J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
1 (1967) 195-224

VARIÉTÉS KÄHLERIENNES ET PREMIÈRE CLASSE DE CHERN

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Introduction

Dans deux intéressants articles [3], [4], S. Kobayashi a étudié les variétés kähleriennes compactes W_n admettant une première classe de Chern définie positive ou définie négative. Le but du présent article est d'obtenir certaines propriétés *des tenseurs holomorphes* de W_n (contravariants ou covariants) sous des hypothèses plus faibles concernant $c_1(W_n)$ (*caractère non positif ou non négatif*). On en déduit en particulier des propriétés du plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de W_n (voir [9]).

Les principaux résultats sont énoncés dans les théorèmes 1 et 2 (§11 et 12) et constituent, en un certain sens, une extension de résultats de Nakano, Kobayashi et Kodaira.

Les lemmes 1, 2 et 3 donnent les principaux instruments permettant d'établir ces théorèmes qui font intervenir aussi la proposition 2 du §10. Celle-ci fournit une condition nécessaire et suffisante commode, en termes d'opérateurs introduits par Kodaira, pour qu'un tenseur antisymétrique (contravariant) soit holomorphe. Certains des résultats ont été énoncés dans [10].

Dans un but de simplicité, on a regroupé dans les §1 à 3 certaines des notations et des formules utilisées.

1. Variété complexes

a) W_n étant une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension réelle $2n$, supposons qu'elle admette une *structure analytique complexe*. Un système de coordonnées locales complexes est défini dans un domaine U de W_n par:

$$\phi_U : z \in U \to \{z^\alpha\} \in C^n \qquad (\alpha = 1, \cdots, n) .$$

Nous posons $z^{\bar\alpha} = \bar z^\alpha$ ($\bar\alpha = n+1, \cdots, 2n$) et désignons par $\{z^k\}$ ($k = 1, \cdots, 2n$) l'ensemble des $2n$ nombres complexes $\{z^\alpha, z^{\bar\alpha}\}$. Dans l'intersection $U \cap V$ des domaines de deux systèmes de coordonnées complexes, les coordonnées complexes $\{z^\alpha\}$ de z considéré comme appartenant à U, sont des fonctions

Communicated July 24, 1967.

holomorphes, à jacobien $\mathscr{J}^U_V$ non nul, des coordonnées complexes $\{z^{\lambda'}\}$ du même point z considéré comme appartenant à V. La structure complexe munit W_n d'une orientation naturelle.

On sait que la structure complexe de W_n détermine en chaque point z de la variété une structure complexe de l'espace vectoriel tangent T_z qui peut être définie soit par un sous-espace complexe convenable S^c_z, de dimension complexe n, du complexifié T^c_z de $T_z(S^c_z \cap \bar{S}^c_z = 0)$, soit par l'opérateur J_z, de carré—Id, défini de la maniè re suivante: si v de composantes v^α, $v^{\bar\alpha}$ appartient à T^c_z, on a:

$$(J_z v)^\alpha = iv^\alpha, \qquad (J_z v)^{\bar\alpha} = -iv^{\bar\alpha}.$$

Le champ J des opérateurs J_z définit la structure "presque complexe" de W_n déterminée par sa strutcture complexe; S^c_z et $\bar{S}^c_z$ sont les deux sous espaces propres de J_z et

$$T^c_z = S^c_z \oplus \bar{S}^c_z \,. \tag{1.1}$$

b) L'existence de cette décomposition—ou si l'on préfère celle d'indices de deux espèces—conduit à la *notion de type* pour un tenseur et pour un opérateur.

Nous appelons *p-forme* une forme différentielle extérieure à valeurs complexes de degré p. Par abréviation, nous appelons *p-tenseur* un tenseur *contravariant antisymétrique* complexe d'ordre p.

Soit d l'opérateur de différentiation extérieure sur les formes. Nous posons ici $d = d' + d''$, où d' est de type $(1, 0)$ et d'' de type $(0, 1)$. De $d^2 = 0$, on déduit par considération des types:

$$d'^2 = 0 \,, \qquad d''^2 = 0 \,, \qquad d'd'' + d''d' = 0 \,. \tag{1.2}$$

Une p-forme holomorphe est une p-forme β de type $(p, 0)$ telle que $d''\beta = 0$. Il est équivalent de dire que c'est une forme de type $(p, 0)$ qui, pour tout voisinage U de coordonnées locales complexes, a pour coefficients des fonctions holomorphes dans U des z^α.

Un *p-tenseur holomorphe* est un p-tenseur A de type $(p, 0)$ qui, pour tout voisinage U de coordonnées locales complexes, a pour composantes des fonctions holomorphes dans U des z^α.

c) Une *transformation holomorphe* de W_n est une transformation de W_n laissant invariante sa structure complexe, ou—ce qui est équivalent—laissant J invariant. Une transformation infinitésimale (t.i.) définie par un champ de vecteurs X est *une t.i. holomorphe* si:

$$\mathscr{L}(X)J = 0 \tag{1.3}$$

où $\mathscr{L}(X)$ est l'opérateur de transformation infinitésimale (ou de dérivation de Lie). En coordonnées locales complexes, (1.3) s'écrit:

(1.3′) $$\partial_{\bar\beta} X^\alpha = 0\,, \qquad \left(\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha},\ \partial_{\bar\beta} = \frac{\partial}{\partial z^{\bar\beta}}\right).$$

(1.3′) exprime que $X^{(1,0)}$, partie de type (1, 0) de X, est un 1-tenseur ou *vecteur holomorphe*. Si X définit une t.i. holomorphe, il en est de même pour JX et l'on a:

(1.4) $$[JX, Y] = [X, JY] = J[X, Y]\,.$$

Dans la suite W_n est suposée compacte.

Soit G le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de W_n compacte. Bochner et Montgomery ont établi que G est un groupe de Lie complexe opérant sur W_n de manière analytique complexe ou holomorphe. L'algèbre de Lie de G peut être identifié *à l'algèbre L_h des transformations infinitésimales holomorphes*. D'après (1.4), J définit sur L_h une structure d'algèbre de Lie complexe et celle-ci correspond à la structure complexe de G.

2. L'ideal I de L_h

a) Si h est une 1-forme holomorphe de W_n, X un élément de L_h, le scalaire $X^\alpha h_\alpha$ est holomorphe sur la variété compacte W_n. Par suite:

(2.1) $$i(X)h = X^\alpha h_\alpha = \text{const.}$$

où $i(X)$ désigne l'opérateur de produit intérieur par X.

Soit $H^{(1)}$ l'espace vectoriel complexe des 1-*formes holomorphes fermées*. On sait que toute forme $h \in H^{(1)}$ à périodes imaginaires pures est nécessairement nulle. Si $b_p(W_n)$ désigne le p^e = nombre de Betti de la variété, on a donc $\dim_R H^{(1)} \leqslant b_1(W_n)$. Nous désignons par $H^{(1)}_0$ le sous-espace de $H^{(1)}$ défini par les éléments h de $H^{(1)}$ tels que $i(X)h = 0$ pour tout $X \in L_h$.

b) Soit I l'espace vectoriel complexe défini par les $X \in L_h$ tels que:

$$i(X)h = 0 \qquad \text{pour tout } h \in H^{(1)}.$$

Si X, $Y \in L_h$ considérons le crochet $Z = [X, Y]$ et le produit:

$$i(Z)h = Z^\alpha h_\alpha = X^\beta \partial_\beta Y^\alpha h_\alpha - Y^\beta \partial_\beta X^\alpha h_\alpha$$

soit:

$$i(Z)h = X^\beta \partial_\beta (Y^\alpha h_\alpha) - Y^\beta \partial_\beta (X^\alpha h_\alpha) - X^\alpha Y^\beta (\partial_\alpha h_\beta - \partial_\beta h_\alpha) = 0\,.$$

Ainsi si $L'_h = [L_h, L_h]$ est l'idéal dérivé de L_h, on a $L'_h \subset I$ et I est un idéal de L_h tel que L_h/I soit abélien [9].

La forme bilinéaire $i(X)h$ (où $X \in L_h$, $h \in H^{(1)}$) met en dualité les espaces vectoriels L_h/I et $H^{(1)}/H^{(1)}_0$. Par suite:

$$\dim_C L_h - \dim_C I = \dim_C H^{(1)} - \dim_C H_0^{(1)}.$$

3. Variétés Kähleriennes

a) Dans toute la suite, nous supposons que la variété compacte W_n considérée admet une *métrique kählérienne* qui s'écrit localement

$$ds^2 = 2g_{\alpha\bar\beta}dz^\alpha dz^{\bar\beta} \tag{3.1}$$

la 2-forme (réelle) fondamentale associée étant:

$$F = ig_{\alpha\bar\beta}dz^\alpha \wedge dz^{\bar\beta}. \tag{3.2}$$

Pour que la métrique hermitienne (3.1) soit kählérienne, il faut et il suffit que la 2-forme F soit *fermée*. Elle est alors à dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne définie par la métrique [8]. En coordonnées locales complexes, les seuls coefficients non nécessairement nuls de cette connexion sont ceux de types purs:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,, \qquad \Gamma^{\bar\alpha}_{\bar\beta\bar\gamma} = \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\,.$$

Soit A un *p-tenseur* de type $(p, 0)$. A un tel p-tenseur correspond de manière naturelle, par dualité définie par la métrique et conjugaison, une p-forme notée $\alpha(A)$ de type $(p, 0)$ avec:

$$\overline{(\alpha(A))}_{\bar\rho_1\cdots\bar\rho_p} = g_{\bar\rho_1\sigma_1}\cdots g_{\bar\rho_p\sigma_p}A^{\sigma_1\cdots\sigma_p}\,.$$

Inversement toute forme de type $(p, 0)$ est l'image par α d'un p-tenseur de type $(p, 0)$.

