J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
9 (1974) 141-168

TOPOLOGIE FAIBLE SUR DES VARIÉTÉS DE BANACH. APPLICATION AUX GÉODÉSIQUES DES VARIÉTÉS DE SOBOLEV

JEAN-PAUL PENOT

L'idée de munir d'une topologie faible certaines variétés de Banach, les variétés fonctionnelles notamment, n'est pas nouvelle. L'importance de cette topologie pour l'analyse non-linéaire (cf. J. L. Lions [12]) plaide en ce sens. C'est à R. S. Palais que l'on doit d'avoir mis en lumière dans son intervention au Congrès de Nice [16] la clarification qu'apporterait l'introduction d'une topologie faible dans les variétés fonctionnelles. Ainsi les ensembles intrinséquement bornés de K. Uhlenbeck [20] sont les parties relativement compactes de la variété de Sobolev $W_p^k(\pi)$ pour la topologie faible introduite dans cet article et on a l'analogue du théorème classique: les sous-ensembles bornés de $W_p^k(\pi)$ pour sa métrique canonique sont les parties relativement compactes pour la topologie faible. Bien entendu la topologie faible coïncide avec la topologie forte dans toute variété de dimension finie.

Il est facile de voir qu'on ne peut espérer transporter la topologie faible usuelle des modèles au moyen des cartes canoniques de la variété $W_p^k(\pi)$ (ou plus généralement d'une variété fonctionnelle $\mathscr{F}(\pi)$ où $\pi: P \to M$ est une submersion de base compacte). En effet l'image d'une telle carte est l'ensemble $\mathscr{F}(M, U)$ des sections de classe $\mathscr{F}$ d'un fibré vectoriel $\xi: V \to M$ à valeurs dans un ouvert U de V et cet ensemble n'est pas ouvert dans l'espace de Banach $\mathscr{F}(M, V)$ pour sa topologie faible. En effet, si $U_m = \xi^{-1}(m) \cap U$ est borné dans $V_m = \xi^{-1}(m)$ pour tout $m \in M$ l'ensemble $\mathscr{F}(M, U)$ ne peut contenir une droite affine. De plus les changements de cartes qui sont de la forme $s \to g \circ s$ où $g: U \to V'$ est une application fibrée de U dans un autre fibré vectoriel $\xi' = (V', \xi', M)$ ne sont pas continus pour les topologies faibles sur $\mathscr{F}(M, V)$ et $\mathscr{F}(M, V')$, pour une raison analogue.

La topologie faible σ d'un espace de Banach doit donc être renforcée pour remédier à ces inconvénients. Plusieurs solutions sont possibles (§ 1); celle qui est adoptée ici est le choix de la topologie séquentielle σ_s associée à σ. Un autre choix (la topologie σ_b du § 1) est adopté par R. Graff [8]. L'observation que les changements de cartes de $W_p^k(\pi)$ sont continus pour σ_s et σ_b a été communiquée par J. Dowling et K. Uhlenbeck à R. Palais. U. Koschorke s'est intéressé à des questions voisines [11].

Communicated by A. Lichnerowicz, October 7, 1972.

Nous reprenons (§ 4) l'étude (incomplète, mais correcte) des géodésiques minimisantes des variétés de Sobolev faite par J. Dowling [1] après avoir adapté (§ 3) la méthode directe du calcul des variations à la situation. Enfin nous vérifions (§ 5) la condition (C) à l'aide de la topologie faible et d'une notion de structure de Finsler admissible (qui manque dans la note de H. Eliasson [6]). L'étude des géodésiques minimisantes illustre encore une fois la place à part qu' occupent les variétés fonctionnelles parmi les variétés de Banach (l'existence des géodésiques minimisantes étant en défaut dans des variétés hilbertiennes comme des tores ou des ellipsoïdes, cf. J. Dowling [1], N. Grossman [9], J. McAlpin [13]).

Je remercie R. S. Palais pour le rôle qu'il a joué dans l'éclosion des idées contenues dans cet article. Je tiens aussi à souligner ma dette envers H. Eliasson: le paragraphe 4 de cet article n'aurait pas vu le jour si je n'avais pas eu connaissance de [5]. Cette note contient la plupart des techniques de ce paragraphe, à l'exception toutefois du lemme (crucial) 11 et de la généralisation (facile mais lourde) à l'ordre supérieur. La connaissance de cette note ou de la présentation simplifiée du présent article, (*Weak topology on functional manifolds,* Proceedings of the Summer College on Global Analysis and its Applications, Trieste, 1972, à paraître) facilitera la lecture de ce paragraphe, mais n'est pas requise.

1. Renforcement de la topologie faible d'un espace de Banach

Etant donné un espace de Banach E, désignons par τ sa topologie et par σ sa topologie faible. Introduisons les topologies σ_b (resp. σ_k) finales pour les injections $i_B : B \to E$ (resp. $i_K : K \to E$) où B(resp. K) parcourt la famille des parties bornées (resp. faiblement compactes) de E et est muni de la topologie induite par σ. Soit σ_s la topologie dont les parties fermées sont les parties séquentiellement fermées de (E, σ) (A est séquentiellement fermé pour σ si A contient les limites des suites de A convergentes pour σ).

Lemme 1. a) $\sigma \subset \sigma_b \subset \sigma_s \subset \tau$.
b) $\sigma_k = \sigma_s$.

La preuve de a) est immédiate. Pour établir l'inclusion non triviale de b) il suffit de remarquer que si A est une partie séquentiellement fermée de (E, σ) et si K est une partie compacte de (E, σ), $A \cap K$ est séquentiellement fermé et relativement compact pour σ, donc fermé pour σ.

Remarque 1. Les inclusions du lemme 1 (a) sont strictes en général. Pour E réflexif de dimension infinie on a $\sigma \neq \sigma_b$, $\sigma_s \neq \tau$. En effet une base de voisinages de 0 pour σ_b est formée des ensembles A^0 polaires d'une partie A du dual E^* de E constituée de l'ensemble des termes d'une suite qui converge vers 0 dans E^* fort (Dunford-Schwartz [2, p. 427]). Comme il est impossible de trouver une partie finie F de E^* telle que F^0 soit contenue dans A^0 si A est formé de vecteurs linéairement indépendants on a bien $\sigma \neq \sigma_b$. L'inclusion

$\sigma_s \subset \tau$ est stricte car la boule unité fermée de E est compacte pour σ_s mais non compacte pour τ. Pour $E = l_1$ on a $\sigma_s = \tau$ comme il est bien connu et $\tau \neq \sigma_b$. En effet soient B (resp. D) la boule unité ouverte (resp. fermée) de $E, S = D - B$. Si B était ouverte pour σ_b il existerait $A \in \sigma$ tel que $B = B \cap D = A \cap D$. Mais comme $E - D$ est ouvert pour σ et comme $E - S = A \cup (E - D)$, S serait fermé pour σ ce qui est contraire au fait que 0 est un point adhérent à S pour σ. Ainsi $\sigma_b \neq \tau = \sigma_s$.

Les candidatures de σ_b et σ_s pour renforcer la topologie σ sont également recevables, bien que ces topologies ne soient peut être pas compatibles avec la structure vectorielle de E. Le choix de σ_s nous semble plus approprié parce que σ_s est plus fine et plus naturelle pour la méthode directe du calcul des variations (son usage est implicite dans Vainberg [21] par exemple). De plus:

a) σ et σ_s ont mêmes suites convergentes (Kisynski [10]) et mêmes compacts (il en est donc de même pour σ et σ_b).

b) σ_s est compatible avec la structure vectorielle de E en ce sens que E est un L-espace (J. P. Penot [18]) pour la convergence associée à σ_s; on dispose d'une théorie élémentaire du calcul différentiel dans ce cadre (J. P. Penot [18]).

c) Si (Z, ω) est un espace topologique, une application continue $f: (Z, \omega) \to (E, \sigma_s)$ est propre si et seulement si l'image réciproque par f de tout sous-ensemble compact de (E, σ_s) est compacte (R. S. Palais [15]).

d) Les topologies σ_s et σ_b sont utiles pour formuler des notions de complète continuité d'une application.

Le lemme suivant montre que dans la pratique σ_s et σ_b coïncident très souvent.

Lemme 2. *Pour que $\sigma_s = \sigma_b$ il suffit que l'une des hypothèses suivantes soit vérifiée*:

a) *Le dual de E est séparable* (*ce qui est le cas si E est séparable et reflexif*),

b) *E est réflexif.*

Preuve. Soit F un fermé de σ_s, soit B une boule fermée de E; prouvons que $B \cap F$ est fermé pour σ. Si le dual de E est séparable, B est métrisable pour la topologie induite par σ (Dunford-Schwartz [2, p. 426]) de sorte que $B \cap F$ qui est séquentiellement fermé est fermé pour σ. Si E est réflexif $B \cap F$ est relativement compact et séquentiellement fermé pour σ donc fermé pour σ (Edwards [3, p. 549]). q.e.d.

Il serait intéressant de savoir dans quels cas σ_s ou σ_b est compatible avec la structure vectorielle de E. Nous nous contenterons du résultat suivant (Dunford-Schwartz [2, p. 428]).

Lemme 3. *Si E est réflexif $\sigma_s = \sigma_b$ fait de E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé.*

2. Bivariétés

Définition 1. Un espace C^r-bicartographié est un couple $(X, \mathscr{A})$ formé d'un ensemble X et d'un atlas $\mathscr{A} = \{\phi_i = (U_i, \phi_i, E_i), i \in I\}$ où E_i est un espace de Banach, ϕ_i une bijection d'un sous-ensemble U_i de X sur un ouvert de (E_i, σ_s), tel que pour tout $(i, j) \in I \times I$, $\phi_i(U_i \cap U_j)$ soit ouvert dans (E_i, σ_s) et que $\phi_j \circ \phi_i^{-1}: \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ soit continue pour σ_s et de classe C^r pour τ. Nous dirons que $\mathscr{A}$ est un bi-atlas.

L'ensemble X reçoit deux topologies notées σ_s et τ pour lesquelles les U_i sont ouverts et les ϕ_i des homéomorphismes. Si $\phi = (U, \phi, E)$ est un homéomorphisme d'un ouvert U de (X, σ_s) sur un ouvert pour σ_s d'un espace de Banach E nous disons que ϕ est une carte C^r-compatible avec $\mathscr{A}$ si pour tout $i \in I$, $\phi \circ \phi_i^{-1}$ et $\phi_i \circ \phi^{-1}$ sont de classe C^r.

Définition 2. Une C^r-bivariété est une classe d'équivalence d'espaces C^r-bicartographiés pour la relation d'équivalence: $(X, \mathscr{A}) \sim (Y, \mathscr{B})$ si $X = Y$, et si toute carte de $\mathscr{A}$ (resp. de $\mathscr{B}$) est C^r-compatible avec l'atlas $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{A}$).

Il est équivalent de dire qu'une C^r-bivariété est un C^r-espace bicartographié $(X, \mathscr{A})$ où $\mathscr{A}$ est un C^r-biatlas maximum (i.e., contenant toutes les cartes qui lui sont C^r-compatibles). On a une notion naturelle de C^r-morphisme d'espaces bicartographiés ou de C^r-bivariétés que nous n'expliciterons pas. Dans la suite nous confondrons souvent un espace bicartographié avec la bivariété associée.

Remarque. Dans la définition 1 on pourrait demander que les $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ soient de classe C^t pour une notion appropriée. Le cas $t = 1$ peut être traité à l'aide de la classe C_L^1 introduite dans J. P. Penot [18]; il permet de parler de la C^{r-1}-bivariété tangente à une C^r-bivariété de classe C_L^1 pour la topologie σ_s, de champ de vecteurs continu pour σ_s etc.$\cdots$. Dans cette direction on a le résultat suivant.

Proposition 1 (*S. Gautier et J. P. Penot* [7]). *Si X est une C^r-bivariété $(r \geq 1)$ de classe C_L^1 pour σ_s dont les modèles sont réflexifs et si v est un champ de vecteurs continu pour σ_s sur X, par tout point x de X passe une courbe intégrale de v.*

Exemples. 1) Toute variété de dimension finie est une bivariété. Tout ouvert pour σ_s d'un espace de Banach est une bivariété. Une sphère d'un espace de Hilbert est un espace C^∞-bicartographié par les cartes obtenues par projection radiale sur les hyperplans tangents.

2) Nous dirons qu'un couple de variétés paracompactes (X, X') est un C^r-*chaînon* si X est contenue dans X' et s'il existe un C^r-atlas

$$\mathscr{A}' = \{\phi_i' = (U_i', \phi_i', E_i'), i \in I\} \qquad \text{de } X'$$

qui induit un atlas de X: pour tout $i \in I$ il existe un espace de Banach E_i continument injecté dans E_i' tel que $\phi_i = (U_i, \phi_i, E_i)$ obtenue par restriction de ϕ_i', avec $U_i = U_i' \cap X$, soit une C^r-carte de X. H. I. Eliasson [5], [6] à qui l'on doit cette notion dit "X is a weak submanifold of X'". Un C^r-chaînon

(X, X') sera dit de Rellich si les injections $E_i \to E'_i$ des modèles sont compactes, si les changements de cartes $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ sont bornants (i.e., transforment un borné de E_i en un borné de E_j) et si les modèles E_i sont réflexifs.

