \omega_{kijlm} = 0.$$

Soit  $J_2(S^2 T^*)$  le fibré des 2-jets de sections du fibré  $S^2 T^*$  et soit  $\varphi: J_2(S^2 T^*) \rightarrow G$  le morphisme de fibrés vectoriels sur  $R^n$  défini par

$$\varphi(j_2(g)(x)) = \omega(g)(x),$$

si  $g$  est une 2-forme symétrique définie sur un voisinage de  $x \in R^n$ . Si  $\sigma(\varphi)$  désigne le symbole de  $\varphi$  (cf. [2]), on a

$$\sigma(\varphi)(C)_{ijkl} = C_{iljk} + C_{jkil} - C_{ikjl} - C_{jljk},$$

pour tout  $C \in S^2T^* \otimes S^2T^*$ . Le noyau de  $\varphi$  est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur  $S^2T^*$  que l'on notera  $R_2$ .

Posons  $N = \frac{1}{2}n(n + 1)$  et fixons une 2-forme symétrique  $B$  sur  $R^n$  à valeurs dans  $R^N$  telle que les vecteurs

$$B_{ij}(x) = B\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)(x), \quad \text{avec } 1 \leq i \leq j \leq n,$$

soient linéairement indépendants en tout point  $x \in R^n$ . Si  $r$  est un entier, notons  $S^rT^* \otimes R^N$  le produit tensoriel du fibré  $S^rT^*$  par le fibré trivial sur  $R^n$  de fibre  $R^N$ , et  $\theta^{(r)}$  l'isomorphisme de fibrés vectoriels sur  $R^n$  de  $S^rT^* \otimes R^N$  sur  $S^rT^* \otimes S^2T^*$  défini par

$$\theta^{(r)}(C)_{i_1, \dots, i_r, jk} = \langle B_{jk}, C_{i_1, \dots, i_r} \rangle,$$

si  $C \in S^rT^* \otimes R^N$ , où  $\langle , \rangle$  désigne le produit scalaire canonique sur  $R^N$ .

Soit  $\rho: S^2T^* \otimes R^N \rightarrow G$  le morphisme de fibrés vectoriels sur  $R^n$  défini par

$$\rho(C)_{ijkl} = \langle B_{il}, C_{jk} \rangle + \langle B_{jk}, C_{il} \rangle - \langle B_{ik}, C_{jl} \rangle - \langle B_{jl}, C_{ik} \rangle,$$

si  $C \in S^2T^* \otimes R^N$ . On vérifie facilement que les diagrammes

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} S^2T^* \otimes R^N & \xrightarrow{\rho} & G \\ \theta^{(2)} \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ S^2T^* \otimes S^2T^* & \xrightarrow{\sigma(\varphi)} & G \end{array}$$

et

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} S^{r+1}T^* \otimes R^N & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes S^rT^* \otimes R^N \\ \theta^{(r+1)} \downarrow & & \downarrow \theta^{(r)} \\ S^{r+1}T^* \otimes S^2T^* & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes S^rT^* \otimes S^2T^* \end{array}$$

commutent, où  $\delta$  est le morphisme de Spencer (cf. [2]).

Reprenant alors les calculs du § 4 et des propositions 5.1 et 5.2 de [1], en remplaçant  $T_Y^\perp$  par  $R^N$  et  $\rho_{*p}$  par  $\rho$ , la condition de "rang maximum" imposée à  $B$  permet d'affirmer que  $\text{Ker}(\rho)$  est un sous-fibré involutif de  $S^2T^* \otimes R^N$ . D'après la commutativité de (5) et (6), le symbole de  $R_2$ , noyau de  $\sigma(\varphi)$ , est aussi involutif.

Si  $C \in S^3T^* \otimes S^2T^*$ , on a

$$\sigma(\varphi) \circ \delta(C)_{ijklm} = C_{ijmkl} + C_{ikljm} - C_{ijlkm} - C_{ikmj l}.$$

En sommant l'expression ci-dessus par permutation circulaire sur  $i, j, k$ , on

obtient zéro ; ainsi l'image de  $\sigma(\varphi) \circ \delta$  est contenue dans  $H$ . Toujours d'après la proposition 5.1 de [1], on a  $\text{Im}(\rho \circ \delta) = H$  : combinant ce dernier résultat avec la commutativité de (5) et (6), on en déduit que l'image de  $\sigma(\varphi) \circ \delta$  est égale à  $H$ .

Si  $R_3$  désigne le premier prolongement de l'équation  $R_2$ , on a, d'après [2], la suite exacte

$$R_3 \xrightarrow{\pi_2} R_2 \xrightarrow{K} (T^* \otimes G)/H ,$$

où  $K$  est le morphisme de fibrés vectoriels défini comme suit : si  $p = j_2(g)(x) \in R_2$ , avec  $g$  section de  $S^2T^*$  sur un voisinage de  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $K(p)$  est la classe de  $\beta$  dans  $(T_x^* \otimes G_x)/H_x$ , où  $\beta$  est l'élément de  $T_x^* \otimes G_x$  défini par

$$\beta_{ijklm} = \frac{\partial}{\partial x^i}(\omega(g)_{jklm})(x) .$$

Mais, d'après (4), on a  $K = 0$ , donc  $R_2$  est formellement intégrable. Des calculs précédents et du théorème 4.3 de [2], on déduit que la condition de compatibilité que doit vérifier le second membre  $\alpha$  du système (1) est la deuxième identité de Bianchi :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \alpha_{jklm} + \frac{\partial}{\partial x^j} \alpha_{kilm} + \frac{\partial}{\partial x^k} \alpha_{ijlm} = 0 .$$

On a alors le

**Théorème.** *Soit  $\alpha$  une structure de courbure d'ordre 2 sur  $\mathbf{R}^n$  vérifiant la deuxième identité de Bianchi par rapport à la connexion plate canonique sur  $\mathbf{R}^n$ . Si  $U$  est un ouvert convexe (resp. ouvert convexe borné) de  $\mathbf{R}^n$ , il existe une 2-forme symétrique (resp. métrique riemannienne)  $g$  sur  $U$  telle que*

$$\omega(g) = \alpha .$$

*Démonstration.* L'existence de solutions sur un ouvert convexe est un résultat classique sur les systèmes à coefficients constants (cf. [4]). L'existence de solutions métriques riemanniennes sur un ouvert convexe borné  $U$  s'en déduit alors facilement : si  $g$  est une 2-forme symétrique sur  $U$  vérifiant  $\omega(g) = \alpha$ , la forme  $\tilde{g}$  définie sur  $U$  par

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \lambda \delta_{ij} ,$$

avec  $\lambda \in \mathbf{R}^+$  assez grand, est une métrique riemannienne sur  $U$  qui vérifie encore  $\omega(\tilde{g}) = \alpha$ .

**References**

- [ 1 ] J. Gasqui, *Sur l'existence d'immersions isométriques locales pour les variétés riemanniennes*, J. Differential Geometry **10** (1975) 61–84.
- [ 2 ] H. Goldschmidt, *Existence theorems for analytic linear partial differential equations*, Ann. of Math. **86** (1967) 246–270.
- [ 3 ] R. S. Kulkarni, *On the Bianchi identities*, Math. Ann. **199** (1972) 175–204.
- [ 4 ] B. Malgrange, *Systèmes différentiels à coefficients constants*, Séminaire Bourbaki, 15ième année, 1962–63, Exp. 246.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