Nous notons (α, β) le produit intérieur de deux p-formes considéré comme une fonction du point $z \in W_n$, par $<\alpha, \beta>$ le produit scalaire global

$$<\alpha, \beta> = \int_{W_h} (\alpha, \beta)\eta\,,$$

où η est la forme élément de volume définie par la métrique et l'orientation de W_n.

b) Soit δ l'opérateur de codifférentiation sur les formes qui s'exprime immédiatement, au signe près, par la dérivation covariante contractée. On pose $\delta = \delta' + \delta''$, où δ' est de type $(-1, 0)$, et δ'' de type $(0, -1)$. De $\delta^2 = 0$, on déduit encore:

$$\delta'^2 = 0\,, \qquad \delta''^2 = 0\,, \qquad \delta'\delta'' + \delta''\delta' = 0\,. \tag{3.3}$$

On sait que δ est transposé de d par le produit scalaire introduit. De même δ' est transposé de d' et δ'' de d'', ce qui se traduit par les relations:

$$<d'\alpha, \beta> = <\alpha, \delta'\beta> , \qquad <d''\alpha, \beta> = <\alpha, \delta''\beta> .$$

Le laplacien $\Delta = d\delta + \delta d$ de G. de Rham sur les formes admet aussi, sur une variété kählerienne les expressions:

$$(3.4) \qquad \Delta = 2(d'\delta' + \delta'd') = 2(d''\delta'' + \delta''d'') .$$

Soit enfin M l'opérateur linéaire sur les formes défini sur les formes de type (p, q) par la relation:

$$M\alpha_{p,q} = (p - q)i\alpha_{p,q} .$$

On établit [8] que cet opérateur satisfait aux relations de commutation:

$$(3.5) \quad \delta M - M\delta = d\Lambda - \Lambda d , \quad dM - Md = -[\delta L - L\delta] = -i(d' - d'') ,$$

où L (resp. Λ) sont les opérateurs de produit extérieur (resp. intérieur) pour la forme F. Il en résulte aisément que Δ commute avec les opérateurs L et Λ.

c) Soit $H^{(p)}$ l'espace complexe des *p-formes holomorphes* de W_n; nous désignons par $b_{p,0}(W_n)$ sa dimension complexe.

Si $\beta \in H^{(p)}$, elle vérifie $d'' \beta = 0$ et aussi $\delta'' \beta = 0$ pour une raison de type; β est par suite harmonique au sens de Δ d'après (3.4), donc fermée ($d\beta = 0$) et cofermée ($\delta\beta = 0$). Ainsi sur une variété kählerienne, toute p-forme holomorphe est fermée et même harmonique.

Il en est en particulier ainsi pour les 1-formes holomorphes qui sont intervenues au §2. On voit de plus que $b_1(W_n) = 2\, b_{1,0}(W_n)$.

d) Soit A un p-tenseur holomorphe sur W_n. On a:

$$(3.6) \qquad \partial_{\bar\beta} A^{\rho_1 \cdots \rho_p} = \nabla_{\bar\beta} A^{\rho_1 \cdots \rho_p} = 0 ,$$

où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemanienne. Par passage à la forme $\alpha(A)$, les relations (3.6) se traduisent par:

$$(3.7) \qquad \nabla_{\beta}\alpha(A)_{\bar\rho_1 \cdots \bar\rho_p} = 0 .$$

Par antisymétrisation de (3.7), on voit que $\alpha(A)$ est nécessairement d'-fermée ($d'\alpha(A) = 0$). On sait que d' (ou d'') définit une cohomologie localement triviale. Du théorème de décomposition de Hodge—de Rham il résulte que l'on peut décomposer $\alpha(A)$, d'-fermée, selon:

$$(3.8) \qquad \alpha(A) = d'\beta + H\alpha(A) ,$$

où β est une (p-1)-forme et où $H\alpha(A)$ est une p-forme holomorphe. Le scalaire holomorphe défini par le produit intérieur $(\alpha(A), H\alpha(A))$ est une constante et nous posons:

(3.9) $$k(A) = (\alpha(A), H\alpha(A)) \ .$$

On a par orthogonalité:

(3.10) $$<H\alpha(A), H\alpha(A)> = <\alpha(A), H\alpha(A)> = k(A) \int_{W_n} \eta \ .$$

Ainsi pour que $k(A) = 0$, il faut et il suffit que $H\alpha(A) = 0$ c'est-à-dire que $\alpha(A)$ soit *d'-cohomologue à zéro*.

Considérons en particulier le cas $p = 1$, c'est-à-dire le cas des t.i. holomorphes X. Nous pouvons les définir à partir des 1-formes $\xi = \alpha(X^{(1,0)})$, de type $(1, 0)$, vérifiant $\nabla_{\bar\beta}\xi_\alpha = 0$. La décomposition (3.8) s'écrit dans ce cas

(3.11) $$\xi = d'\rho + H\xi \ ,$$

où ρ est un scalaire complexe. Pour que $X \in I$, il faut et il suffit que $k(X^{(1,0)}) = i(X)H\xi = 0$, c'est-à-dire que ξ vérifie $\nabla_{\bar\beta}\xi_\alpha = 0$ et soit d' cohomologue à zéro [9].

4. Caractère positif ou nul d'une classe de cohomoloqie de type (1.1)

a) Soit γ une 2-forme réelle de type $(1, 1)$. A cette 2-forme qui s'écrit localement

$$\gamma = \gamma_{\alpha\bar\beta} dz^\alpha \wedge dz^{\bar\beta}$$

associons la forme hermitienne c de composantes

$$c_{\alpha\bar\beta} = -i\gamma_{\alpha\bar\beta} \ .$$

En particulier à la 2-forme F de W_n se trouve ainsi associée la métrique de W_n. Nous écrirons $\gamma \geqslant 0$ (resp $\leqslant 0$) si la forme hermitienne c associée à γ est positive ou nulle (resp. négative ou nulle) aux différents points de W_n.

b) Supposons γ fermée et notons $[\gamma]$ sa classe de cohomologie réelle. D'après la classique décomposition en classes primitives par rapport à la classe fondamentale $[F]$, on a:

(4.1) $$[\gamma] = a[F] + [\beta] \qquad (\Lambda[\beta] = 0)$$

(où a est une constante réelle) ou en termes de formes:

(4.2) $$\gamma = aF + \beta + d\mu$$

avec $\Lambda\beta = 0$ et μ, 1-forme. Par produit par Λ, il vient:

$$\Lambda\gamma = an + \Lambda d\mu \ .$$

Mais d'après (3.5)

$$d\Lambda\mu - \Lambda d\mu = \delta M\mu - M\delta\mu$$

où $d\Lambda\mu = M\delta\mu = 0$ pour des raisons de degré. Ainsi:

$$\Lambda\gamma = an - \delta M\mu \; .$$

Par intégration sur W_n, il vient:

$$an\int_{W_n} \eta = \int_{W_n} (\Lambda\gamma)\eta \; . \tag{4.3}$$

Si γ, non identiquement nulle, est $\geqslant 0$, $\Lambda\gamma$ est $\geqslant 0$ et non identiquement nul. On a donc $a > 0$ et, d'après (4.1), la classe $[\gamma]$ de la forme envisagée est certainement $\neq 0$. Il en résulte qu'une classe de cohomologie non nulle de type (1, 1) ne peut contenir simultanément une forme $\geqslant 0$ et une forme $\leqslant 0$.

Nous dirons qu'*une classe de type (1, 1) est* $\geqslant$ *0* (resp $\leqslant 0$) si elle contient une forme fermée $\geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$). Une classe à la fois $\geqslant 0$ et $\leqslant 0$ est certainement nulle.

c) Nous notons $c_1(W_n)$ la première classe de Chern c'est-à-dire celle de degré 2—de la variété W_n. Soit R le tenseur de Ricci de la variété, dont nous désignons par $R_{\alpha\beta}$ les composantes en coordonnées locales complexes dans un domaine U. Si g_U désigne le descriminant dans U de la métrique:

$$R_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \partial_\beta \log \sqrt{g_U} \; \cdot \tag{4.4}$$

On sait que $c_1(W_n)$ peut être définie par une 2-forme réelle fermée τ, à périodes entières, qui ne diffère de la 2-forme associée à R que par un facteur de normalisation. Plus précisément sur U:

$$\tau = (2\pi)^{-1} i R_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta . \tag{4.5}$$

Nous nous intéressons ici aux cas où $c_1(W_n) \geqslant 0$ *et* $c_1(W_n) \leqslant 0$, *c'est-à-dire au cas où la classe de cohomologie réelle définie par* $c_1(W_n)$ *est positive ou nulle, ou bien négative ou nulle.* Il en est ainsi pour un certain nombre de variétés algébriques intéressantes.