Dans ce cas les changements de cartes sont continus pour les topologies σ_s. En effet, si $\psi: \Omega_{ij} \to E_j$ est un tel changement de cartes, où $\Omega_{ij} = \phi_i(U_i \cap U_j)$ est ouvert dans (E_i, σ_s) et si (x_n) est une suite de Ω_{ij} qui converge vers $x \in \Omega_{ij}$ pour σ_s, la suite $(\psi(x_n))$ est bornée dans E_j et converge vers $\psi(x)$ pour la topologie induite par E'_j sur E_j donc converge vers $\psi(x)$ dans (E_j, σ_s).

Proposition 2. *Si (X, X') est un C^r-chaînon de Rellich X est une C^r-bivariété. De plus la topologie faible sur X est plus fine que la topologie induite par X'.*

Plus exactement X devient un espace C^r-bicartographié par l'atlas $\mathscr{A}$ restriction à X de l'atlas $\mathscr{A}'$ du chaînon. Notons qu'une C^r-bivariété X peut être ainsi obtenue à partir de C^r-chaînons différents; souvent X' peut être pris dans une chaîne (X_n) de variétés. La notion de bivariété est donc plus intrinsèque que celle de chaînon.

Définition 3. Un tube pour un C^r-chaînon (X, X') est la donnée de C^r-fibrés vectoriels $\xi: E \to X$, $\xi': E' \to X'$, d'un morphisme injectif considéré comme une inclusion de ξ dans ξ' au-dessus de l'injection $X \to X'$ et d'un C^r-difféomorphisme $\theta' = (\xi', \varepsilon'): O' \to U'$ d'unv oisinage ouvert O' de la section nulle dans E' sur un voisinage ouvert U' de la diagonale dans $X' \times X'$ qui induit un C^r-difféomorphisme $\theta: O = O' \cap E \to U = U' \cap (X \times X)$.

En particulier si $X = X'$ on obtient la définition d'un tube sur une C^r-variété X (cf. J. P. Penot [17] pour cette notion et la notion voisine de tube fibré sur une submersion $\pi: P \to B$: difféomorphisme θ d'un voisinage ouvert de la section nulle d'un fibré vectoriel $\xi: E \to P$ sur un voisinage ouvert de la diagonale dans $P \times_B P$, de la forme $\theta = (\xi, \varepsilon)$).

Proposition 3. *Si $\pi: P \to B$ est une C^r-submersion surjective de base compacte munie d'un C^r-tube et si $\mathscr{F}$ est un foncteur fonctionnel de classe C^k* [14], [17] *le couple $(\mathscr{F}(\pi), C^0(\pi))$ est un C^{r-k}-chaînon muni d'un C^{r-k}-tube, $\mathscr{F}(\pi)$ désignant l'ensemble des sections de π de classe $\mathscr{F}$, noté aussi $\mathscr{F}(B, P)$ ou $\mathscr{F}(P)(r \geq k)$. En particulier, $(W_p^k(\pi), C^0(\pi))$ est un C^{r-k}-chaînon de Rellich pour $kp > \dim B$.*

Proposition 4. *Si (M, M') est un C^r-chaînon muni d'un C^r-tube, si S est une variété compacte et si $\mathscr{F}$ est un foncteur fonctionnel de classe C^k le couple $(\mathscr{F}(S, M), \mathscr{F}(S, M'))$ est un C^{r-k}-chaînon muni d'un C^{r-k}-tube.*

Ces deux résultats peuvent être combinés. Ainsi $(W_p^k(S, W_q^l(\pi)), C^0(S, C^0(\pi))$ est un chaînon pour $p > \dim S$, $ql > \dim B$ et $W_p^k(S, W_q^l(\pi))$ est une bivariété.

Nous dirons qu'une bivariété X est régulière si la topologie faible σ_s est régulière. Nous voyons facilement que cela implique la propriété:

(R) Il existe un bi-atlas $\mathscr{A}$ de X tel que toute carte $\phi = (U, \phi, E)$ de $\mathscr{A}$ se prolonge en un homéomorphisme $\bar{\phi}$ de l'adhérence $\bar{U}$ de U dans (X, σ_s) sur l'adhérence de $\phi(U)$ dans (E, σ_s).

Cette propriété est vérifiée si X est la bivariété déduite d'un chaînon de Rellich (X, X') où X' est une variété régulière. Si de plus X' est paracompacte nous avons la propriété:

(R') Il existe un bi-atlas $(\phi_i)_{i \in I}$ de $X, \phi_i = (U_i, \phi_i, E_i)$ tel que $(U_i)_{i \in I}$ soit un recouvrement localement fini de (X, σ_s), une partition $(I_n)_{n \geq 0}$ de I avec $U_i \cap U_j = \emptyset$ pour $i, j \in I_n, i \neq j$, et un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ de (X, σ_s) tel que l'adhérence $\bar{V}_i$ de V_i pour σ_s soit contenue dans U_i et appliquée par ϕ_i sur l'adhérence de $\phi_i(V_i)$ dans (E_i, σ_s).

Enonçons un analogue du théorème de Eberlein-Smulian.

Théorème 1. 1) *Soit A un sous-ensemble d'une bivariété régulière X. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*:

a) *Toute suite de points de A admet une valeur d'adhérence dans (X, σ_s).*

b) *Toute suite de points de A possède une sous-suite convergente dans (X, σ_s).*

2) *Dans ce cas l'adhérence de A coïncide avec sa fermeture séquentielle.*

3) *Si de plus X satisfait (R') et si A est fermé pour σ_s les assertions* a) *et* b) *équivalent à la compacité de A.*

4) *Si X est la bivariété associée à un chaînon de Rellich (X, X') avec X' paracompacte, les assertions* a) *et* b) *équivalent encore à l'assertion*:

c) *A est relativement compact pour σ_s.*

Preuve. Pour prouver 1) il suffit de montrer que a) implique b). Soit x une valeur d'adhérence d'une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de A. Soit $\phi = (U, \phi, E)$ une carte d'un bi-atlas $\mathscr{A}$ de X vérifiant (R) avec $x \in U$. Soit $(a'_n)_{n \geq 0}$ la sous-suite de $(a_n)_{n \geq 0}$ formée des termes appartenant à U et soit $A' = \{a'_n, n \geq 0\}$. Comme toute suite de $\phi(A')$ admet une valeur d'adhérence dans $\bar{\phi}(\bar{U}) = \overline{\phi(U)}$ pour σ_s donc pour σ, le théorème de Smulian (R. E. Edwards [3, th. 8.12.1, p. 549]) assure que $(\phi(a'_n))_{n \geq 0}$ admet une sous-suite convergente dans $\bar{U}$.

2) Soit x un point adhérent à A dans (X, σ_s). En prenant une carte $\phi = (U, \phi, E)$ comme dans 1) nous voyons que $\phi(x)$ est adhérent à $\phi(U \cap A)$ pour σ_s donc pour σ. Comme $\phi(U \cap A)$ est tel que toute suite de ses points admette une sous-suite convergente nous pouvons trouver une suite de $\phi(U \cap A)$ qui converge vers $\phi(x)$ (R. E. Edwards [3, th. 8.12.4, p. 549]), d'où le fait que x appartient à la fermeture séquentielle de A.

3) Soit $(\phi_i)_{i \in I}$ un atlas vérifiant (R') et soit A un sous-ensemble de X fermé pour σ_s et vérifiant a) c'est-à-dire un sous-ensemble fermé et dénombrablement compact pour σ_s. Soit $F_n = \bigcup_{i \in I_n} \bar{V}_i$; c'est un fermé pour σ_s comme réunion d'une famille localement finie de fermés. Montrons qu'il existe un sous-ensemble fini I'_n de I_n tel que $A \cap \bar{V}_i = \emptyset$ pour $i \in I_n - I'_n$. Dans le cas contraire nous pourrions trouver une suite d'indices distincts $i_k \in I_n$, $k \geq 1$, et une suite $a_k \in A \cap \bar{V}_{i_k}$. Cette suite (a_k) admettrait une valeur d'adhérence $x \in F_n$; nous pourrions donc trouver un indice $i_0 \in I_n$ avec $x \in \bar{V}_{i_0} \subset U_{i_0}$. Comme $U_{i_0} \cap \bar{V}_{i_k} = \emptyset$ pour tout $k \geq 1$ nous aurions une contradiction avec le fait que x est valeur d'adhérence de $(a_k)_{k \geq 1}$. Pour tout $i \in I$ nous voyons par

transport à l'aide de ϕ_i que $A \cap \bar{V}_i$ est compact pour σ_s. Ainsi $A \cap F_n$ est compact pour tout $n \geq 0$. Si $(O_j)_{j \in J}$ est un recouvrement ouvert de A dans (X, σ_s) nous pouvons trouver pour tout $n \geq 0$ un sous-ensemble fini J_n de J tel que $(O_j)_{j \in J_n}$ recouvre $A \cap F_n$. Comme A est dénombrablement compact nous pouvons trouver un recouvrement fini de A extrait du recouvrement $(O_j)_{j \in J'}$ pour $J' = \bigcup_{n \geq 0} J_n$ et A est bien compact.

4) Si X est associé à un chaînon de Rellich (X, X') avec X' paracompacte et si $A \subset X$ vérifie b) nous voyons que A est relativement compact dans X' car X' est métrisable. Nous pouvons donc recouvrir A par un nombre fini de domaines U'_i de cartes $\phi'_i = (U'_i, \phi'_i, E'_i)$ telles que ϕ'_i se prolonge en un homéomorphisme $\bar{\phi}'_i$ de l'adhérence $\bar{U}'_i$ de U'_i dans X' sur l'adhérence de $\phi'_i(U'_i)$ dans E'_i. Soient $U_i = U'_i \cap X, \bar{U}_i$ l'adhérence de U_i dans (X, σ_s): $\bar{U}_i \subset \bar{U}'_i \cap X$, $\bar{\phi}_i = \bar{\phi}'_i | \bar{U}_i$. Nous voyons que $\bar{\phi}_i(\bar{U}_i \cap A)$ est relativement compact dans (E_i, σ) donc dans (E_i, σ_s) puisque σ_s est plus fine que σ et que $\sigma_s = \sigma_k$. Ainsi A est réunion finie d'ensembles relativement compacts $A \cap \bar{U}_i$ donc est relativement compact dans (X, σ_s).

Remarque. Une même variété de Banach X peut être munie de plusieurs structures de bivariétés compatibles avec sa structure de variété, comme le montre l'exemple suivant. Soit H un espace de Hilbert séparable, $X = H - \{0\}$, $\beta: X \to H$ un C^∞-difféomorphisme tel que $\beta(x) = x$ pour tout $x \notin D$ avec $D = \{x \in H, |x| \leq 1\}$. La difféomorphisme β n'est pas un isomorphisme de la bivariété (X, σ_s) sur (H, σ_s) car D est compact dans (H, σ_s) mais $\beta^{-1}(D) = D - \{0\}$ n'est pas compact dans (X, σ_s).

3. Application à la méthode directe du calcul des variations

Dans ce paragraphe nous donnons des conditions pour appliquer le critère classique de Weierstrass:

Critère. Soient X une bivariété, $f: X \to \boldsymbol{R}$ une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i.) et pseudo-propre pour la topologie faible. Si f est minorée, f atteint sa borne inférieure.

Nous disons que f est *pseudo-propre* si toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de X telle que $(f(x_n))$ soit bornée admet une valeur d'adhérence. Si X est la bivariété associée à un chaînon de Rellich (X, X') avec X' paracompacte il revient au même d'après le théorème 2.1 de dire que pour tout ensemble relativement compact A de $\boldsymbol{R}$, $f^{-1}(A)$ est relativement compact pour σ_s.