Les cas où $c_1(W_n)$ contient une forme partout définie positive ou définie négative ont été étudiés par de nombreux auteurs, en particulier Kodaira, Nakano, Andreotti et S. Kobayashi [4], [5]. Une fraction notable de leurs résultats se laisse généraliser de manière convenable aux hypothèses faites ici.

5. Interprétation de $c_1(W_n) = 0$

a) Rappelons à quelle condition une 2-forme réelle fermée γ de type (1,1) est homologue à 0. Il existe alors une 1-forme réelle λ telle que:

$$\gamma = d\lambda .$$

Posons, par décomposition selon les types:

$$\lambda = \lambda_{(1,0)} + \lambda_{(0,1)}$$

oú, d'après la réalité de λ, on a: $\bar{\lambda}_{(1,0)} = \lambda_{(0,1)}$. Pour $d\lambda$, on obtient:

$$d\lambda = d'\lambda_{(1,0)} + (d''\lambda_{(1,0)} + d'\lambda_{(0,1)}) + d''\lambda_{(0,1)} .$$

Pour que $\gamma = d\lambda$ soit de type (1, 1), il faut et il suffit que $d'\lambda_{(1,0)} = 0$; $\lambda_{(1,0)}$ étant d'-fermée peut s'écrire:

$$\lambda_{(1,0)} = d'\rho + h ,$$

où h est une 1-forme holomorphe ($d''h = 0$) et ρ un scalaire complexe. On en déduit:

$$d\lambda = d''d'\rho + d'd''\bar{\rho} = d'd''(\bar{\rho} - \rho) . \tag{5.1}$$

Posons $\bar{\rho} - \rho = i\varphi$, où φ est un scalaire réel. Il résulte de (5.1) que si γ de type (1, 1) est homologue à 0, il existe un scalaire réel φ tel que:

$$\gamma = id'd''\varphi . \tag{5.2}$$

Nous introduisons dans la suite le scalaire positif $f = \exp \varphi$ et écrivons (5.2) sous la forme:

$$\gamma = id'd'' \log f \qquad (f > 0) . \tag{5.3}$$

Inversement à tout scalaire strictement positif f, (5.3) fait correspondre une 2-forme réelle γ de type (1, 1) homologue à 0. Si c est la forme hermitienne associée à γ, on a en coordonnées locales:

$$c_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \log f \qquad (f > 0) \tag{5.4}$$

ou indifféremment:

$$c_{\alpha\bar{\beta}} = \nabla_\alpha \nabla_{\bar{\beta}} \log f .$$

b) Supposons que $c_1(W_n) = 0$. De l'étude précédente, il résulte que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe un scalaire positif f tel que:

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \log f . \tag{5.5}$$

Nous sommes ainsi conduits à attacher à chaque domaine U de coordonnées locales complexes le scalaire local strictement positif $k_U = f\sqrt{g_U}$ qui d'après (4.4) et (5.5) vérifie:

$$\partial_\alpha \partial_{\bar\beta} \log k_U = \partial_\alpha \partial_{\bar\beta} \log f + \partial_\alpha \partial_{\bar\beta} \log \sqrt{g_U} = 0 \tag{5.6}$$

De (5.6) on déduit immédiatement qu'il existe une function holomorphe locale a_U telle que:

$$k_U = a_U(z)\, \overline{a_U(z)}\ ;$$

k_U étant strictement positif, a_U ne saurait s'annuler sur U.

Les k_U correspondant aux différents domaines de coordonnées locales définissent sur W_n *la densité scalaire* (ou *noyau*) k associée à la 2n-forme $f\eta$. Soit V un domaine tel que $U \cap V$ soit connexe, $\mathscr{J}^U_V(z)$ le jacobien correspondant à U et V. Si k_V est la composante de k relative au domaine V, on a d'après la définition des densités scalaires, sur $U \cap V$,

$$k_V = \mathscr{J}^U_V \overline{\mathscr{J}^U_V} k_U\,.$$

Il vient ainsi:

$$a_V(z)\, \overline{a_V(z)} = \mathscr{J}^U_V(z)\, \overline{\mathscr{J}^U_V(z)}\, a_U(z)\, \overline{a_U(z)} \qquad (z \in U \cap V)\,.$$

Il en résulte que les quantités

$$C^U_V = \frac{a_V(z)}{\mathscr{J}^U_V(z)\, a_U(z)} = \frac{\overline{\mathscr{J}^U_V(z)}\, \overline{a_U(z)}}{\overline{a_V(z)}} \tag{5.7}$$

sont sur $U \cap V$ des constantes $\neq 0$. On a donc:

$$a_V(z) = C^U_V\, \mathscr{J}^U_V(z)\, a_U(z)$$

avec $C^U_V \overline{C^U_V} = 1$. Il existe donc des constantes réelles φ^U_V telles que:

$$a_V(z) = e^{i\varphi^U_V}\, \mathscr{J}^U_V(z)\, a_U(z) \qquad (z \in U \cap V)\,. \tag{5.8}$$

Soit W un troisième domaine de coordonnées locales tel que $U \cap W$ et $V \cap W$ soient connexes. On a

$$a_W(z) = e^{i\varphi^V_W} \mathscr{J}^V_W(z)\, a_V(z) \qquad (z \in V \cap W)\,.$$

Si $z \in U \cap V \cap W$, on a donc:

$$a_W(z) = e^{i(\varphi^U_V + \varphi^V_W)}\, \mathscr{J}^U_V(z)\, \mathscr{J}^V_W(z)\, a_U(z)\,.$$

Il en résulte que les constantes introduites vérifient:

$$\varphi^U_W \equiv \varphi^U_V + \varphi^V_W \qquad (\mathrm{mod.}\ 2\pi)\,. \tag{5.9}$$

c) Soit $(\tilde{W}_n, p)$ le revêtement universel de W_n. Nous munissons $\tilde{W}_n$ des éléments images réciproques par p de ceux introduits sur W_n. Introduisons un recouvrement de $\tilde{W}_n$ par des domaines $\tilde{U}$, $\tilde{V}$, $\tilde{W}$, etc. . . . tels que l'intersection de deux domaines soit connexe. Soit $\varphi_{\tilde{U}}$ une constante réelle attachée au domaine $\tilde{U}$. On en déduit pour un domaine $\tilde{V}$ tel que $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \phi$ une constante $\varphi_{\tilde{V}}$ définie par:

$$\varphi^{\tilde{U}}_{\tilde{V}} \equiv \varphi_{\tilde{U}} - \varphi_{\tilde{V}} \qquad (\mathrm{mod.}\ 2\pi)\,.$$

Si $\tilde{U} \cap \tilde{V} \cap \tilde{W} \neq \phi$, il y a cohérence d'après l'analogue de (5.9), puisque:

$$\varphi^{\tilde{V}}_{\tilde{W}} \equiv \varphi^{\tilde{U}}_{\tilde{W}} - \varphi^{\tilde{U}}_{\tilde{V}} \equiv (\varphi_{\tilde{U}} - \varphi_{\tilde{W}}) - (\varphi_{\tilde{U}} - \varphi_{\tilde{V}}) \equiv \varphi_{\tilde{V}} - \varphi_{\tilde{W}}\,. \qquad (\mathrm{mod.}\ 2\pi)\,.$$

Ces constantes modulo 2π étant ainsi choisies pour le recouvrement envisagé de $\tilde{W}_n$, on a

$$e^{i\varphi_{\tilde{V}}}\, \tilde{a}_{\tilde{V}}(\tilde{z}) = \mathscr{J}^{\tilde{U}}_{\tilde{V}}(\tilde{z})\, e^{i\varphi_{\tilde{U}}}\, \tilde{a}_{\tilde{U}}(\tilde{z})\,. \tag{5.10}$$

(5.10) exprime que les quantités $e^{i\varphi_{\tilde{U}}}\tilde{a}_{\tilde{U}}(\tilde{z})$ sont les composantes sur $\tilde{W}_n$ d'une n-forme holomorphe $\tilde{\alpha}$, partout différente de zéro. Si s est un actomorphisme de $\tilde{W}_n$ correspondent à un élément du groupe fondamental $\pi_1(W_n)$, on a

$$s^*\tilde{\alpha} = e^{i\varphi(s)}\,\tilde{\alpha} \tag{5.11}$$

où $\varphi(s)$ est une constante réelle, définie modulo 2π.

Anisi *si* $c_1(W_n) = 0$, *il existe sur* $\tilde{W}_n$ *une n-forme holomorphe* $\tilde{\alpha}$ *partout* $\neq 0$, *vérifiant* (5.11).