Proposition 1. *Soit X la bivariété associée à un chaînon compact (X, X'), X' étant régulière. Les assertions* 1) *et* 2) *ci-dessous sont équivalentes*:

1) *$f: X \to \boldsymbol{R}$ est pseudo-propre pour σ_s.*

2) a) *$f: X \to \boldsymbol{R}$ est pseudo-propre pour la topologie induite par X'*;

b) *il existe un bi-atlas $\mathscr{A}$ de (X, X') tel que pour tout $\phi \in \mathscr{A}$, $\phi = (U, \phi, E)$, tout sous-ensemble A de $\phi(U)$ sur lequel $f \circ \phi^{-1}$ est bornée est borné dans E.*

Preuve. Il est clair que 1) implique 2) a) et 2) b): nous pouvons trouver en effet un atlas $\mathscr{A}$ de (X, X') satisfaisant (R), X' étant régulière et si $\phi = (U, \phi, E)$ appartient à $\mathscr{A}$, si $A \subset \phi(U)$ est tel que $f \circ \phi^{-1}(A)$ soit borné, l'adhérence $\overline{\phi^{-1}(A)} = \bar{\phi}^{-1}(\bar{A})$ de $\phi^{-1}(A)$ pour σ_s est compacte donc $\bar{A}$ est compact dans (E, σ_s) donc borné. Inversement supposons que f vérifie 2). Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de X telle que $(f(x_n))_{n\geq 0}$ soit bornée il existe une sous-suite (x'_n) de (x_n) qui converge vers un point x' dans X'. Si $\phi = (U, \phi, E)$ est une carte vérifiant 2) b), U étant la trace sur X d'un ouvert U' de X' nous pouvons supposer que (x'_n) est contenue dans U. La suite $(\phi(x'_n))$ est alors bornée dans E donc la topologie induite par E' sur l'ensemble des points de cette suite coïncide avec la topologie induite par σ_s de sorte que sa limite appartient à E. Ainsi $x' \in X$ et x' est la limite de (x'_n) pour σ_s.

Donnons quelques critères permettant d'établir la condition 2) b) dans le cas où f est de classe C^i $(i = 0, 1, 2)$:

b_i) il existe un bi-atlas de (X, X') tel que pour tout $\phi = (U, \phi, E)$ dans $\mathscr{A}$ $\phi(U)$ soit la trace sur E d'une boule de E' modèle de X' centrée en 0 et qu'il existe des constantes positives $\beta_0, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, des fonctions $\alpha_0, \alpha_1 : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ vérifiant $\lim_{t\to+\infty} \alpha_0(t) = +\infty$, $\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\alpha_1(t) = +\infty$ telles que pour tout $y \in \phi(U)$ on ait

b_0) $\bar{f}(y) \geq \alpha_0(\|y\|) - \beta_0$,

b_1) $(D\bar{f}(y) - D\bar{f}(0))\cdot y \geq \alpha_1(\|y\|) - \beta_1$,

b_2) $D^2\bar{f}(y)\cdot y\cdot y \geq \alpha_2\|y\|^2 - \beta_2\|y\|'^2$

pour $\bar{f} = f \circ \phi^{-1}$, $\|y\|$ (resp. $\|y\|'$) désignant la norme de y dans E (resp. dans E').

Seule la preuve que b_1) assure 2) b) n'est pas évidente, b_2) impliquant b_1) d'après le théorème des accroissements finis pour $\alpha_1(t) = \alpha_2 t^2$, $\beta_1 = \sup(\beta_2\|y\|'$, $y \in \phi(U))$. Soit A un sous-ensemble de $\phi(U)$ avec $\bar{f}(a) \leq m$ pour tout $a \in A$. Posons $\gamma = \|D\bar{f}(0)\|$ et choisissons $\delta > 0$ tel que $\|D\bar{f}(y) - D\bar{f}(0)\| < \gamma$ pour $\|y\| < \delta$. Nous pouvons trouver $\rho > 0$ tel que $\alpha_1(t) > 4\gamma t$ pour $t > \rho$. Si $y \in A$ vérifie $\|y\| > \max(2\delta, 2\rho)$ nous avons pour $\varepsilon = \delta/\|y\|$:

$$\begin{aligned}
\bar{f}(y) &= \bar{f}(0) + \int_0^1 D\bar{f}(ty)\cdot y\,dt \\
&= \bar{f}(0) + D\bar{f}(0)\cdot y + \int_0^\varepsilon (D\bar{f}(ty) - D\bar{f}(0))\cdot y\,dt \\
&\quad + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t}(D\bar{f}(ty) - D\bar{f}(0))\cdot ty\,dt \\
&\geq \bar{f}(0) - \gamma\|y\| - \varepsilon\gamma\|y\| + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t}\alpha_1(t\|y\|)\,dt + \beta_1 \operatorname{Log}\left(\frac{\delta}{\|y\|}\right)
\end{aligned}$$

soit $m - \bar{f}(0) + \gamma\delta - \beta_1 \operatorname{Log}\delta \geq \gamma\|y\| - \beta_1 \operatorname{Log}\|y\|$ ce qui montre que $\|y\|$ est borné si $y \in A$.

Exemple. Soit $\pi : P \to B$ une submersion surjective de base compacte et soit $L \in Df_k(P, \boldsymbol{R})$ un lagrangien d'ordre k, polynomial de poids pk ($p \in N$, $p \geq 2$), $pk > \dim B$ (Palais [14, §§ 16 et 19]). Supposons que L soit à partie principale définie positive ce qui signifie que si l'on munit π, τ_B, $\tau'_P = \tau_P|\mathrm{Ker}\, T\pi$ de connexions et si L s'écrit

$$L(x) = \sum_{\alpha} x^* A_\alpha(\nabla^{\alpha_1}x, \cdots, \nabla^{\alpha_j}x)$$

avec $A_\alpha \in C^\infty(L^j(L^{\alpha_1}(\pi^*\tau_B\,;\tau'_P), \cdots, L^{\alpha_j}(\pi^*\tau_B\,;\tau'_P)\,;\boldsymbol{R}))$ on a pour $\alpha = (k, \cdots, k)$ (p fois), $A_\alpha(u, \cdots, u) > 0$ pour $u \in L^k(\pi^*\tau_B, \tau'_P)$, $u \neq 0$. Alors la fonction $J_L : W^k_p(\pi) \to \boldsymbol{R}$ définie par $J_L(x) = \int_B L(j^k x)$ vérifie b_0).

Donnons quelques critères pour assurer la semi-continuité d'une fonction $f : X \to \boldsymbol{R}$ de classe C^i ($i = 0, 1, 2$) dans le cas où X est la bivariété déduite d'un chaînon compact (X, X'):

c_i) Pour tout $x \in X$ il existe une carte $\phi = (U, \phi, E)$ de $\mathscr{A}$ restriction d'une carte $\phi' = (U', \phi', E')$ de X' centrée en x telle que pour tout $y \in \phi(U)$ on ait

c_0) $\bar{f}(y) \geq -\beta_0(\|y\|') + \bar{f}(0)$,

c_1) $(D\bar{f}(y) - D\bar{f}(0))\cdot y \geq -\beta_1(\|y\|')$,

c_2) $D^2\bar{f}(y)\cdot y\cdot y \geq -\beta_2\|y\|'^2$

où $\bar{f} = f \circ \phi^{-1}$, $\beta_0 : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ vérifiant $\lim_{t\to 0} \beta_0(t) = 0$, $\beta_1 : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ étant continue et vérifiant $\int_0^1 t^{-1}\beta_1(t)dt < +\infty$, β_2 étant une constante positive.

On peut aussi utiliser les résultats de J. Serrin (avec une hypothèse de convexité) de F. Browder (si $\bar{f}'$ est pseudo-monotone) où de P. Hess. Donnons à titre d'exemple une variante d'un résultat de ce dernier: Si $f : E \to \boldsymbol{R}$ est G-dérivable, si $T = \bar{f}'$ est hémicontinue, localement bornée, $\bar{f}$ est s.c.i. pour σ_s pourvu que T satisfasse la condition: (P) Pour toute suite (u_n) qui converge vers u dans (E, σ_s) on a $\limsup \langle Tu_n, u_n - u\rangle \geq 0$.

4. Applications aux géodésiques de variétés de Sobolev

Définition 1. Une surmersion riemannienne consiste en la donnée d'une submersion surjective différentiable $\pi : P \to S$, de structures riemanniennes sur S et les fibres de π et d'une scission ν de la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \delta P \underset{\longrightarrow}{\overset{\nu}{\longleftarrow}} TP \xrightarrow{T\pi^!} \pi^*TS \longrightarrow 0\ .$$

Le noyau de $T\pi^!$ est noté δP. Si $f : P \to Q$ est un morphisme (fibré) de variétés fibrées P et Q au-dessus de S on note δf la restriction de Tf à δP: $\delta f : \delta P \to \delta Q$. Le morphisme ν est un projecteur du fibré $\tau_P = (TP, \tau_P, P)$ sur le sous-fibré $\tau'_P = (\delta P, \tau'_P, P)$. Il permet de munir P d'une structure riemannienne telle que $T\pi^!$ induise une isométrie de $\delta P^\perp$ sur π^*TS.

Les connexions riemanniennes sur les fibres de π définissent une application de connexion $K' : \delta^2 P \to \delta P$. Nous prolongeons cette application en une application $K: T\delta P \to \delta P$ en posant $K = K' \circ \delta\nu \circ \sigma$ où $\sigma: T^2P \to T^2P$ est l'involution canonique de T^2P échangeant $T\tau_P$ et τ_{TP} ; on vérifie facilement que σ se restreint en une application de $T\delta P$ dans δTP et que l'on a le lemme suivant:

Lemme 1. *K est une application de connexion pour le fibré $\tau'_P = (\delta P, \tau'_P, P)$.*

Si x est une section différentiable de π nous posons $\nabla x = \nu \circ Tx: TS \to \delta P$. Pour $x \in W_p^k(\pi)$, avec $k > n/p$, $n = \dim S$, nous avons $\nabla x \in W_p^{k-1}(L(\tau_S\,;\, x^*\tau'_p))$. Si u est une section de $\pi \circ \tau'$ telle que $x = \tau' \circ u$ nous définissons $\nabla^h u$ par récurrence sur h. Ce morphisme h-linéaire de TS dans δP au-dessus de x est caractérisé par $\nabla u = K \circ Tu$ et

$$\nabla^{h+1}u(v_0, \cdots, v_h) = \nabla(\nabla^h u(v_1, \cdots, v_h))\cdot v_0 - \sum_{i=1}^{h} \nabla^h u(v_1, \cdots, \nabla v_i \cdot v_0, \cdots, v_h)$$

pour tous champs de vecteurs locaux $v_0, v_1, \cdots, v_h$ sur S. On peut encore considérer la section u^* de $x^*\tau'_P$, définir une connexion dans $L^h(\tau_S\,;\, x^*\tau'_P)$ associée à la connexion sur S et à la connexion induite de K par x.

Le résultat suivant est bien connu [4], [14], [17], [20].

Proposition 1. *Si $\pi: P \to S$ est une submersion riemannienne de base compacte de dimension $n, X = W_p^k(\pi)$, ensemble des sections de π dont les expressions locales sont dans un espace de Sobolev W_p^k, est une variété différentiable pour $kp > n$, $p \geq 1$. En posant pour $u \in W_p^k(\pi \circ \tau'_P) = TX$*

$$|u|_{p,k} = \left(\sum_{h=0}^{k} \int_S |\nabla^h u|^p\right)^{1/p}$$

on définit une structure de Finsler sur X qui est une structure riemannienne pour $k = 2$. Si les fibres de π sont complètes, X munie de la distance $d_{p,k}$ associée à cette structure de Finsler est complète.

Nous allons appliquer la méthode directe exposée au paragraphe précédent à la preuve du résultat suivant.

Théorème 1. *Soit $\pi: P \to S$ une submersion riemannienne de fibres complètes et de base compacte. Deux points x_0 et x_1 d'une même composante connexe de $X = W_p^k(\pi)$ peuvent être joints par un chemin de longueur minimum $d_{p,k}(x_0, x_1)$.*

Posons $I = [0, 1], Z = \{w \in W_p^1(I, X), w(0) = x_0, w(1) = x_1\}$,

$$f(z) = \int_0^1 |\dot{z}(t)|_{p,k}^p dt = \sum_{h=0}^{k} \int_0^1 \int_S |\nabla^h \dot{z}(t)|^p dt\ .$$

On peut associer à X et Z les chaînons de Rellich (X, X'), (Z, Z') avec

$$X' = C^0(\pi)\ , \qquad Z' = \{c \in C^0(I, X'), c(0) = x_0, c(1) = x_1\}\ ,$$

de sorte que X et Z deviennent des bivariétés. Vérifions la condition 2a) de la proposition 3.1. Pour cela nous aurons besoin du

Lemme 2. *Soit A un sous-ensemble d'une composante connexe de X borné pour la distance $d_{p,k}$. Alors A est relativement compact dans X'.*

Ce résultat a été établi par K. Uhlenbeck [20] et H. Eliasson [4] sous des conditions restrictives. La preuve que nous donnons utilise le fait que π est une submersion riemannienne et n'est pas seulement munie d'une *R.M.C.* structure au sens de [4]. Dans ce cas, si $z\colon I \to X$ est un chemin différentiable nous avons

$$\frac{D}{dt}\nabla z(t)\cdot v = \nabla \dot{z}(t)\cdot v \qquad \text{pour tous } t \in I,\ v \in TS\ ,$$

D/dt désignant la dérivation covariante d'un champ de vecteurs le long du chemin $t \to z(t)(\tau_S v)$ de $\pi^{-1}(\tau_S v)$. Désignons par $\bar{z}\colon I \times S \to P$ l'application associée à z: $\bar{z}(t, s) = z(t)(s)$. Si nous désignons par ∂ le champ de vecteurs canonique sur $\boldsymbol{R}$, $\partial(t) = (t, 1)$, nous avons en effet

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}\nabla z(t)\cdot v &= K\frac{d}{dt}(\nabla z(t)\cdot v) = K\frac{d}{dt}(\nu\circ Tz(t)\cdot v)\\ &= K\circ T\nu\circ T_1T_2\bar{z}(\partial(t), v) = K\circ T\nu\circ\sigma\circ T_2T_1\bar{z}(\partial(t), v)\end{aligned}$$

tandis que

$$\nabla\dot{z}(t)\cdot v = K\circ T_2T_1\bar{z}(\partial(t), v)\ .$$

L'égalité annoncée résulte de la relation $K = K\circ T\nu\circ\sigma$ qui provient de la symétrie de $K'(K'\circ\sigma\,|\,\delta^2P = K')$ et de la relation $T\nu\circ\sigma\circ T\nu\circ\sigma(w) = \sigma\circ T\nu\circ\sigma(w)$ pour tout $w \in T\delta P$.