Un recouvrement satisfaisant à la condition énoncée peut, par exemple, étre construit au moyen de "voisinages convexes" (voir Kobayashi—Nomizu ([5], p 166) pour la structure riemannienne envisagée.

d) Inversement *supposant qu'il existe sur* $\tilde{W}_n$ *une n-forme holomorphe* $\tilde{\alpha}$ *partout* $\neq 0$, *vérifiant* (5.11), pour chaque élément de $\pi_1(W_n)$. La 2n-forme $\tilde{K} = \tilde{\alpha} \wedge \bar{\tilde{\alpha}}$, partout $\neq 0$, de $\tilde{W}_n$ satisfait

$$s^*\tilde{K} = \tilde{K}\,.$$

Cette forme définit donc une 2n-forme de W_n dont le noyan k qui peut s'écrire localement $k = \tilde{a}\,\bar{\tilde{a}}$ vérifie:

$$-\,(2\pi)^{-1} i\,\partial_\alpha \partial_{\bar\beta} \log k_U = 0\,.$$

Le premier membre définit une 2-forme de la classe de Chern. Il en résulte que $c_1(W_n) = 0$. Nous pouvons énoncer

Théorèm. *Pour que la première classe de Chern $c_1(W_n)$ d'une variété kählerienne compacte W_n soit nulle, il faut et il suffit qu'il existe sur le revêtement universel $\tilde{W}_n$ une n-forme holomorphe $\tilde{\alpha}$ partout différente de* 0 *et vérifiant* (5.11) *pour tout élément de* $\pi_1(W_n)$.

6. Sous-algèbre de L_h laissant invariante une $2n$-forme $\geqslant 0$

Donnons-nous sur W_n, kählerienne compacte, une 2n-forme non nulle

$$K = f\eta \qquad (f \geqslant 0) \tag{6.1}$$

où f est un scalaire $\geqslant 0$. Par abus de langage, nous dirons que *la 2n-forme K est supposée $\geqslant 0$.*

A K est canoniquement associée un noyau k dont la composante relative à un domaine U est:

$$k_U = f\sqrt{g_U} \geqslant 0\,. \tag{6.2}$$

a) Soit L_h l'algèbre complexe de toutes les t-i holomorphes de W_n, L une sous algèbre complexe de L_h. Nous nous proposons d'exprimer que L laisse invariante la forme K ou—ce qui est équivalent—le noyau k [11].

La relation $\mathscr{L}(X)k = 0$ x'exprime localement, sur un domaine U, par:

$$(X^\alpha\partial_\alpha k_U + \partial_\alpha X^\alpha k_U) + (X^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha} k_U + \partial_{\bar\alpha} X^{\bar\alpha} k_U) = 0\,.$$

De meme $\mathscr{L}(JX)k = 0$ s'écrit:

$$i(X^\alpha\partial_\alpha k_U + \partial_\alpha X^\alpha k_U) - i(X^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha} k_U + \partial_{\bar\alpha} X^{\bar\alpha} k_U) = 0\,.$$

Ainsi pour que X et JX laissent k invariant, il faut et il suffit que:

$$X^\alpha\partial_\alpha k_U + \partial_\alpha X^\alpha k_U = 0\,. \tag{6.3}$$

D'après (6.2) la relation précédente peut s'écrire:

$$X^\alpha(\partial_\alpha f\sqrt{g_U} + f\partial_\alpha\sqrt{g_U}) + \partial_\alpha X^\alpha f\sqrt{g_U} = 0$$

soit:

$$f\left(\partial_\alpha X^\alpha + \frac{\partial_\lambda\sqrt{g_U}}{\sqrt{g_U}}X^\lambda\right) + X^\alpha\partial_\alpha f = 0\,. \tag{6.4}$$

Or, d'après des formules classiques de géométrie kählérienne [8]:

$$\nabla_\alpha X^\alpha = \partial_\alpha X^\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} X^\lambda = \partial_\alpha X^\alpha + \frac{\partial_\lambda \sqrt{g_U}}{\sqrt{g_U}} X^\lambda .$$

(6.4) peut ainsi s'écrire

$$f \nabla_\alpha X^\alpha + X^\alpha \nabla_\alpha f = 0$$

c'est-à-dire

(6.5) $$\nabla_\alpha (f X^\alpha) = 0 .$$

Si $\xi = \alpha(X^{(1,0)})$ est la 1-forme de type $(1, 0)$ associée à $X^{(1,0)}$, la relation (6.5) est équivalente à

(6.6) $$\delta'(f\xi) = 0 .$$

Ainsi *pour que L laisse K invariante, il faut et il suffit que la 1-forme $\xi = \alpha(X^{(1,0)})$ associée à tout élément X de L vérifie la relation (6.6).*

b) Si $X \in L$, la 1-forme d'-fermée ξ peut s'écrire:

(6.7) $$\xi = d'\rho + H\xi .$$

Si $X \in L \cap I$, ξ est d'-homologue à 0:

(6.8) $$\xi = d'\rho .$$

ξ vérifiant (6.6), on a:

(6.9) $$< f d'\rho, d'\rho > = < \delta'(f d'\rho), \rho > = 0$$

et par suite, f étant $\geqslant 0$, $f d'\rho = 0$. Soit V un domaine de W_n sur lequel f ne s'annule pas; $d'\rho = \xi$, donc le champ de vecteurs X correspondant, sont identiquement nuls sur V. Par analyticité, X est identiquement nul sur W_n et $L \cap I = 0$.

En particulier $[L, L]$ *qui est contenu dans $L \cap I$ est nul.*

Considérons l'application linéaire de l'espace vectoriel complexe L dans l'espace vectoriel complexe $H^{(1)}$ des 1-formes holomorphes définie par:

$$X \in L \to H\xi = H\alpha(X^{(1,0)}) \in H^{(1)} .$$

Cette application est injective puisque son noyau est $L \cap I = 0$. Il en résulte:

$$dim_C L \leqslant dim_C H^{(1)} = b_{1,0}(W_n) .$$

Lemme 1. *Toute sous-algèbre complexe L de L_h qui laisse invariante une 2n-forme $K \geqslant 0$ est abélienne et:*

(6.10) $$dim_C L \leqslant b_{1,0}(W_n) .$$

c) Soit T^p l'espace complexe des p-tenseurs holomorphes sur W_n. La situation précédente et les travaux de Kodaira nous conduisent à introduire le sous-espace $U^p(f)$ de T^p défini par les p-tenseurs holomorphes A vérifiant la condition:

$$\delta' \{f\alpha(A)\} = 0 \tag{6.11}$$

où f est un scalaire $\geqslant 0$ ([6]).

Si $A \in U^p(f)$ *et si* $k(A) = 0$, on sait que $H\alpha(A) = 0$ et on déduit de (6.11) par un raisonnement identique à celui du lemme 1 que $A = 0$. L'application linéaire de l'espace vectoriel complexe $U^p(f)$ dans l'espace vectoriel complexe $H^{(p)}$ des p-formes holomorphes définie par:

$$A \in U^p(f) \to H\alpha(A) \in H^{(p)}$$

est injective. Ainsi:

Lemme 2. *Pour tout* $f \geqslant 0$, *tout élément* A *de* $U^p(f)$ *qui vérifie* $k(A) = 0$ *est identiquement nul et*

$$dim_C\, U^p(f) \leqslant b_{p,0}(W_n)\,. \tag{6.12}$$

On notera qu'il résulte de ce lemme qu'*un élément* A *de* $U^p(f)$ *ne peut s'annuler sans être identiquement nul.* En effet si A s'annule en un point de W_n, $k(A) = 0$.

7. Invariance par L des éléments de $U^p(f)$

a) Soit X une t. i. holomorphe et soit A un p-tenseur holomorphe. Le transformé infinitésimal de A par X est le tenseur de type (p, 0) défini, sur un domaine U de coordonnées locales complexes, par:

$$\{\mathscr{L}(X)A\}^{\rho_1\cdots\rho_p} = X^\lambda \partial_\lambda A^{\rho_1\cdots\rho_p} - \sum_{i=1}^{p} \partial_\lambda X^{\rho_i} A^{\rho_1\cdots\lambda\cdots\rho_p}\,. \tag{7.1}$$

Les composantes de X et de A étant des fonctions holomorphes sur U, il en est de même des composantes du p-tenseur $\mathscr{L}(X)A$. Ainsi *si* $A \in T^p$, $X \in L_h$ *on a* $\mathscr{L}(X)A \in T^p$.

En introduisant des dérivées covariantes, (7.1) peut s'écrire:

$$\{\mathscr{L}(X)A\}^{\rho_1\cdots\rho_p} = X^\lambda \nabla_\lambda A^{\rho_1\cdots\rho_p} - \sum_{i=1}^{p} \nabla_\lambda X^{\rho_i} A^{\rho_1\cdots\lambda\cdots\rho_p}$$

ou comme on le vérifie immédiatement:

(7.2) $$\{\mathscr{L}(X)A\}^{\rho_1\cdots\rho_p} = X^\lambda \nabla_\lambda A^{\rho_1\cdots\rho_p} - \frac{1}{(p-1)!}\varepsilon^{\rho_1\cdots\rho_p}_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p}\nabla_\lambda X^\sigma A^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p}$$

où ε est le tenseur-indicateur de Kronecker.

b) Supposons maintenant que $A \in U^p(f)$, c'est-à-dire vérifie en outre:

$$\delta'\{f\alpha(A)\} = 0 .$$

Cette relation peut s'écrire sur le domaine U:

(7.3) $$\nabla_\lambda(fA^{\lambda\rho_2\cdots\rho_p}) = 0 .$$

En explicitant la dérivation covariante, il vient sur U:

$$\nabla_\lambda(fA^{\lambda\rho_2\cdots\rho_p}) = \partial_\lambda(fA^{\lambda\rho_2\cdots\rho_p}) + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}A^{\sigma\rho_2\cdots\rho_p} = \partial_\lambda(fA^{\lambda\rho_2\cdots\rho_p}) + \frac{\partial_\lambda\sqrt{g_U}}{\sqrt{g_U}}A^{\lambda\rho_2\cdots\rho_p} .$$

Il en résulte, par produit par $\sqrt{g_U}$, que (7.3) peut s'écrire:

$$\partial_\lambda(A^{\lambda\rho_2\cdots\rho_p}f\sqrt{g_U}) = 0$$

ou si l'on introduit le noyau k de composantes $k_U = f\sqrt{g_U}$:

(7.4) $$\partial_\lambda(A^{\lambda\rho_2\cdots\rho_p}k_U) = 0 .$$

Soit $X \in L$ laissant $K = f\eta$ invariante; $\mathscr{L}(X)$ commute avec ∂_λ et annule k; par produit de (7.4) par $\mathscr{L}(X)$ on a ainsi:

$$\partial_\lambda\{(\mathscr{L}(X)A)^{\lambda\rho_2\cdots\rho_p}k_U\} = 0 .$$

qui exprime que *$\mathscr{L}(X)A$ appartient à $U^p(f)$.*

c) Soit β une p-forme holomorphe sur W_n. Nous nous proposons d'abord d'obtenir une expression commode pour:

$$(\alpha(\mathscr{L}(X)A), \beta) = \frac{1}{p!}\{\mathscr{L}(X)A\}^{\rho_1\cdots\rho_p}\beta_{\rho_1\cdots\rho_p} .$$

D'après (7.2), il vient:

$$(\alpha(\mathscr{L}(X)A), \beta) = \frac{1}{p!}X^\lambda\nabla_\lambda(A^{\rho_1\cdots\rho_p}\beta_{\rho_1\cdots\rho_p}) - \frac{1}{p!}X^\lambda A^{\rho_1\cdots\rho_p}\nabla_\lambda\beta_{\rho_1\cdots\rho_p}$$
$$- \frac{1}{(p-1)!}\nabla_\lambda X^\sigma A^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p}\beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p} .$$

Le premier terme du second membre étant nul, on peut écrire:

$$(\alpha(\mathscr{L}(X)A),\beta) = -\frac{1}{(p-1)!}A^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p}\nabla_\lambda(X^\sigma\beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p})$$
$$+\frac{1}{(p-1)!}A^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p}X^\sigma\nabla_\lambda\beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p} - \frac{1}{p!}X^\lambda A^{\rho_1\cdots\rho_p}\nabla_\lambda\beta_{\rho_1\cdots\rho_p}\,.$$

Soit en modifiant le nom des indices:

$$(7.5)\qquad (\alpha(\mathscr{L}(X)A),\beta) = -\frac{1}{(p-1)!}A^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p}\nabla_\lambda(X^\sigma\beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p})$$
$$+\frac{1}{p!}X^\lambda[pA^{\sigma\tau_2\cdots\tau_p}\nabla_\sigma\beta_{\lambda\tau_2\cdots\tau_p} - A^{\rho_1\cdots\rho_p}\nabla_\lambda\beta_{\rho_1\cdots\rho_p}]\,.$$

La forme holomorphe β étant d'-fermée, on a:

$$\frac{1}{p!}\varepsilon^{\lambda\rho_1\cdots\rho_p}_{\sigma_0\cdots\sigma_p}\nabla_\lambda\beta_{\rho_1\cdots\rho_p} = 0\,.$$

En effectuant le produit contracté par $A^{\sigma_1\cdots\sigma_p}$ et distinguant les termes correspondant à $\lambda = \sigma_0$ ou $\lambda = \sigma_1, \cdots, \sigma_p$, il vient:

$$A^{\sigma_1\cdots\sigma_p}(\nabla_{\sigma_0}\beta_{\sigma_1\cdots\sigma_p} - p\nabla_{\sigma_1}\beta_{\sigma_0\sigma_2\cdots\sigma_p}) = 0\,.$$

ce qui peut s'écrire:

$$A^{\sigma_1\cdots\sigma_p}\nabla_{\sigma_0}\beta_{\sigma_1\cdots\sigma_p} - pA^{\sigma\tau_2\cdots\tau_p}\nabla_\sigma\beta_{\sigma_0\tau_2\cdots\tau_p} = 0\,.$$

Le dernier terme du second membre de (7.5) est donc nul et l'on a:

$$(7.6)\qquad (\alpha(\mathscr{L}(X)A),\beta) = -\frac{1}{(p-1)!}A^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p}\nabla_\lambda(X^\sigma\beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p})\,.$$

Par produit par f il vient:

$$(f\alpha(\mathscr{L}(X)A),\beta) = -\frac{1}{(p-1)!}fA^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p}\nabla_\lambda(X^\sigma\beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p})\,.$$

Mais A appartenant à $U^p(f)$ vérifie (7.3). Par suite:

$$(f\alpha\mathscr{L}(X)A,\beta) = -\frac{1}{(p-1)!}\nabla_\lambda(fA^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p}X^\sigma\beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p})\,.$$

Par intégration sur W_n, on obtient:

$$(7.7) \qquad < f\alpha(\mathscr{L}(X)A), \beta > = 0\,.$$

En particulier:

$$< f\alpha(\mathscr{L}(X)A), H\alpha(\mathscr{L}(X)A) > = k(\mathscr{L}(X)A) < f, 1 > = 0\,.$$

Ainsi $k(\mathscr{L}(X)A) = 0$ et du lemme 2 il résulte $\mathscr{L}(X)A = 0$. Nous énonçons:

Lemme 3. *Toute sous-algèbre complexe L de L_h qui laisse invariante une 2n-forme $K = f\eta \geqslant 0$, laisse invariant chaque élément de $U^p(f)$.*

8. Invariance des formes holomorphes—Application

a) Nous avons vu que sur une variété kählerienne compacte W_n, toute p-forme holomorphe β est fermée. Si $X \in L_h$, on a:

$$(8.1) \qquad \mathscr{L}(X)\beta = (di(X) + i(X)d)\beta = di(X)\beta\,.$$

La forme $i(X)\beta$, de type $(p - 1, 0)$ a pour composantes sur un domaine U de coordonnées locales

$$\{i(X)\beta\}_{\tau_2 \cdots \tau_p} = X^\lambda \beta_{\lambda\tau_2\cdots\tau_p}\,.$$

Ainsi $i(X)\beta$ est holomorphe, donc fermée et $\mathscr{L}(X)\beta = 0$.

Proposition 1. *Sur une variété kählerienne compacte W_n, toute p-forme holomorphe est invariante par le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de W_n.*

b) Reprenons une variété kählerienne compacte W_n telle que $b_{n,0}(W_n) \neq 0$. Il existe donc sur W_n une n-forme holomorphe β non identiquement nulle. Celle-ci est invariante pour toute t. i. holomorphe. Il en est donc de même pour la 2n-forme $K = \varepsilon_n\beta \wedge \bar\beta$ manifestement $\geqslant 0$. Nous posons:

$$(8.2) \qquad K = \varepsilon_n\beta \wedge \bar\beta = f\eta \qquad (f \geqslant 0)\,.$$

Relativement à K, l'algèbre de Lie L_h de toutes les t. i. holomorphes vérifie les hypothèses du lemme 1. Ainsi:

Proposition 2. *Si W_n est une variété kählérienne compacte telle que $b_{n,0}(W_n) \neq 0$, le plus grand groupe connexe G de transformations holomorphes de W_n est abélien et $\dim_R G \leqslant b_1(W_n)$.*

f étant défini par (8.2), il résulte du lemme 3 que le groupe G laisse invariant tout élément A de $U^p(f)$.

9. Identités relatives aux tenseurs holomorphes

a) A tout p-forme α de type $(p, 0)$, associons le $(p + 1)$-tenseur covariant de type $(p + 1, 0)$ défini par·

(9.1) $$a(\alpha)_{\lambda\rho_1\cdots\rho_p} = \nabla_\lambda \alpha_{\rho_1\cdots\rho_p}\,.$$

D'après (3.7), pour que le p-tenseur A de type $(p, 0)$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $a\,\{\alpha(A)\} = 0$. Compte-tenu de la compacité de W_n, nous allons mettre cette condition du premier ordre sous la forme d'une condition du second ordre.