Choisissons $q > n$ tel que $k - n/p > 1 - n/q$ et montrons que $|\nabla x|_q$ est borné pour tout $x \in A$, ce qui établira que l'ensemble A est équicontinu, d'après la relation [4, lemma 3, p. 79]:

$$d_P(x(s), x(s')) \leq c(|\nabla x|_q d_S(s, s')^{1-n/q} + d_S(s, s'))\ ,$$

où c est une constante ne dépendant que de q et de S. Choisissons un chemin différentiable $z\colon I \to X$ avec $z(0) = a$ fixé dans A et $z(1) = x$, de longueur inférieure à $d = 2\max_{x\in A} d_{p,k}(a, x)$. Pour $s \in S$, et pour une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$ de T_sS nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\nabla z(t)(s)|^2 &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}|\nabla z(t)e_i|^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\left\langle\frac{D}{dt}\nabla z(t)e_i, \nabla z(t)e_i\right\rangle\\ &\leq 2\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{D}{dt}\nabla z(t)e_i\right|^2\right)^{\frac12}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|\nabla z(t)e_i|^2\right)^{\frac12}\\ &\leq 2\left|\frac{D}{dt}\nabla z(t)(s)\right|\cdot|\nabla z(t)(s)|\end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{d}{dt}\int_S |\nabla z(t)(s)|^q ds = \int_S \frac{1}{2} q |\nabla z(t)(s)|^{q-2} \frac{d}{dt} |\nabla z(t)(s)|^2 ds$$
$$\leq q \int_S |\nabla z(t)(s)|^{q-1} \left| \frac{D}{dt} \nabla z(t)(s) \right| ds$$
$$\leq q |\nabla z(t)|_q^{q-1} \cdot |\nabla \dot{z}(t)|_q$$

puisque $(D/dt)\nabla z = \nabla \dot{z}$. L'inégalité de Gronwall nous donne

$$|\nabla x|_q \leq |\nabla a|_q + \int_0^1 |\nabla \dot{z}(t)|_q dt .$$

Comme il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de k, p, q et S telle que $|\nabla \dot{z}(t)|_q \leq c|\dot{z}(t)|_{p,k}$ (Eliasson [4, th. 2, p. 72]), nous obtenons

$$|\nabla x|_q \leq |\nabla a|_q + cd$$

ce qu'il fallait établir. Comme A est borné dans X donc dans X', $A(s) = \{x(s), x \in A\}$ est relativement compact dans $\pi^{-1}(s)$ pour tout $s \in S$ puisque $\pi^{-1}(s)$ est complet et le théorème d'Ascoli-Arzela achève la preuve du lemme.

Etablissons maintenant la condition 2a') ce qui donnera:

Lemme 3. *$f: Z \to \boldsymbol{R}$ est pseudo-propre pour la topologie induite par Z'.*

Preuve. Considérons un sous-ensemble Z_1 de Z tel que $|f(z)|$ soit majoré par $c \in \boldsymbol{R}_+$ pour tout $z \in Z_1$. Pour $z \in Z_1$, $t_1, t_2 \in I$ avec $t_1 < t_2$ nous avons

$$d_{p,k}(z(t_1), z(t_2)) \leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{z}(t)|_{p,k} dt \leq (t_2 - t_1)^{1-1/p} \left(\int_0^1 |\dot{z}(t)|_{p,k}^p dt \right)^{1/p}$$
$$\leq c^{1/p}(t_2 - t_1)^{1-1/p} .$$

Ainsi Z_1 est un sous-ensemble équicontinu de $C^0(I, X)$ donc de $C^0(I, X')$ puisque l'injection $X' \to X$ est lipschitzienne (de rapport ne dépendant que de S, k, p) et $Z_1(t) = \{z(t), z \in Z_1\}$ est borné dans X puisque $d_{p,k}(x_0, z(t)) = d_{p,k}(z(0), z(t)) \leq c^{1/p}$. Le lemme précédent et le théorème d'Ascoli permettent de conclure. En identifiant Z' et $\bar{Z}' \subset C^0(I \times S, P)$, son image par l'application $z' \to \bar{z}'$, avec $\bar{z}'(t, s) = z'(t)(s)$, et en identifiant Z à son image $\bar{Z}$ par cette application, on peut donner une preuve plus directe du lemme en établissant l'équicontinuité de $\bar{Z}_1$ image de Z_1 dans $\bar{Z}$ et en remarquant que tout sous-ensemble borné d'une fibre de π est relativement compact.

Avant de passer à la vérification des conditions locales sur f nous allons expliciter la structure différentiable sur Z. Posons

$$B = I \times S , \quad \tilde{P} = I \times S , \quad \tilde{\pi} = \mathrm{Id}_I \times \pi : \tilde{P} \to B ,$$
$$\tilde{Z}' = \{z' \in C^0(\tilde{\pi}), \tilde{z}'(0, s) = (0, x_0(s)), \tilde{z}'(1, s) = (1, x_1(s)), \forall s \in S\} .$$

Soit $z' \to \tilde{z}'$ l'application de Z' dans $\tilde{Z}'$ définie par

$$\tilde{z}'(t, s) = (t, z'(t)(s)) , \qquad (t, s) \in I \times S .$$

Proposition 2. *L'application $z' \to \tilde{z}'$ définit un isomorphisme du chainon de Rellich (Z, Z') sur un chainon de Rellich $(\tilde{Z}, \tilde{Z}')$.*

L'image $\tilde{Z}$ de Z par l'application $z \to \tilde{z}$ peut être caractérisée comme le sous-ensemble de $\tilde{Z}'$ formé des sections de $\tilde{\pi}$ dont les expressions locales ont pour partie principale des applications de $W_p^{1,k}(J \times D, \boldsymbol{R}^m)$, où J est un sous-intervalle compact de I, D le disque euclidien de $\boldsymbol{R}^n$, $W_p^{1,k}(J \times D, \boldsymbol{R}^m)$ étant le complété de $C^\infty(J \times D, \boldsymbol{R}^m)$ pour la norme

$$\|w\| = \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\int_{J \times D} |D_x^\alpha w(t, x)|^p dt\, dx + \int_{J \times D} \left|D_x^\alpha \frac{\partial}{\partial t} w(t, x)\right|^p dt\, dx\right)\right]^{1/p} .$$

Définissons les cartes des chaînons (Z, Z'), $(\tilde{Z}, \tilde{Z}')$. Soit $\theta \colon O_P \to U_P$ le tube fibré géodésique sur $\pi \colon O_P$ est un voisinage ouvert de la section nulle dans δP, U_P est un voisinage ouvert de la diagonale dans $P \times_S P$ et $\theta = (\tau'_P, \varepsilon)$ est un difféomorphisme obtenu à l'aide de l'application exponentielle ε associée à la connexion K sur τ_P [17]. Nous déduisons de θ un tube fibré $\tilde{\theta} = (O_{\tilde{P}}, \tilde{\theta}, U_{\tilde{P}})$ sur $\tilde{\pi}$, avec $\tilde{\theta} = \mathrm{Id}_I \times \theta$.

Ce tube fibré permet de définir des cartes du chainon $(\tilde{Z}, \tilde{Z}')$ en un point $\tilde{z}_0 \in \tilde{Z}$ image de $z_0 \in Z$ fixé. Posons

$$F = \tilde{z}_0^* \delta \tilde{P} = \bar{z}_0^* \delta P \subset I \times S \times P , \qquad \eta = \tilde{z}_0^* \tau'_{\tilde{P}} = \bar{z}_0^* \tau'_P ,$$

et désignons par $\psi = (V, \psi, A)$ le voisinage tubulaire de la section $\tilde{z}_0$ obtenu à l'aide du tube $\tilde{\theta}$:

$$V = \{(t, p) \in I \times P, (\tilde{z}_0(t, \pi(p)), p) \in U_P\} \subset \tilde{P} ,$$
$$A = \{(t, s, v) \in I \times S \times O_P, \bar{z}_0(t, s) = \tau'_P(v)\} \subset F ,$$

l'application fibrée $\psi \colon V \to A$ au-dessus de B étant donnée par

$$\psi(t, p) = (t, s, \theta^{-1}(\tilde{z}_0(t, s), p)) \quad \text{pour} \quad s = \pi(p), (t, p) \in V ,$$

ou encore $\tilde{\theta}(t, v) = (\tilde{z}_0(t, s), \psi^{-1}(t, s, v))$ pour $s = \pi \circ \tau'_P(v), (t, s, v) \in A$.

Désignons par $v \to |v|$, la structure de Finsler sur η induite par $\bar{z}_0$ de celle de τ'_P, par ∇ la dérivation covariante sur η image réciproque de celle de τ'_P par $\bar{z}_0$ et par ∇_1 et ∇_2 ses restrictions définies par:

$$\nabla_1 y = \nabla y \cdot (\partial \times \zeta_S) , \qquad \nabla_2 y = \nabla y \circ i_2 ,$$

où ∂ est le champ de vecteurs canonique sur I, ζ_S la section nulle de τ_S, i_2 l'injection canonique de $p_2^* TS = I \times TS$ dans $TB = TI \times TS$. La dérivation ∇_2 sur η et la dérivation covariante sur $\tilde{\tau}_S = p_2^* \tau_S \colon p_2^* TS \to B = I \times S$ induite par $p_2 \colon I \times S \to S$ de la dérivation covariante sur S induisent une dérivation notée encore ∇_2 sur $L^h(\tilde{\tau}_S, \eta)$ pour $h \geq 1$. Ceci nous permet de normer les espaces

$$\tilde{E} = \{\tilde{y} \in W_p^{1,k}(\eta), \tilde{y}(0,s) = 0, \tilde{y}(1,s) = 0 \ \forall s \in S\} ,$$
$$\tilde{E}' = \{\tilde{y}' \in C^0(\eta), \tilde{y}'(0,s) = 0, \tilde{y}'(1,s) = 0 \ \forall s \in S\}$$

par $\|\tilde{y}'\|' = \max_{(t,s)\in I\times S} |\tilde{y}'(t,s)|$ pour $\tilde{y}' \in \tilde{E}'$

$$\|\tilde{y}\| = \left[\sum_{h=0}^{k} (|\nabla_2^h y|_p)^p + \sum_{h=0}^{k} (|\nabla_2^h \nabla_1 y|_p)^p\right]^{1/p}$$

pour $\tilde{y} \in \tilde{E}$, avec $|\tilde{y}|_p = \left(\int_{I\times S} |\tilde{y}(t,s)|^p\right)^{1/p}$.

Nous définissons une carte $(\tilde{\phi}, \tilde{\phi}')$ pour le chainon $(\tilde{Z}, \tilde{Z}')$ en posant

$$\tilde{U} = \{\tilde{z} \in \tilde{Z}\,;\, \tilde{z}(B) \subset V\} , \qquad \tilde{U}' = \{\tilde{z}' \in \tilde{Z}'\,;\, \tilde{z}'(B) \subset V\} ,$$
$$\tilde{\phi}(\tilde{z}) = \psi \circ \tilde{z} \text{ pour } \tilde{z} \in \tilde{U} , \qquad \tilde{\phi}'(\tilde{z}') = \psi \circ \tilde{z}' \text{ pour } \tilde{z}' \in \tilde{U}' .$$

De la même manière le tube fibré θ permet de définir des cartes pour (X, X'); il induit un tube $(\theta_X, \theta_{X'})$ sur (X, X') avec

$$\theta_X = (O_X, \theta_X, U_X) , \qquad \theta_{X'} = (O_{X'}, \theta_{X'}, U_{X'}) ,$$
$$O_X = \{v \in TX\,;\, v(S) \subset O_P\} , \qquad U_X = \{(x_1, x_2) \in X \times X, (x_1, x_2)(S) \subset U_P\} ,$$

$\theta_X(v) = \theta \circ v$ pour $v \in O_X \subset TX = W_p^k(\pi \circ \tau'_P)$, le tube $\theta_{X'}$ étant défini de manière analogue. Le tube $(\theta_X, \theta_{X'})$ définit à son tour les cartes de (Z, Z'). Introduisons les notations nécessaires: nous posons, $z_0 \in Z$ ayant été fixé,

$$\xi = z_0^* \tau_X , \qquad E = \{y \in W_p^1(\xi)\,;\, y(0) = 0, y(1) = 0\} ,$$
$$\xi' = z_0^* \tau_{X'} , \qquad E' = \{y' \in C^0(\xi)\,;\, y'(0) = 0, y'(1) = 0\} ,$$
$$U = \{z \in Z\,;\, (z_0, z)(I) \subset U_X\} , \qquad U' = \{z' \in Z'\,;\, (z_0, z')(I) \subset U_{X'}\} ,$$

et nous définissons $\phi \colon U \to E$, $\phi' \colon U' \to E'$ par

$$\phi(z)(t) = (t, \theta_X^{-1}(z_0(t), z(t))) \quad \text{pour} \quad z \in U, t \in I ,$$
$$\phi'(z')(t) = (t, \theta_{X'}^{-1}(z_0(t), z'(t))) \quad \text{pour} \quad z' \in U', t \in I .$$

Nous munissons ξ' de la structure de Finsler induite par z_0 de la structure de Finsler sur $\tau_{X'}$, et nous normons E' par

$$\|y\|' = \max_{t\in I} |y(t)|_\infty = \max_{t\in I} \max_{s\in S} |y^*(t)(s)| ,$$

si $y(t) = (t, y^*(t))$. Nous munissons ξ de la dérivation covariante induite par

z_0 de la dérivation covariante sur τ_X déduite de l'application de connexion $K_X: T^2X \to TX$ définie par $K_X(w) = K \circ w$. Ceci nous permet de normer E par

$$\|y\| = \left(\int_0^1 |y^*(t)|_{p,k}^p dt + \int_0^1 \left|\frac{D}{dt}y^*(t)\right|_{p,k}^p dt\right)^{1/p},$$

pour $y(t) = (t, y^*(t))$, $y^*: I \to TX$, $\tau_X \circ y^* = z_0$.

Nous voyons que l'expression de l'application $z \to \tilde{z}$, $z' \to \tilde{z}'$ dans les cartes (ϕ, ϕ'), $(\tilde{\phi}, \tilde{\phi}')$ est la restriction de l'application de (E, E') dans $(\tilde{E}, \tilde{E}')$ donnée par $y \to \tilde{y}, y' \to \tilde{y}'$ avec

$$\tilde{y}(t, s) = (t, s, y^*(t)(s)) \qquad \text{pour} y\ (t) = (t, y^*(t))$$

où $y^*: I \to TX$ vérifie $\tau_X \circ y^* = z_0$, l'application $y' \to \tilde{y}'$ étant définie de manière analogue. Comme cette application est un isomorphisme linéaire de (E, E') sur $(\tilde{E}, \tilde{E}')$, la proposition est établie.

Remarque. Nous avons pris pour $\tilde{z}_0$ un point arbitraire de $\tilde{Z}_0$. Il aurait suffit de prendre un point $\tilde{z}_0$ dans $C^\infty(I \times S, \tilde{P})$; les cartes ainsi obtenues formeraient encore des atlas pour les chainons considérés. Les fibrés vectoriels ξ, ξ', η seraient alors de classe C^∞ et non de classe W_p^1, $W_p^{1,k}$ et les dérivations covariantes introduites seraient de classe C^∞, ce qui ne nécessiterait pas la généralisation de ces notions que nous avons utilisée (pour une mise en forme plus complète de ces questions voir [17]). L'intérêt de procéder comme nous l'avons fait sera manifeste dans la preuve de la semi-continuité de f.

Par la suite nous ne ferons plus la distinction entre Z et $\tilde{Z}$, Z' et $\tilde{Z}'$. Conservons les notations introduites dans la preuve précédente (en identifiant les cartes $\phi, \tilde{\phi}$).

Lemme 4. *Il existe une application fibrée $b^0: A \to F$ au-dessus de B telle que δb^0 s'annule sur la section nulle de η et telle que pour tout $z \in U$*

$$\partial_1 y = \nabla_1 y + b^0 \circ y\ ,$$

où pour $y = \phi(z) = \psi \circ z$ on a défini $\partial_1 y$ par:

$$(y(t, s), \partial_1 y(t, s)) = \delta\psi((t, 0), \dot{z}(t)(s))\ .$$

Une preuve élégante de ce lemme découle du lemme 3.1 de Eliasson [4]. La vérification peut aussi être faite par le simple calcul local qui suit. Fixons $(t_0, s_0) \in I \times S$, et supposons que π soit triviale au voisinage du point $\bar{z}_0(t_0, s_0)$. Une trivialisation de π en $I_0 \times S_0 \times P_0 \to I_0 \times S_0$ induit une trivialisation $I_0 \times S_0 \times \boldsymbol{R}^m \to I_0 \times S_0$ de η (I_0, S_0, P_0 étant des ouverts de $I, \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m$ respectivement, avec $n = \dim S$, $m = \dim \pi^{-1}(s_0)$). Nous pouvons supposer que le symbole de Christoffel Γ' de la connexion K' sur les fibres de π s'annule au point (s_0, p_0) correspondant à $\bar{z}_0(t_0, s_0)$ dans la trivialisation (en prenant une carte géodésique de $\pi^{-1}(s_0)$). L'application ψ s'exprime dans les trivialisations choisies par

$$\psi_0(t, s, p) = (t, s, \theta_0^{-1}(s, z_0(t, s), p))$$

pour $(t, s, p) \in I_0 \times S_0 \times P_0$, avec

$$\theta_0(s, p, v) = (s, p, e(s, p, v)) \quad \text{pour} \quad (s, p, v) \in S_0 \times P_0 \times \boldsymbol{R}^m .$$

L'application e est l'expression de l'application exponentielle associée à K'. Elle est caractérisée par l'équation

$$(*) \quad \begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2} e(s, p, tv) = \Gamma'(s, e(s, p, tv))\left(\frac{d}{dt} e(s, p, tv), \frac{d}{dt} e(s, p, tv)\right) , \\ &e(s, p, 0) = p , \qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e(s, p, tv) = v . \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$(**) \quad \begin{aligned} &D_2 e(s, p, 0) = \mathrm{Id} , \qquad && D_3 e(s, p, 0) = \mathrm{Id} , \\ &D_2 D_3 e(s, p, 0) = 0 , \qquad && D_3^2 e(s_0, p_0, 0)(v, v) = \Gamma(s_0, p_0)(v, v) = 0 . \end{aligned}$$

L'expression de $\partial_1 y$ pour une section y est (si l'on identifie une section à sa partie principale):

$$\partial_1 y(t, s) = \dot{y}(t, s) + [D_3 e(s, z_0(t, s), y(t, s))]^{-1} \circ D_2 e(s, z_0(t, s), y(t, s)) \cdot \dot{z}_0(t, s)$$

tandis que l'expression de $\nabla_1 y$ est

$$\nabla_1 y(t, s) = \dot{y}(t, s) + \Gamma'(s, e(s, z_0(t, s), y(t, s))) \cdot (\dot{z}_0(t, s), y(t, s))$$

de sorte que

$$\begin{aligned} b^0(t_0, s_0, v) = {} & [D_3 e(s_0, p_0, v)]^{-1} \circ D_2 e(s_0, p_0, v) \cdot \dot{z}_0(t_0, s_0) \\ & - \Gamma'(s_0, e(s_0, p_0, v)) \cdot (\dot{z}_0(t_0, s_0), v) . \end{aligned}$$

Les relations $(**)$ donnent bien $D_3 b^0(t_0, s_0, 0) = 0$.

Remarque. L'existence de b^0 peut être établie globalement comme suit. Désignons encore par K l'application de connexion sur $\eta: z_0^* \delta P \to B$ induite par z_0 de l'application de connexion K sur τ'_P. Désignons par $\tilde{\nu}$ le projecteur de TA sur δA obtenu en transportant par ψ le projecteur $\tau_I \times \nu$ de $T\tilde{P}$ sur $\delta\tilde{P} = I \times \delta P$. Comme la suite

$$0 \longrightarrow \delta A \longrightarrow TA \longrightarrow A \underset{B}{\times} TB \longrightarrow 0$$

est exacte nous pouvons trouver une application fibrée $\beta: A \to L(TB, F)$ au-dessus de B qui soit la différence des deux projecteurs $\tilde{\nu}$ et (τ_A, K) de TA sur $\delta A = A \times_B F$:

$$\tilde{\nu} = (\tau_A, K + \beta \circ \tau_A \cdot T\eta) .$$

Si $y \in E$ est une section de $A \to B$ nous avons donc

$$\begin{aligned}(y(t, s), \partial_1 y(t, s)) &= \delta\psi \circ (\tau_I \times \nu)(\partial(t), \dot{z}(t, s)) = \tilde{\nu}(\dot{y}(t, s)) \\ &= (y(t, s), \nabla_1 y(t, s) + \beta(y(t, s))(\partial(t), \zeta_S(s)))\end{aligned}$$

de sorte que $b^0(a) = \beta(a)(\partial(t), \zeta_S(s))$ si $\eta(a) = (t, s)$. Avant de calculer l'expression dans la carte ϕ des dérivées covariantes $\nabla^h \dot{z}$ faisons un bref rappel sur les connexions induites.

Rappel. Soit $\eta = (F, \eta, B)$ un fibré vectoriel muni d'une connexion K de dérivation covariante associée ∇. Si $\alpha: A \to B$ est une application différentiable, le fibré $\eta^* = (F^*, \eta^*, A)$ image réciproque de η par α est pourvu de la connexion K^* donnée par

$$K^* = \tau_A \times K: TF^* = TA \underset{TB}{\times} TF \to F^* = A \underset{B}{\times} F .$$

Si s^* est la section de η^* déduite d'une applications $s: A \to F$ qui se projette sur $\alpha, s^* = (\mathrm{Id}_A, s)$, nous avons

$$\nabla^* s^* = K^* \circ Ts^* = (\tau_A, K \circ Ts) = (\tau_A, \nabla s): TA \to A \underset{B}{\times} F = F^* .$$

Appliquons ce qui précède au fibré η et à l'application $\alpha = \eta | A: A \to B$. Nous obtenons une connexion K^* sur $\eta^* = \tau'_A: \alpha^* F = A \times_B F = \delta A \to A$. Sur ce fibré nous avons aussi la connexion $\tilde{K}$ transportée par ψ de la connexion déduite de K sur $V \subset \tilde{P}$. Désignons par $\lambda^* = (\mathrm{Id}_A, \lambda)$ la section de $L^2(\eta^*, \tau_A; \eta^*)$ différence des deux connexions K^* et $\tilde{K}$:

$$\tilde{K} = K^* + \lambda^* \circ \tau_A \circ \tau_{\delta A}(\tau_{\delta A}, T\eta^*) .$$

Explicitons: si $(y, v) \in \delta A = A \times_B F, (z, w) \in T_{(y,v)}\delta A \subset TA \times TF$

$$\tilde{K}(z, w) = K^*(z, w) + \lambda^*(y)((y, v), z) = (y, K(w) + \lambda(y)((y, v), z)) .$$

En utilisant l'isomorphisme $z \to (\tau_A(z), T\eta(z), K(z))$ de TA sur $A \times_B TB \times_B F$ nous pouvons écrire:

$$\tilde{K}(z, w) = (y, K(w) + \lambda_1(y)(v, T\eta(z)) + \lambda_2(y)(v, K(z))) ,$$

où λ_1 et λ_2 sont des morphismes fibrés au-dessus de B:

$$\lambda_1: A \to L^2(F, TB; F) , \qquad \lambda_2: A \to L^2(F, F; F) .$$

Un calcul local facile montre que λ_1 et λ_2 s'annulent sur la section nulle ζ de η. Nous avons ainsi obtenu le

Lemme 5. *Il existe des applications fibrées* $a_0^1: A \to L(F, L(TB, F))$ *et* $a_{0,(1)}^1: A \to L^2(F, L(TB, F); L(TB, F))$ *telles que pour toute section* (y, v) *de* $\delta A = A \times_B F \to B$ *appartenant à* $E \times E$ *nous ayons*

$$\tilde{\nabla}_2(y, v) = (y, \nabla_2 v + a_0^1 \circ y \cdot v + a_{0,(1)}^1 \circ y \cdot v \cdot \nabla_2 y) .$$

De plus a_0^1 *et* $a_{0,(1)}^1$ *s'annulent sur la section nulle* ζ *de* η.

Il suffit en effet de définir a_0^1 et $a_{0,(1)}^1$ par

$$(a_0^1(a) \cdot v) \cdot u = \lambda_1(a)(v, u) , \qquad (a_{0,(1)}^1(a) \cdot v \cdot t)(u) = \lambda_2(a)(v, t(u))$$

pour $a \in A$, $u \in T_b B$, $b = \eta(a)$, $v \in F_b$, $t \in L(T_b B, F_b)$.