Etant donné un tenseur covariant t de type $(1, 1)$, nous introduisons l'opérateur $Q(t)$ sur les formes α de type $(p, 0)$ défini par:

$$Q(t)\alpha = \frac{2}{(p-1)!} t_\lambda{}^\mu \alpha_{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p} dz^\lambda \wedge dz^{\sigma_2} \wedge \cdots \wedge dz^{\sigma_p}\,.$$

On en déduit sur U:

(9.2) $$\{Q(t)\alpha\}_{\rho_1\cdots\rho_p} = \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\rho_1\cdots\cdots\rho_p} t_\lambda{}^\mu \alpha_{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p}\,.$$

Soit R le tenseur de Ricci de la variété. D'après l'expression générale du laplacien $\Delta\alpha$ d'une forme, on a avec la notation (9.2):

$$(\Delta\alpha)_{\rho_1\cdots\rho_p} = -\nabla^k\nabla_k \alpha_{\rho_1\cdots\rho_p} + \tfrac{1}{2}(Q(R)\alpha)_{\rho_1\cdots\rho_p}\,.$$

On en déduit:

(9.3) $$(\Delta\alpha - \tfrac{1}{2}Q(R)\alpha)_{\rho_1\cdots\rho_p} = -\nabla^\lambda\nabla_\lambda \alpha_{\rho_1\cdots\rho_p} - \nabla_\lambda\nabla^\lambda \alpha_{\rho_1\cdots\rho_p}\,.$$

Or d'après l'identité de Ricci

$$(\nabla_\lambda\nabla^\lambda - \nabla^\lambda\nabla_\lambda)\alpha_{\rho_1\cdots\rho_p} = -\sum_{i=1}^{p} R_{\rho_i}{}^\lambda \alpha_{\rho_1\cdots\lambda\cdots\rho_p} = -\frac{1}{(p-1)!} \varepsilon^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\rho_1\cdots\cdots\rho_p} R_\lambda{}^\mu \alpha_{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p}$$

soit:

(9.4) $$\nabla_\lambda\nabla^\lambda \alpha_{\rho_1\cdots\rho_p} = \nabla^\lambda\nabla_\lambda \alpha_{\rho_1\cdots\rho_p} - \tfrac{1}{2}[Q(R)\alpha]_{\rho_1\cdots\rho_p}\,.$$

De (9.3) et (9.4), il résulte:

$$(\Delta\alpha - Q(R)\alpha)_{\rho_1\cdots\rho_p} = -2\nabla^\lambda\nabla_\lambda \alpha_{\rho_1\cdots\rho_p}$$

c'est-à-dire l'identité:

(9.5) $$(\Delta\alpha - Q(R)\alpha)_{\rho_1\cdots\rho_p} = -2\nabla^\lambda a(\alpha)_{\lambda\rho_1\cdots\rho_p}\,.$$

Si A est un p-tenseur holomorphe $a\{\alpha(A)\} = 0$ et $\alpha(A)$ est solution de l'équation elliptique:

(9.6) $$\Delta\alpha(A) - Q(R)\alpha(A) = 0\,.$$

b) Associons à un p-tenseur A de type $(p, 0)$ la 1-forme $b(A)$ définie par:

$$b(A)_\lambda = \frac{1}{p!} A^{\rho_1 \cdots \rho_p} a\{\alpha(A)\}_{\lambda\rho_1 \cdots \rho_p}\,.$$

Dans la suite, nous écrivons $a(\alpha)$ pour $a\{\alpha(A)\}$. Par dérivation il vient:

$$\delta' b(A) = -\frac{1}{p!} \nabla^\lambda A^{\rho_1 \cdots \rho_p} a(\alpha)_{\lambda\rho_1 \cdots \rho_p} - \frac{1}{p!} A^{\rho_1 \cdots \rho_p} \nabla^\lambda a(\alpha)_{\lambda\rho_1 \cdots \rho_p}\,.$$

De (9.5) on déduit ainsi:

(9.7) $$(\alpha, \Delta\alpha - Q(R)\alpha) = 2(p+1)(a(\alpha), a(\alpha)) + 2\delta' b(A)\,.$$

Par intégration sur W_n, il vient:

$$<\Delta\alpha - Q(R)\alpha, \alpha> = 2(p+1)<a(\alpha), a(\alpha)>$$

où le second membre est positif et n'est nul que pour $a(\alpha) = 0$. Ainsi (voir [8]):

Proposition 1. *Etant donnée une variété kählerienne compacte W_n, on a pour toute forme α de type $(p, 0)$ la relation:*

(9.8) $$<\Delta\alpha - Q(R)\alpha, \alpha> = 2(p+1)<a(\alpha), a(\alpha)>.$$

Pour qu'un p-tenseur A de type $(p, 0)$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $\alpha(A)$ vérifie:

(9.9) $$<\Delta\alpha(A) - Q(R)\alpha(A), \alpha(A)> = 0$$

ou soit solution de l'équation:

$$\Delta\alpha(A) - Q(R)\alpha(A) = 0\,.$$

10. Introduction d'un scalaire $f > 0$

a) Sur la vaiété kählerienne compacte W_n, *donnons-nous un scalaire $f > 0$* et introduisons, en accord avec les travaux de Kodaira, l'espace complexe $F^p(f)$ des p-formes α de type $(p, 0)$, d'-fermées

(10.1) $$d'\alpha = 0$$

et vérifiant la condition

(10.2) $$\delta'(f\alpha) = 0\,.$$

Soit $\mathscr{F}$ le fibré vectoriel complexe trivial de W_n, $\Omega^\circ(\mathscr{F})$ le faisceau des fonctions holomorphes à coefficients dans $\mathscr{F}$. D'après Kodaira:

$$dim_C F^p(f) = dim_C H^p(W_n, \Omega^\circ(\mathscr{F}))$$

et d'après un résultat classique de Dolbeault:

$$dim_C H^p(W_n, \Omega^\circ(\mathscr{F})) = b_{p,0}(W_n)\,.$$

Il vient ainsi:

$$dim_C F^p(f) = b_{p,0}(W_n)\,. \tag{10.3}$$

Introduisons sur les formes α de type $(p, 0)$ les opérateurs:

$$\delta'_f\alpha = \bar{f}^1\delta'(f\alpha)\,, \quad \Delta_f = 2(d'\delta'_f + \delta'_f d') \tag{10.4}$$

et le produit scalaire global:

$$<\alpha, \beta>_f = <\alpha, f\beta>\,.$$

δ'_f est le *transposé de d' pour ce produit scalaire*. En effet si α est une forme de type $(p+1, 0)$ et β une forme de type $(p, 0)$, on a:

$$<\delta'_f\alpha, \beta>_f = <\delta'(f\alpha), \beta> = <f\alpha, d'\beta> = <\alpha, d'\beta>_f\,.$$

Δ_f est une généralisation du laplacien Δ de G. de Rham. Si α est une forme de type $(p, 0)$:

$$<\Delta_f\alpha, f\alpha> = <\Delta_f\alpha, \alpha>_f = 2<\delta'_f\alpha, \delta'_f\alpha>_f + 2<d'\alpha, d'\alpha>_f\,.$$

Il vient ainsi:

$$<\Delta_f\alpha, f\alpha> = 2<\delta'_f\alpha, f\delta'_f\alpha> + 2<d'\alpha, fd'\alpha>\,. \tag{10.5}$$

Nous voyons que $<\Delta_f\alpha, f\alpha>$ est positif et n'est nul que pour:

$$d'\alpha = 0\,, \qquad \delta'_f\alpha = 0$$

c'est-à-dire pour les éléments de $F^p(f)$. Il en résulte que les éléments de $F^p(f)$ coincident avec les solutions de l'équation:

$$\Delta_f\alpha = 0\,.$$

b) Il est aisé de donner de Δ_f une expression simple en fonction de Δ et de f. Pour une forme α de type $(p, 0)$, on a:

$$\Delta_f\alpha = 2d'\{f^{-1}\delta'(f\alpha)\} + 2f^{-1}\delta'(fd'\alpha)\,.$$

On en déduit en explicitant en coordonnées locales les dérivations:

$$(\Delta_f \alpha)_{\rho_1\cdots\rho_p} = -\frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\rho_1\cdots\rho_p}\nabla_\mu\{f^{-1}\nabla^\lambda(f\alpha_{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p})\} - 2f^{-1}\nabla^\lambda\{f(d'\alpha)_{\lambda\rho_1\cdots\rho_p}\}$$

ou en développant:

$$(\Delta_f \alpha)_{\rho_1\cdots\rho_p} = -\frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\rho_1\cdots\rho_p}\nabla_\mu\nabla^\lambda\alpha_{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p} - 2\nabla^\lambda(d'\alpha)_{\lambda\rho_1\cdots\rho_p}$$
$$-\frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\rho_1\cdots\rho_p}\nabla_\mu\{(f^{-1}\nabla^\lambda f)\alpha_{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}\} - 2(f^{-1}\nabla^\lambda f)(d'\alpha)_{\lambda\rho_1\cdots\rho_p}\,.$$

Sous forme intrinsèque, il vient:

(10.6) $$\Delta_f = \Delta - 2d'i(f^{-1}d''f) - 2i(f^{-1}d''f)d'$$

où, pour une forme α de type $(p, 0)$, on a posé:

(10.7) $$\{i(f^{-1}d''f)\alpha\}_{\sigma_2\cdots\sigma_p} = (f^{-1}\nabla^\lambda f)\alpha_{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}\,.$$

c) Nous posons dans la suite:

(10.8) $$R_{\alpha\bar\beta} = c_{\alpha\bar\beta} + \partial_\alpha\partial_{\bar\beta}\log f \qquad (f > 0)$$

où la forme hermitienne c définit ainsi une 2-forme réelle fermée γ de type $(1, 1)$ telle que $[\gamma]$ est proportionnelle à $c_1(W_n)$. On peut obtenir, pour $f > 0$ arbitraire, une généralisation de la proposition du paragraphe précédent. D'après (9.7):

$$(f\alpha, \Delta\alpha - Q(R)\alpha) = 2(p+1)(fa(\alpha), a(\alpha)) + 2f\delta'b(A)\,.$$