Posons $\tilde{\tau}_S = \mathrm{Id}_I \times \tau_S: I \times TS \to I \times S$, $\eta_0 = \eta$ et $\eta_h = L^h(\tilde{\tau}_S; \eta)$ pour $h > 0$. Convenons que $\nabla^h v = v$ pour $h = 0$. Nous disons que $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_j)$ est un multi-entier si α est une suite finie d'entiers α_i positifs. Nous posons $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_j$.

Lemme 6. *Pour* $h = 1, \cdots, k$ *il existe des applications fibrées*

$$a_l^h: A \to L(\eta_l, \eta_h) \quad \text{pour} \quad 0 \le l \le h - 1 ,$$
$$a_{l,\alpha}^h: A \to L^{j+1}(\eta_l, \eta_{\alpha_1}, \cdots, \eta_{\alpha_j}; \eta_h) \quad \text{pour} \quad 0 \le l \le h - 1, l + |\alpha| \le h ,$$

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_j)$ *telles que pour toute section* (y, v) *de* $\delta A = A \times_B F \to B$ *appartenant à* $E \times E$ *nous ayons*

$$\tilde{\nabla}_2^h(y, v) = \Big(y, \nabla_2^h v + \sum_{0 \le l \le h-1} \Big(a_l^h \circ y \cdot \nabla_2^l v + \sum_{|\alpha| \le h-l} a_{l,\alpha}^h \circ y \cdot \nabla_2^l v \cdot \nabla_2^{\alpha_1} y \cdots \nabla_2^{\alpha_j} y\Big)\Big) .$$

De plus $a_{0,(h)}^h$ *s'annule sur la section nulle* ζ *de* η.

La dernière assertion peut être précisée: $a_{0,(h)}^h: A \to L^2(\eta, \eta_h; \eta_h)$ est donné par

$$a_{0,(h)}^h(a)(v, t)(u_1, \cdots, u_h) = \lambda_2(a)(v, t(u_1, \cdots, u_h))$$

pour $a \in A_b = A \cap \eta^{-1}(b)$, $v \in F_b$, $t \in \eta_h^{-1}(b)$, $u_i \in \tilde{\tau}_S^{-1}(b)$, $i = 1, \cdots, h$. Pour établir le lemme 6 nous faisons une récurrence sur h et nous utilisons les faits suivants:

1) Si η et η' sont deux fibrés vectoriels munis d'une connexion au-dessus d'une même base B et si $\rho: \eta \to \eta'$ est une application fibrée il existe une application fibrée, notée $\nabla \rho$ par analogie avec le cas où ρ est un morphisme de fibrés vectoriels,

$$\nabla \rho: \eta \to L(\tau_B, \eta)$$

telle que pour toute section y de η et pour tout champ de vecteurs u sur B on ait

$$\nabla(\rho\circ y)\cdot u = (\nabla\rho)\circ y\cdot u + \delta\rho(y, \nabla y\cdot u) .$$

2) Si, avec les notations précédentes, γ est une section de $L^j(\eta_{\alpha_1}, \cdots, \eta_{\alpha_j}; \eta')$ et si v_i est une section de η_{α_i} pour $i = 1, \cdots, j$, nous avons pour tout $u \in TB$

$$\nabla(\gamma\cdot v_1 \cdots v_j)\cdot u = \nabla\gamma\cdot u\cdot v_1 \cdots v_j + \sum_{i=1}^{i} \gamma\cdot v_1 \cdots v_{i-1}\cdot\nabla v_i\cdot u\cdot v_{i+1} \cdots v_j .$$

Nous déduisons des lemmes 4 et 6 l'expression de $\nabla_2^h\dot{z}$ dans la carte ϕ.

Lemme 7. *Pour $h = 1, \cdots, k$ il existe des applications fibrées $a_l^h, a_{l,\alpha}^h$ données par le lemme précédent et des applications fibrées*

$$b^h\colon A \to \eta_h\ ,\quad b_\alpha^h\colon A \to L^j(\eta_{\alpha_1}, \cdots, \eta_{\alpha_j}; \eta_h)\quad \textit{pour}\quad |\alpha| \leq h\ ,$$

telle que pour toute section $y \in E$ à valeurs dans A nous ayons

$$\tilde{\nabla}_2^h(y, \partial_1 y) = \Big(y, \nabla_2^h\nabla_1 y + \sum_{0\leq l\leq h-1}{}' \Big(A_l^h(y) + \sum_{|\alpha|\leq h-l} A_{l,\alpha}^h(y)\Big) + \sum_{|\alpha|\leq h} B_\alpha^h(y) + b^h\circ y\Big)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{l,\alpha}^h(y) &= a_{l,\alpha}^h\circ y\cdot\nabla_2^l\nabla_1 y\cdot\nabla_2^{\alpha_1}y \cdots \nabla_2^{\alpha_j}y \quad \textit{pour}\quad l > 0,\ \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_j)\ ,\\ A_{0,\alpha}^h(y) &= a_{0,\alpha}^h\circ y\cdot\nabla_1 y\cdot\nabla^{\alpha_1}y \cdots \nabla_2^{\alpha_j}y \quad \textit{pour}\quad \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_j)\ ,\\ A_l^h(y) &= a_l^h\circ y\cdot\nabla_2^l\nabla_1 y \quad \textit{pour}\quad l > 0,\ A_0^h(y) = a_0^h\circ y\cdot\nabla_1 y\ ,\\ B_\alpha^h(y) &= b_\alpha^h\circ y\cdot\nabla_2^{\alpha_1}y \cdots \nabla^{\alpha_j}y \quad \textit{pour}\quad \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_j)\ . \end{aligned}$$

De plus b_α^h s'annule pour la section nulle de η pour $\alpha = (h)$.

En effet nous constatons que $b_{(h)}^h(a)\cdot w = \delta b^0(y)\circ w + a_{0,(h)}^h b^0(a)\cdot w$ pour $a \in A$, $w \in \eta_h$.

Désignons par $G\colon A \to L(F, F)$ l'application fibrée donnant la partie principale de la métrique sur $\tau_A'\colon \delta A \to A$ transportée par ψ de la métrique sur $\tau_{\tilde{P}}'\colon \delta\tilde{P} \to \tilde{P}$:

$$|G(a)u| = |\delta\psi(a, u)| \quad \text{pour} \quad (a, u) \in \delta A = A \underset{B}{\times} F\ .$$

Le choix de la métrique $|\ \ |$ sur η comme image réciproque par $\tilde{z}_0$ de la métrique sur $\tau_{\tilde{P}}'$ implique que $G(\zeta(b)) = \mathrm{Id}$ pour tout $b \in B$. Comme B est compact et G continu nous pouvons trouver $\rho > 0$ tel que pour tout $a \in F$ vérifiant $|a| < \rho$ nous ayons $a \in A$ et

$$\tfrac{1}{2}|u| \leq |G(a)u| \leq 2|u| \quad \text{pour tout} \quad u \in F \ .$$

Dans les majorations qui suivent nous ferons un large usage du résultat suivant dû à K. Uhlenbeck [20] et H. Eliasson [3].

Lemme 8. *Soient S une variété riemannienne compacte, $p \in [1, \infty]$, $k \in N$ vérifiant $k \geq n/p$, $n = \dim S$. Pour tous $h = 0, \cdots, k$, $q \in [1, \infty]$ vérifiant $h - n/q \leq k - n/p$ (avec inégalité stricte si $q = +\infty$) il existe $c > 0$ ne dépendant que de S, p, q, h, k telle que pour tout fibré vectoriel riemannien ξ au-dessus de S on ait*

$$|u|_{q,h} \leq c|u|_{p,k} \quad \textit{pour tout} \quad u \in W_p^k(\xi) \ ,$$

la norme $|\quad|_{p,k}$ étant obtenue à l'aide de la connexion ∇ de ξ et de sa métrique par

$$|u|_{p,k} = \left[\sum_{j=0}^{k} \int_S |\nabla^j u|^p\right]^{1/p} .$$

Nous noterons c_h la constante obtenue pour $h = 0, \cdots, k$, $q = p_h = kp/h$.

Lemme 9. *Pour tout $y \in E$ vérifiant $\|y\|' \leq r$ avec $r < \rho$ nous avons les majorations suivantes dans lesquelles les constantes $m_l^h, m_{l,\alpha}^h, n^h, n_\alpha^h, p^h, q^h$ ne dépendent que de r, les constantes $c, c_p, c_\alpha, c_{l,\alpha}$ ne dépendent ni de y ni de r:*

(i) $\left[\int_B |A_l^h(y)|^p\right]^{1/p} \leq m_l^h \|y\|$,

(ii) $\left[\int_B |b^h \circ y|^p\right]^{1/p} \leq c_p n^h$,

(iii) $\left[\int_B |B_\alpha^h(y)|^p\right]^{1/p} \leq c_\alpha n_\alpha^h (\|y\|')^{j-|\alpha|/k} \|y\|^{|\alpha|/k}$ *pour* $\alpha \neq (h)$,

(iv) $\left[\int_B |B_{(h)}^h(y)|^p\right]^{1/p} \leq q^h \|y\|' \|y\|$,

(v) $\left[\int_B |A_{0,(h)}^h(y)|^p\right]^{1/p} \leq cp^h \|y\|' \|y\|^2$,

(vi) $\left[\int_B |A_{l,\alpha}^h(y)|^p\right]^{1/p} \leq c_{l,\alpha} m_{l,\alpha}^h (\|y\|')^{j-|\alpha|/k} \|y\|^{1+|\alpha|/k}$ *pour* $\alpha \neq (h), l \geq 0$.

De façon précise les constantes $m_l^h, m_{l,\alpha}^h, n^h, n_\alpha^h, p^h, q^h$ sont les bornes supérieures des normes des applications $a_l^h, a_{l,\alpha}^h, b^h, b_\alpha^h, \delta a_{0,(h)}^h, \delta b_{(h)}^h$ respectivement sur le compact $A_r = \{a \in A, |a| \leq r\}$.

Preuve. Les majorations (i) et (ii) sont évidentes. Pour établir (iii) avec $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_j)$ posons $q_i = kp/\alpha_i$ pour $i = 1, \cdots, j$ et appliquons l'inégalité de Hölder ce qui est légitime puisque $1/q_1 + \cdots + 1/q_j = |\alpha|/(kp) \leq 1/p$:

$$\left[\int_B |B_\alpha^h(y)|^p\right]^{1/p} \leq n_\alpha^h \prod_{i=1}^{j} \left[\int_0^1 (|y_t|_{q_i,\alpha_i})^{q_i} dt\right]^{1/q_i} .$$

Comme il existe des constantes c_{α_i} telles que

$$|y_t|_{q_i,\alpha_i} \leq c_{\alpha_i}(|y_t|_{p,k})^{\alpha_i/k}(|y_t|_\infty)^{1-\alpha_i/k} ,$$

nous obtenons

$$\left[\int_B |B_\alpha^h(y)|^p\right]^{1/p} \leq c_{\alpha_1} \cdots c_{\alpha_j} n_\alpha^h(\|y\|')^{j-|\alpha|/k}\left[\int_0^1 (|y_t|_{p,h})^p dt\right]^{1/q_1+\cdots+1/q_j} ,$$

d'où le résultat annoncé. La majoration (iv) découle de l'inégalité

$$\sup_{b \in B} |b_{(h)}^h(y(b))| \leq \sup_{|a| \leq r} |\delta b_{(h)}^h(a)| \|y\|' ,$$

qui provient du fait que $b_{(h)}^h$ s'annule sur la section nulle de η. La majoration (v) utilise cet argument et un calcul analogue à celui qui suit. Pour obtenir la majoration (vi) nous appliquons l'inégalité de Hölder, ce qui est légitime puisque $1/p_l + 1/q_1 + \cdots + 1/q_j \leq 1/p$ pour $p_l = kp/l$, $q_i = kp/\alpha_i$:

$$\begin{aligned}\left[\int_B |A_{l,\alpha}^h(y)|^p\right]^{1/p} &\leq m_{l,\alpha}^h\left[\int_0^1 (|\nabla_1 y_t|_{p_l,l} \prod_{i=1}^j |y_t|_{q_i,\alpha_i})^p dt\right]^{1/p} \\ &\leq c_l c_{\alpha_1} \cdots c_{\alpha_j} m_{l,\alpha}^h \sup_{t \in I} (|y_t|_\infty)^{j-|\alpha|/k} \sup_{t \in I} (|y_t|_{p,k})^{|\alpha|/k}\left[\int_0^1 (|\nabla_1 y_t|_{p,k})^p dt\right]^{1/p} \\ &\leq c c_l c_{\alpha_1} \cdots c_{\alpha_j} m_{l,\alpha}^h(\|y\|')^{j-|\alpha|/k}\|y\|^{|\alpha|/k}\|y\| ,\end{aligned}$$

où c est une constante telle que

$$\sup_{t \in I} |y_t|_{p,k} \leq c\|y\| \quad \text{pour tout} \quad y \in E .$$

L'existence de cette constante est attestée par le lemme suivant:

Lemme 10. *Il existe une constante $c \geq 1$ telle que pour $h = 0, \cdots, k$, $q \in [1, p_h]$ avec $p_h = kp/h$ nous ayons pour tout $y \in E$*

$$\sup_{t \in I} |\nabla_2^h y_t|_q \leq c\|y\| .$$

Preuve. Il existe des sections R_j^h, $j = 0, \cdots, h-1$ de $L(\eta_j; \eta_h)$ telles que pour tout $y \in E$ nous ayons

$$\nabla_1 \nabla_2^h y = \nabla_2^h \nabla_1 y + \sum_{j=0}^{h-1} R_j^h \cdot \nabla_2^j y .$$

Comme B est compact nous pouvons trouver $c_B \geq 1$ telle que

$$|\nabla_1 \nabla_2^h y(t, s)| \leq c_B\left(|\nabla_2^h \nabla_1 y(t, s)| + \sum_{j=0}^{h-1} |\nabla_2^j y(t, s)|\right) \quad \text{pour tout} \quad (t, s) \in B .$$

Or

$$\frac{d}{dt}|\nabla_2^h y(t,s)|^2 \leq 2|\nabla_2^h y(t,s)||\nabla_1\nabla_2^h y(t,s)|$$

comme nous le voyons en prenant une base orthonormale de T_sS; donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(|\nabla_2^h y_t|_q)^q &\leq q\int_S |\nabla_2^h y(t,s)|^{q-1}|\nabla_1\nabla_2^h y(t,s)|ds\\ &\leq qc_B(|\nabla_2^h y_t|_q)^{q-1}\Big(|\nabla_2^h\nabla_1 y_t|_q + \sum_{j=0}^{h-1}|\nabla_2^j y_t|_q\Big)\,.\end{aligned}$$

Ainsi

$$(*)\qquad \begin{aligned}\sup_{t\in I}|\nabla_2^h y_t|_q &\leq c_B\int_0^1\Big(|\nabla_2^h\nabla_1 y_t|_q + \sum_{j=0}^{h-1}|\nabla_2^j y_t|_q\Big)dt\\ &\leq c'_B\int_0^1(|\nabla_1 y_t|_{p,k} + |y_t|_{p,k})dt \leq c\|y\|\,.\end{aligned}$$

Lemme 11. *La fonction f est pseudo-propre pour la topologie faible.*
Preuve. Posons pour $m > 0$ et $r \in]0, \rho[$ assez petit

$$Y_{r,m} = \{y \in E, \|y\|' \leq r, f\circ\phi^{-1}(y) \leq m\}\,.$$

Nous allons montrer par récurrence sur $h = 0, \cdots, k$ qu'il existe des constantes M_h, N_h ne dépendant que de r et m telles que pour $p_h = kp/h$ nous ayons

a) $\sup_{t\in I}|\nabla_2^h y_t|_{p_h} \leq M_h$ pour tout $y \in Y_{r,m}$,

b) $\left[\int_I(|\nabla_2^h\nabla_1 y_t|_{p_h})^p dt\right]^{1/p} \leq N_h$ pour tout $y \in Y_{r,m}$.

Nous en déduirons que $Y_{r,m}$ est borné dans E d'où l'assertion du lemme 11. Pour $h = 0$, $p_h = +\infty$ et l'assertion a) a lieu pour $M_0 = r$. Comme

$$(y_t, \nabla_1 y_t) = (y_t, \partial_1 y_t - b^0\circ y_t) \quad \text{pour} \quad y \in Y_{r,m}\,,$$

et comme le choix de r et le lemme 8 nous assurent que

$$|\partial_1 y_t|_\infty \leq 2|\dot z_t|_\infty \leq 2c_0|\dot z_t|_{p,k} \quad \text{pour} \quad z = \phi^{-1}(y)\,,$$

nous obtenons

$$\left[\int_0^1(|\nabla_1 y_t|_\infty)^p dt\right]^{1/p} \leq 2c_0(m)^{1/p} + n^0 = N_0\,.$$

Soit $h > 0$. Supposons les assertions a) et b) établies pour $h' < h$. Remarquons d'abord que cette hypothèse de récurrence et l'inégalité

$$(*)\qquad \sup_{t\in I}|\nabla_2^h y_t|_q \le c_B\int_0^1\Big(|\nabla_2^h\nabla_1 y_t|_q + \sum_{j=0}^{h-1}|\nabla_2^j y_t|_q\Big)dt$$

établie dans la preuve précédente, avec $q = p_h = kp/h$, permettent de déduire l'assertion a) de l'assertion b). Exprimons $\nabla_2^h\nabla_1 y$ à l'aide du lemme 7:

$$(y, \nabla_2^h\nabla_1 y + A_{0,(h)}^h(y) + B_h^h(y)) = \tilde{\nabla}_2^h(y, \partial_1 y)$$
$$-\Big(y, \sum_{0\le l\le h-1}\Big(A_l^h(y) + \sum_{\substack{|\alpha|+l\le h\\ \alpha\ne h}} A_{l,\alpha}^h(y)\Big) + \sum_{\substack{|\alpha|\le h\\ \alpha\ne h}} B_\alpha^h(y) + b^h\circ y\Big).$$

En utilisant l'inégalité de Hölder comme dans la preuve du lemme 9 nous obtenons

$$\Big[\int_0^1(|\nabla_2^h\nabla_1 y_t|_q)^p dt\Big]^{1/p} - rp^h N_0\sup_{t\in I}|\nabla_2^h y_t|_q - rq^h\Big[\int_0^1(|\nabla_2^h y_t|_q)^p dt\Big]^{1/p}$$
$$\le 2c_h(m)^{1/p} + \sum_{0\le l\le h-1}\Big(c_l^h m_l^h + \sum_{\substack{|\alpha|\le h-l\\ \alpha\ne(h)}} m_{l,\alpha}^h M_\alpha\Big)N_l + \sum_{\substack{|\alpha|\le h\\ \alpha\ne(h)}} n_\alpha^h M_\alpha + c_q n^h$$

avec $c_l^h = (\text{mes } B)^{(k-l)/(kp)}$, $c_q = (\text{mes } B)^{1/q}$, $M_\alpha = M_{\alpha_1}\cdots M_{\alpha_j}$ pour

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, a_j)\ ,\quad p^h = \sup_{|\alpha|\le r}|\delta A_{0,(h)}^h(a)|\ ,\quad q^h = \sup_{|\alpha|\le r}|\delta B_h^h(a)|\ .$$

Si nous avons choisi r assez petit pour que

$$rc_B(N_0 p^h + q^h) < 1\ ,\qquad h = 0, \cdots, k\ ,$$

nous obtenons b) grâce à l'inégalité $(*)$.

Lemme 12. *La fonction f est semi-continue inférieurement pour la topologie faible.*

Preuve. Pour $y = \phi(z)$, $z \in U$ et $h = 0, \cdots, k$ posons

$$f_h(y) = \Big[\int_B(|\nabla_2^h \dot{z}|)^p\Big]^{1/p}$$

de sorte que $f\circ\phi^{-1}(y) = f_0(y)^p + \cdots + f_k(y)^p$. Pour établir la semi-continuité de f au point z_0 il suffit de montrer que si (y_ν) est une suite de $\phi(U)$ qui converge faiblement vers 0 dans E nous avons

$$\liminf f_h(y_\nu) \ge f_h(0)\ .$$

Posons $m = \sup_{\nu\in N}\|y_\nu\|$ et choisissons $r \in]0, \rho[$. Nous pouvons supposer que $\|y_\nu\|' < r$ pour tout $\nu \in N$ sans restreindre la généralité puisque $\|y_\nu\|'$ tend vers 0.

Les majorations du lemme 9 nous assurent que la suite

$$w_\nu = \nabla_2^h\nabla_1 y_\nu + b^h\circ y_\nu + \sum_{|\alpha|\le h} B_\alpha^h(y_\nu) + \sum_{0\le l\le h-1}\Big(A_l^h(y_\nu) + \sum_{|\alpha|\le h-l} A_{l,\alpha}^h(y_\nu)\Big)$$

est bornée dans l'espace $L_p(\eta_h)$ des sections de η_h de puissance $p^{\text{ème}}$-sommable. Nous en déduisons que

$$\lim \left[\int_B |G(y_\nu)\cdot w_\nu - G(0)\cdot w_\nu|^p\right]^{1/p} = 0 .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\liminf f_h(y_\nu) &= \liminf \left[\int_B |w_\nu|^p\right]^{1/p} \\ &= \liminf \left[\int_B |\nabla_2^h \nabla_1 y_\nu + b^h \circ y_\nu + \sum_{0\le l\le h-1} A_l^h(y_\alpha)|^p\right]^{1/p} ,\end{aligned}$$

car $\lim \left[\int_B |A_{l,\alpha}^h(y_\nu)|^p\right]^{1/p} = 0$, $\lim \left[\int_B |B_\alpha^h(y_\nu)|^p\right]^{1/p} = 0$ d'après les majorations (iii), (iv), (v), (vi) du lemme 9 et le fait que $\|y_\nu\|' \to 0$. Nous voyons facilement que $\nabla_2^h\nabla_1 y_\nu + b^h \circ y_\nu + \sum_{0\le l\le h-1} a_l^h \circ y_\nu \cdot \nabla_2^l \nabla_1 y_\nu$ converge faiblement vers $b^h \circ 0$ dans $L_p(\eta_h)$. Comme la norme d'un espace de Banach est semi-continue inférieurement pour la topologie faible nous obtenons

$$\liminf f_h(y_\nu) \ge \left[\int_B |b^h \circ 0|^p\right]^{1/p} = f_h(0) ,$$

ce qui achève la preuve du lemme 12 et du théorème.

5. Vérification de la condition (C)

Nous nous proposons de vérifier dans ce paragraphe la condition (C) de Palais-Smale pour la bivariété Z, la fonction f du paragraphe précédent et la structure de Finsler canonique sur Z. Rappelons cette condition: (C) Toute suite (z_ν) de Z telle que $(f(z_\nu))$ soit bornée et que $(\|df(z_\nu)\|)$ tende vers 0 possède une sous-suite convergente dans Z.

Exposons d'abord la méthode employée.

Définition 1. Soit (Z, Z') un chaînon de Rellich pour un bi-atlas $\mathscr{A}$ issu d'un atlas $\mathscr{A}'$ sur Z'. Une structure de Finsler $w \to \|w\|$ sur Z est dite $\mathscr{A}$-admissible si pour tout $z_0 \in Z$ et pour toute carte $\phi = (U, \phi, E)$ de $\mathscr{A}$ centrée en z_0 il existe un voisinage V' de z_0 dans Z' tel que pour tout sous-ensemble B de $\phi(U)$ borné dans E et contenu dans $\phi(U \cap V')$ il existe une constante $K \ge 1$ telle que $1/K\|v\| \le \|T^{-1}\phi(y, v)\| \le K\|v\|$ pour tout $(y, v) \in B \times E$.

Théorème 1. *Si (Z, Z') est un chaînon de Rellich pour un biatlas $\mathscr{A}$, si Z est muni d'une structure de Finsler $\mathscr{A}$-admissible, une condition suffisante pour qu'une fonction de classe C^1, $f\colon Z \to \boldsymbol{R}$ satisfasse (C) est que f soit pseudo-propre pour la topologie faible sur Z et vérifie*

(S_0) *Pour tout $z_0 \in Z$ il existe une carte $\phi = (U, \phi, E)$ de $\mathscr{A}$ centrée en z_0 telle que pour toute suite (y_ν) de $\phi(U)$ convergeant faiblement vers 0 dans E*

avec $\lim_\nu D\bar{f}(y_\nu)\cdot y_\nu - D\bar{f}(0)\cdot y_\nu = 0$ *pour* $\bar{f} = f\circ\phi^{-1}$ *il existe une sous-suite de* (y_ν) *qui converge fortement vers* 0 *dans* E.

Remarque. Il est équivalent de supposer que $\lim D\bar{f}(y_\nu)\cdot y_\nu = 0$ ou que $\lim D\bar{f}(y_\nu)\cdot y_\nu - D\bar{f}(0)\cdot y_\nu = 0$ si (y_ν) tend vers 0 dans (E, σ).

Preuve. Soit (z_ν) une suite de Z telle que $\|df(z_\nu)\|$ tende vers 0 et que $(f(z_\nu))$ soit bornée. Puisque f est pseudo-propre pour (Z, σ_s) nous pouvons supposer que (z_ν) converge vers un point $z_0 \in Z$ pour σ_s. Soit ϕ la carte de la condition (S_0) et soit $y_\nu = \phi(z_\nu)$ pour ν assez grand. Comme $\|D\bar{f}(y_\nu)\|$ tend vers 0 et comme (y_ν) est bornée nous avons $D\bar{f}(y_\nu)\cdot y_\nu \to 0$ et (S_0) permet de conclure.