Or:

$$f\delta'b(A) = \delta'(fb(A)) + i(d''f)b(A)$$

où

$$i(d''f)b(A) = \nabla^\lambda f A^{\rho_1\cdots\rho_p}\nabla_\lambda\alpha(A)_{\rho_1\cdots\rho_p} = (f^{-1}\nabla^\lambda f)\nabla_\lambda\alpha(A)_{\rho_1\cdots\rho_p}fA^{\rho_1\cdots\rho_p}\,.$$

Posons:

$$(\nabla_{f^{-1}d''f}\alpha)_{\rho_1\cdots\rho_p} = (f^{-1}\nabla^\lambda f)\nabla_\lambda\alpha_{\rho_1\cdots\rho_p}\,.$$

On obtient ainsi:

(10.9) $$(f\alpha, \Delta\alpha - Q(R)\alpha - 2\nabla_{f^{-1}d''f}\alpha) = 2(p+1)(fa(\alpha), a(\alpha)) + 2\delta'\{fb(A)\}\,.$$

Par intégration sur W_n, nous obtenons:

(10.10) $$<\Delta\alpha - Q(R)\alpha - 2\nabla_{f^{-1}d''f}\alpha, f\alpha> = 2(p+1)<a(\alpha), fa(\alpha)>$$

où le second membre est encore positif et n'est nul que pour $a(\alpha) = 0$.

d) De la décomposition (10.8) de R on déduit d'autre part que si α est une forme de type $(p, 0)$:

$$\{Q(R)\alpha - Q(c)\alpha\}_{\rho_1\cdots\rho_p} = \frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\rho_1\cdots\rho_p}\nabla_\lambda\nabla^\mu \log f\alpha_{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p}$$

Il en résulte

$$\{Q(R)\alpha - Q(c)\alpha\}_{\rho_1\cdots\rho_p} = \frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\rho_1\cdots\rho_p}\nabla_\lambda\{f^{-1}\nabla^\mu f\alpha_{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p}\}$$
$$- \frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\rho_1\cdots\rho_p}f^{-1}\nabla^\mu f\nabla_\lambda\alpha_{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p}$$

ce qui peut s'écrire, avec la notation introduite dans (10.7):

(10.11) $$\{Q(R)\alpha - Q(c)\alpha - 2d'i(f^{-1}d''f)\alpha\}_{\rho_1\cdots\rho_p}$$
$$= -\frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\rho_1\cdots\rho_p}f^{-1}\nabla^\mu f\nabla_\lambda\alpha_{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p}.$$

Considérons la forme $2i(f^{-1}d''f)d'\alpha$ qui a pour composantes:

$$2\{i(f^{-1}d''f)d'\alpha\}_{\rho_1\cdots\rho_p} = \frac{2}{p!}\varepsilon^{\lambda\sigma_1\cdots\sigma_p}_{\rho_0\cdots\rho_p}f^{-1}\nabla^{\rho_0}f\nabla_\lambda\alpha_{\sigma_1\cdots\sigma_p}.$$

En distinguant le cas $\rho_0 = \lambda$ et le cas $\rho_0 = \sigma_1, \cdots, \sigma_p$, il vient:

(10.12) $$2\{i(f^{-1}d''f)d'\alpha\}_{\rho_1\cdots\rho_p} = 2f^{-1}\nabla^{\rho_0}f\nabla_{\rho_0}\alpha_{\rho_1\cdots\rho_p}$$
$$- \frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\rho_1\cdots\rho_p}f^{-1}\nabla^{\rho_0}f\nabla_\lambda\alpha_{\rho_0\sigma_2\cdots\sigma_p}.$$

De (10.11) et (10.12), on déduit ainsi que si α est une forme de type $(p, 0)$, on a la relation:

(10.13) $$Q(R)\alpha + 2\nabla_{f^{-1}d''f}\alpha = Q(c)\alpha + 2\{d'i(f^{-1}d''f) + i(f^{-1}d''f)d'\}\alpha$$

et (10.10) peut s'écrire compte-tenu de l'expression (10.6) de Δ_f:

$$<\Delta_f\alpha - Q(c)\alpha, f\alpha> = 2(p+1)<a(\alpha), fa(\alpha)>.$$

Nous pouvons énoncer:

Proposition 2. *Etant donnée une variété kählerienne compacte W_n et un scalaire $f > 0$ sur W_n, on a pour toute forme α de type $(p, 0)$ la relation:*

$$(10.14) \qquad <\Delta_f \alpha - Q(c)\alpha, f\alpha> = 2(p+1)<a(\alpha), fa(\alpha)> .$$

Pour qu'un p-tenseur A de type $(p, 0)$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $\alpha(A)$ vérifie:

$$(10.15) \qquad <\Delta_f \alpha(A) - Q(c)\alpha(A), f\alpha(A)> = 0$$

ou soit solution de l'équation:

$$(10.16) \qquad \Delta_f \alpha(A) - Q(c)\alpha(A) = 0 .$$

11. Variété kählerienne à classe de Chern $c_1(W_n) \leqslant 0$

Supposons que la variété kählerienne compacte W_n admette au sens du paragraphe 4, une première classe de Chern $c_1(W_n) \leqslant 0$. Le tenseur de Ricci de la variété vérifie alors la relation (10.8), soit:

$$(11.1) \qquad R_{\alpha\bar\beta} = c_{\alpha\bar\beta} + \partial_\alpha \partial_{\bar\beta} \log f \qquad (f > 0)$$

où la forme hermitienne c, de coefficients $c_{\alpha\bar\beta}$, est *négative ou nulle en tout point de* W_n.

a) Si α est une p-forme arbitraire de type $(p, 0)$, considérons la forme $Q(c)\alpha$ donnée par

$$(Q(c)\alpha)_{\rho_1 \cdots \rho_p} = \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\rho_1\cdots\rho_p} c_\lambda{}^\mu \alpha_{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p} .$$

Par abus de notation, nous notons encore α le p-tenseur associé à la forme α par conjugaison et dualité définie par la métrique. Il vient:

$$(Q(c)\alpha, \alpha) = \frac{2}{(p-1)!} \alpha^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p} c_\lambda{}^\mu \alpha_{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p} .$$

Soit

$$(11.2) \qquad (Q(c)\alpha, \alpha) = \frac{2}{(p-1)!} c_{\lambda\bar\mu} \alpha^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p} \alpha^{\bar\mu}{}_{\sigma_2\cdots\sigma_p} .$$

De l'hypothèse faite sur c, il résulte ainsi:

$$(11.3) \qquad (Q(c)\alpha, \alpha) \leqslant 0$$

en tout point de W_n.

b) Soit $A \in T^p$ un p-tenseur holomorphe arbitraire de W_n. D'après la proposition 2 du paragraphe 10

$$(11.4) \qquad <\Delta_f \alpha(A) - Q(c)\alpha(A), f\alpha(A)> = 0 .$$

Mais d'après (10.5) et (11.3):

$$<\Delta_f \alpha(A), f\alpha(A)> \geqslant 0 , \qquad - <Q(c)\alpha(A), f\alpha(A)> \geqslant 0 .$$

Il en résulte, en vertu de (10.5), $\delta'_f \alpha(A) = 0$, soit la relation:

$$\delta' \{f\alpha(A)\} = 0$$

et T^p coïncide avec $U^p(f)$. Il en est en particulier ainsi pour $p = 1$, c'est-à-dire pour l'espace des vecteurs holomorphes. Par suite l'algèbre L_h laisse invariante la 2n-forme positive $K = f\eta$. Des lemmes 1 et 3, on déduit le théorème suivant:

Théorème 1. *Si une variété kählerienne compacte W_n vérifie $c_1(W_n) \leqslant 0$, tout p-tenseur holomorphe est invariant par le plus grand groupe connexe G de transformations holomorphes de W_n et:*

$$dim_C T^p \leqslant b_{p,0}(W_n) .$$

En particulier G est abélien et:

$$dim_R G \leqslant b_1(W_n) .$$

12. Variété kählerienne à classe de Chern $c_1(W_n) \geqslant 0$

Supposons maintenant que la variété kählerienne compacte W_n admette, au sens du paragraphe 4, une première classe de Chern $c_1(W_n) \geqslant 0$. On a encore (11.1) où la forme hermitienne c est *positive ou nulle en tout point de* W_n.

a) Si $\alpha \in F^p(f)$, on a $\Delta_f \alpha = 0$ et il résulte de (10.14):

$$<Q(c)\alpha, f\alpha> = - 2(p + 1) <a(\alpha), fa(\alpha)> .$$

Mais d'après (11.2) et l'hypothèse faite sur c

$$<Q(c)\alpha, f\alpha> \geqslant 0 .$$

On en déduit:

$$(12.1) \qquad <a(\alpha), fa(\alpha)> = 0 , \qquad <Q(c)\alpha, f\alpha> = 0$$

et par suite $a(\alpha) = 0$. Ainsi $\alpha \in F^p(f)$ est nécessairement forme associée à un p-tenseur holomorphe $A \in U^p(f)$ et l'on a:

$$dim_C U^p(f) = dim_C F^p(f) = b_{p,0}(W_n) .$$

Il résulte de lemme 2 du paragraphe 6 que si la constante $(\alpha, H\alpha)$ est nulle, α est nécessairement nulle. L'application linéaire de l'espace vectoriel complexe $F^p(f)$ dans l'espace vectoriel complexe $H^{(p)}$ définie par:

$$\alpha \in F^p(f) \to H\alpha \in H^{(p)}$$

est *bijective*. D'autre part une p-forme holomorphe de W_n ne peut s'annuler en un point sans être identiquement nulle. Il en résulte:

$$b_{p,0}(W_n) \leqslant C_n^p .$$

b) Considérons en particulier le cas $p = 1$. Soit L la sous-algèbre complexe de L_h définie par les t.i. holomorphes laissant invariante la 2n-forme positive $K = f\eta$. Cette sous algèbre de dimension $b_{1,0}(W_n)$ est abélienne d'après le lemme 1 du paragraphe 6 et laisse invariant chaque élément de $U^p(f)$ d'après le lemme 3.