Reprenons les notations du paragraphe précédent pour vérifier la condition (C) pour f. Nous munissons Z de la structure de Finsler donnée par

$$\|w\| = \sum_{h=0}^{k} (|\nabla_2^h w|_p + |\nabla_2^h \nabla_1 w|_p) , \qquad w \in TZ$$

avec $|u|_p = \left[\iint_{I\times S} |u(t,s)|^p\right]^{1/p}$; elle est uniformément équivalente à la structure de Finsler $w \to [\sum_{h=0}^{k} (|\nabla_2^h w|_p^p + |\nabla_2^h \nabla_1 w|_p^p)]^{1/p}$. Exprimons cette structure de Finsler dans la carte ϕ déduite du voisinage tubulaire $\psi = (V, \psi, A)$ d'une section $z_0 \in Z$. Le lemme 4.6 nous donne pour $h = 0, \cdots, k$, $y \in \phi(U)$, $v \in E$:

$$\tilde{\nabla}_2^h(y, v) = (y, v_h) \quad \text{avec} \quad v_h = \nabla_2^h v + \sum_{0\le h\le l-1}\left(A_l^h(y, v) + \sum_{|\alpha|\le h-l} A_{l,\alpha}^h(y, v)\right)$$

et $A_l^h(y, v) = a_l^h \circ y\cdot \nabla_2^l v$, $A_{l,\alpha}^h(y, v) = a_{l,\alpha}^h \circ y \cdot \nabla_2^l v \cdot \nabla_2^{\alpha_1} y \cdots \nabla_2^{\alpha_j} y$ pour $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_j)$. En combinant ce résultat et le calcul précédant le lemme 4.5 nous obtenons

Lemme 1. *Pour* $(y, v) \in \phi(U) \times E$, $h = 0, \cdots, k$ *nous avons* $\tilde{\nabla}_2^h \tilde{\nabla}_1(y, v) = (y, v_h')$ *avec*

$$\begin{aligned} v_h' = \nabla_2^h \nabla_1 v &+ \sum_{0\le l\le h-1}\left(A_l^h(y, \nabla_1 v) + \sum_{|\alpha|<h-l} A_{l,\alpha}^h(y, \nabla_1 v)\right) \\ &+ \sum_{0\le l\le h}\left(B_l^h(y, v) + \sum_{0\le m\le h-l}\left(B_{l,m}^h(y, v) + \sum_{|\alpha|\le h-l-m} B_{l,m,\alpha}^h(y, v)\right)\right)\end{aligned}$$

pour

$$B_l^h(y, v) = b_l^h \circ y\cdot\nabla_2^l v , \qquad B_{l,m}^h(y, v) = b_{l,m}^h \circ y\cdot \nabla_2^l v\cdot \nabla_2^m \nabla_1 y ,$$
$$B_{l,m,\alpha}^h(y, v) = b_{l,m,\alpha}^h \circ y\cdot \nabla_2^l v \nabla_2^m \nabla_1 y \cdot \nabla_2^{\alpha_1} y \cdots \nabla_2^{\alpha_j} y \quad si \quad \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_j) .$$

Les applications $b_l^h, b_{l,m}^h, b_{l,m,\alpha}^h$ sont des applications fibrées de A dans $L(\eta_h, \eta_h)$, $L^2(\eta_l, \eta_m ; \eta_h)$, $L^{j+2}(\eta_l, \eta_m, \eta_{\alpha_1}, \cdots, \eta_{\alpha_j}; \eta_h)$ respectivement. De plus b_h^h qui est fonction linéaire de λ s'annule sur la section nulle de A. Des majorations analogues à celles du lemme 4.9 donnent le résultat suivant:

Lemme 2. *Pour tout* $r > 0$ *il existe une constante* $R > 0$ *telle que pour tout* $(y, v) \in \phi(U) \times E$ *vérifiant* $\|y\| \le r$ *on ait*

$$||v_h|_p - |\nabla_2^h v|_p| \leq R \sum_{l=0}^{h-1} |\nabla_2^l v|_p ,$$

$$||v'_h|_p - |\nabla_2^h \nabla_1 v|_p| \leq R\|y\|'|\nabla_2^h v|_p + R \sum_{l=0}^{h-1} (|\nabla_2^l v|_p + |\nabla_2^l \nabla_1 v|_p) .$$

Nous pouvons supposer que pour $\|y\|' < \frac{1}{2}R^{-1}$ nous avons

$$\tfrac{1}{2}|u| \leq |G(y)u| \leq 2|u| \qquad \text{pour tout } u .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|T\phi^{-1}(y, v)\| &\geq \tfrac{1}{2} \sum_{h=0}^{k} (|v_h|_p + |v'_h|_p) \\
&\geq \tfrac{1}{2}\Big[\|v\| - (2k + \|y'\|)R \sum_{h=0}^{k-1} (|\nabla_2^h \nabla_1 v|_p + |\nabla_2^h v|_p) \\
&\qquad - R\|y\|'|\nabla_2^k v|_p\Big] \\
&\geq \tfrac{1}{4}\|v\| - (kR + \tfrac{1}{4}) \sum_{h=0}^{k-1} (|\nabla_2^h \nabla_1 v|_p + |\nabla_2^h v|_p) \\
&\geq \tfrac{1}{8}\|v\| - R'(|\nabla_1 v|_p + |v|_p)
\end{aligned}$$

pour $\|y\|' \leq \frac{1}{2}R^{-1}, \|y\| \leq r$ et pour une constante R' obtenue à l'aide de l'inégalité de Poincaré. La majoration de $\|G^{-1}\|$ et l'expression de $\tilde{\nabla}_1(y, v)$ nous assurent qu'il existe R'' tel que

$$|v|_p + |\nabla_1 v|_p \leq R''\|T\phi(y, v)\| .$$

Ainsi $\|T\phi^{-1}(y, v)\| \geq \frac{1}{8}\|v\|/(R'R'' + 1)$ pour $\|y\|' \leq \frac{1}{2}R^{-1}, \|y\| \leq r$. Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\|T\phi^{-1}(y, v)\| &\leq 2 \sum_{h=0}^{k} (|v_h|_p + |v'_h|_p) \\
&\leq 2\Big[\|v\| + (2k + \|y\|')R \sum_{h=0}^{k-1} (|\nabla_2^h \nabla_1 v|_p + |\nabla_2^h v|_p) \\
&\qquad + R\|y\|'|\nabla_2^k v|_p\Big] \\
&\leq 4(kR + 1)\|v\|
\end{aligned}$$

pour $\|y\|' \leq \frac{1}{2}R^{-1}, \|y\| \leq r$. Nous avons ainsi obtenu le

Lemme 3. *La structure de Finsler sur Z est $\mathscr{A}$-admissible, $\mathscr{A}$ désignant l'atlas du chaînon (Z, Z').*

Vérifions maintenant la condition (S_0) pour $p = 2$. Posons $\bar{f} = f \circ \phi^{-1}$,

$$w_h(y) = \nabla_2^h \nabla_1 y + b^h \circ y + \sum_{|\alpha| \leq h} B_\alpha^h(y) + \sum_{0 \leq l \leq h-1} \Big(A_l^h(y) + \sum_{|\alpha| \leq h-l} A_{l,\alpha}^h(y)\Big) .$$

Comme $\bar{f}(y) = \sum_{h=0}^{k} \int_B |G(y) \cdot w_h(y)|^2$ nous avons

$$D\bar{f}(y) \cdot y = p^2 \sum_{h=0}^{k} \int_B \langle G(y) \cdot w_h(y), \delta G(y, y) \cdot w_h(y) + G(y) \cdot Dw_h(y) \cdot y \rangle .$$

Soit (y_ν) une suite de $\phi(U)$ qui converge faiblement vers 0 dans E et telle que $D\bar{f}(y_\nu) \cdot y_\nu$ tende vers 0. La convergence de $(\|y_\nu\|')$ vers 0, les majorations du lemme 4.9 et le fait que $w_h(y_\nu)$ et tous ses termes soient bornés dans $L_2(\eta_h)$ nous assurent après le calcul explicite de $Dw_h(y) \cdot y$ que

$$\lim_\nu \int_B \langle G(y_\nu) \cdot w_h(y_\nu), \delta G(y_\nu, y_\nu) \cdot w_h(y_\nu) \rangle = 0 ,$$

$$\lim_\nu \int_B \langle G(y_\nu) \cdot w_h(y_\nu), G(y_\nu) \cdot (Dw_h(y_\nu) \cdot y_\nu - w'_h(y_\nu)) \rangle = 0 ,$$

pour

$$w'_h(y) = \nabla_2^h \nabla_1 y + \sum_{|\alpha| \leq h} j_\alpha B_\alpha^h(y) + \sum_{0 \leq l \leq h-1} \left(A_l^h(y) + \sum_{|\alpha| \leq h-l} (j_\alpha + 1) A_{l,\alpha}^h(y) \right) .$$

Ainsi

$$\lim_\nu \sum_{h=0}^{k} \int_B \langle G(y_\nu) \cdot w_h(y_\nu), G(y_\nu) \cdot w'_h(y_\nu) \rangle = 0 ,$$

donc

$$\lim_\nu \sum_{h=0}^{k} \int_B \langle w_h(y_\nu), w'_h(y_\nu) \rangle = 0 .$$

Comme $(\nabla_2^l \nabla_1 y_\nu)$ tend faiblement vers 0 dans $L_2(\eta_l)$ et comme $|b_0^h y_\nu - b_0^h 0|_\infty \to 0$, les majorations du lemme 4.9 nous permettent d'en déduire que $|w'_h(y_\nu)|_2 \to 0$ et que

$$\lim_\nu \left| \nabla_2^h \nabla_1 y_\nu + \sum_{0 \leq l \leq h-1} a_l^h \circ y_\nu \cdot \nabla_2^l \nabla_1 y_\nu \right|_2 = 0 .$$

Par récurrence sur h nous obtenons que $\lim_\nu |\nabla_2^h \nabla_1 y_\nu|_2 = 0$. Le calcul du lemme 4.11 nous permet alors de conclure que $(\|y_\nu\|)$ tend vers 0. Comme f est pseudo-propre pour la topologie faible nous avons ainsi obtenu le

Théorème 2. *La fonction* $f \colon Z \to \boldsymbol{R}$, $Z = \{z \in W_2^1(I, W_2^k(\pi)),\ z(0) = x_0,\ z(1) = x_1\}$ *donnée par* $f(z) = \int_0^1 |\dot{z}(t)|_{2,k}^2 dt$ *vérifie la condition* (*C*) *pour la structure riemannienne canonique sur* Z.

Bibliographie

[1] J. Dowling, *Finsler geometry on Sobolev manifolds,* Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., 1970, 1–10.

[2] N. Dunford & J. T. Schwartz, *Linear operators.* Part I, Interscience, New York, 1958.

[3] R. E. Edwards, *Functional analysis. Theory and applications,* Holt Rinehart and Winston, New York, 1965.

[4] H. I. Eliasson, *Variation integrals in fiber bundles,* Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVI, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., 1970, 67–89.

[5] ——, *Condition* (C) *and geodesic completeness of* H^1 *curve manifolds,* Publication, Bonn, 1970.

[6] ——, *Condition* (C) *and geodesics on Sobolev manifolds,* Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971) 1002–1005.

[7] S. Gautier & J. P. Penot, *L'existence de courbes intégrales pour les champs de vecteurs faiblement continus,* Prepublication, Université de Pau, 1972.

[8] R. Graff, Ph.D. Thesis, Princeton University, 1972.

[9] N. Grossman, *Geodesics on Hilbert manifolds,* Ph.D. Thesis, University of Minnesota, 1964.

[10] J. Kisynski, *Convergence de type* L, Colloq. Math. **2** (1960) 205–211.

[11] U. Koschorke, *Pseudo-compact subsets of infinite dimensional manifolds,* J. Differential Geometry **5** (1971) 127–134.

[12] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[13] J. H. McAlpin, *Infinite dimensional manifolds and Morse theory,* Ph.D. Thesis, Columbia University, 1965.

[14] R. S. Palais, *Foundations of global non-linear analysis,* Benjamin, New York, 1968.

[15] ——, *When proper maps are closed,* Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970) 835–836.

[16] ——, *Banach manifolds of fiber bundle sections,* Actes Congrès Internat. Math. (Nice, 1970), Gauthier-Villars, Paris, No. 2, 1971, 243–249.

[17] J. P. Penot, *Diverses méthodes de construction de variétés d'applications,* Thèse principale, Paris, 1970.

[18] ——, *Calcul différentiel dans les espaces vectoriels topologiques,* Studia Math. **47** (1973) 1–23.

[19] ——, *Topologie faible sur des variétés de Banach,* C. R. Acad. Sci. Paris **274** (1972) 405–408.

[20] K. Uhlenbeck, *The calculus of variations and global analysis,* Ph.D. Thesis, Brandeis University, 1968.

[21] M. M. Vainberg, *Le problème de la minimisation des fonctionnelles non-linéaires,* Problems in Non-Linear Analysis (C.I.M.E., IV Ciclo, Varenna, 1970), Cremonese, Rome, 1971, 463–574.

Universite de Pau