Si I est l'idéal introduit au paragraphe 2, il résulte de l'analyse du a que L_h/I admet un isomorphisme naturel sur L et L_h admet la décomposition en somme directe $L_h = I + L$. Nous obtenons

Théorème 2. *Si une variété kählerienne compacte W_n vérifie $c_1(W_n) \geqslant 0$, on a pour le scalaire $f > 0$ vérifiant* (11.1)*:*

$$dim_C U^p(f) = b_{p,0}(W_n) \leqslant C_n^p$$

et par suite $dim_C T^p \geqslant b_{p,0}(W_n)$. Une forme holomorphe non identiquement nulle ne peut s'annuler. L'algèbre L_h admet la décomposition en somme directe:

$$L_h = I + L , \tag{12.2}$$

où L est une sous-algèbre complexe abélienne de L_h, de dimension complexe $b_{1,0}(W_n)$, qui laisse invariant chaque élément de $U^p(f)$.

Supposons toujours $c_1(W_n) \geqslant 0$; si $b_{n,0}(W_n) \neq 0$, il existe une n-forme holomorphe non identiquement nulle sur W_n et cette forme ne peut s'annuler nulle part. Par suite $c_1(W_n) = 0$.

Ainsi *si $c_1(W_n) \geqslant 0$ n'est pas nulle, on a $b_{n,0}(W_n) = 0$.*

13. Etude de cas particuliers

a) Supposons que $c_1(W_n)$ contienne une 2-forme telle que la forme hermitienne associée c, partout négative ou nulle, soit définie négative en un point z_0 de W_n. Nous dirons que $c_1(W_n) \leqslant 0$ est *localement définie négative*.

Si A est un p-tenseur holomorphe de W_n, il appartient à $U^p(f)$ et il résulte de (11.4) que $\alpha(A)$ vérifie partout

$$(Q(c)\alpha(A), f\alpha(A)) = 0 .$$

D'après (11.2), cette égalité entraîne qu'au point z_0, $\alpha(A)$ donc A s'annulent. Mais A appartenant à $U^p(f)$ ne peut, d'après le lemme 2, s'annuler sans être identiquement nul. Ainsi:

Corollaire 1. *Si $c_1(W_n) \leqslant 0$ est localement définie négative, il n'existe sur W_n aucun p-tenseur holomorphe non identiquement nul. En particulier le plus grand groupe connexe G de transformations holomorphes de W_n est réduit à l'identité.*

Nous obtenons ainsi une généralisation d'un théorème dû à Nakano et relatif au cas *où $c_1(W_n)$ est définie négative* (c partout définie négative). Sous cette dernière hypothèse, Andreotti et S Kobayashi [3] ont montré récemment que *le groupe de toutes les transformations holomorphes de W_n est fini.*

b) Supposons maintenant que $c_1(W_n)$ contienne une 2-forme telle que la forme hermitienne c associée, partout positive ou nulle, soit définie positive en un point z_0 de W_n. Nous dirons alors que $c_1(W_n) \geqslant 0$ est *localement définie positive.*

Si $\alpha \in F^p(f)$, il résulte de (12.1) que α vérifie partout:

$$(Q(c)\alpha, \alpha) = 0 .$$

D'après (11.2) cette égalité entraîne encore qu'au point z_0, α s'annule. Mais, d'après l'hypothèse faite, α est associée à un élément A de $U^p(f)$ et ne peut s'annuler sans être identiquement nulle. On voit ainsi que $b_{p,0}(W_n) = 0$ $(p = 1, \cdots, n)$. Ainsi:

Corollaire 2. *Si $c_1(W_n) \geqslant 0$ est localement définie positive, il n'existe sur W_n aucune p-forme holomorphe non identiquement nulle. En particulier le premier nombre de Betti $b_1(W_n)$ est nul.*

c) Supposons enfin $c_1(W_n) = 0$. Les résultats des deux théorèmes fondamentaux des paragraphes 11 et 12 sont simultanément valables. De

$$dim_C T^p \leqslant b_{p,0}(W_n), \qquad dim_C T^p \geqslant b_{p,0}(W_n)$$

on déduit

$$dim_C T^p = b_{p,0}(W_n) .$$

Pour $p = 1$

$$dim_C L_h = b_{1,0}(W_n)$$

et I est nul. Ainsi

Corollaire 3. *Si $c_1(W_n) = 0$, un p-tenseur holomorphe ou une p-forme holomorphe $\not\equiv 0$ ne peuvent s'annuler. Tout p-tenseur holomorphe est invariant par toute transformation infinitésimale holomorphe et*

$$\dim_C T^p = b_{p,0}(W_n).$$

En particulier le plus grand groupe connexe G de transformations holomorphes de W_n est abélien et

$$\dim_R G = b_1(W_n).$$

14. Variété de Hodge à $c_1(W_n) \geqslant 0$ et localement définie positive

a) Supposons que W_n soit une variété de Hodge (variété algébrique) compacte: la 2-forme fondamentale F de W_n admet des périodes entières. Si $\chi(W_n)$ est le genre arithmétique de la variété, on a, d'après un résultat classique de Kodaira et Spencer:

$$\chi(W_n) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p b_{p,0}(W_n). \tag{14.1}$$

Soit $\tilde{W}_n$ un revêtement d'ordre q de W_n que nous supposerons muni de la métrique et de la 2-forme images réciproques de celles de W_n. La variété $\tilde{W}_n$ est aussi variété de Hodge. En appliquant la version de Hirzeburch du théorème de Riemann-Roch, S. Kobayashi [4] a établi le lemme suivant:

Lemme 4. *Soit $\tilde{W}_n$ un revêtement d'ordre q d'une variété de Hodge compacte W_n. On a:*

$$\chi(\tilde{W}_n) = q\chi(W_n). \tag{14.2}$$

b) Supposons en outre que $c_1(W_n) \geqslant 0$ soit *localement définie positive*. Il en est alors évidemment de même pour $\tilde{W}_n$ et il résulte de (14.1) et du corollaire 2 du paragraphe 13:

$$\chi(W_n) = 1, \qquad \chi(\tilde{W}_n) = 1.$$

On a donc nécessairement $q = 1$ d'après le lemme 4. Le groupe fondamental $\pi_1(W_n)$ de la variété envisagée ne peut admetre de *sous-groupe propre d'indice fini*.

Le premier nombre de Betti de W_n étant nul, le groupe $H_1(W_n, Z)$ est fini. Le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(W_n)$ ne peut que coïncider avec $\pi_1(W_n)$ et l'on a:

$$H_1(W_n, Z) = 0.$$

Ce raisonnement, dû à Kobayashi, conduit au théorème suivant

Théorème 3. *Soit W_n une variété de Hodge compacte telle que $c_1(W_n) \geqslant 0$ soit localement définie positive. Pour une telle variété:*

$$H_1(W_n, Z) = 0.$$

15. Cas d'une courbure scalaire constante

Nous nous proposons d'étudier le cas d'une variété kählerienne dont la courbure scalaire Tr. R est constante.

a) Nous allons d'abord établir le lemme suivant

Lemme 5. *Pour toute p-forme holomorphe β, on a sur une variété kählerienne:*

$$(15.1) \qquad \delta' Q(R)\beta = -\, i(d\,\mathrm{Tr.}\, R)\beta\,.$$

En effet de:

$$(Q(R)\beta)_{\rho_1\cdots\rho_p} = \frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\rho_1\cdots\rho_p} R_\lambda{}^\mu \beta_{\mu\sigma_2\cdots\rho_p}\,.$$

On déduit qu'en coordonnées locales complexes:

$$(\delta' Q(R)\beta)_{\rho_2\cdots\rho_p} = -\frac{2}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\nu\rho_2\cdots\rho_p} \nabla^\nu R_\lambda{}^\mu \beta_{\mu\sigma_2\cdots\sigma_p}\,.$$

En distinguant au second membre les termes pour lesquels $\nu = \lambda$ et ceux pour lesquels $\nu = \sigma_2, \cdots, \sigma_p$, il vient

$$(\delta' Q(R)\beta)_{\rho_2\cdots\rho_p} = -\,2\nabla^\nu R_\nu{}^\mu \beta_{\mu\rho_2\cdots\rho_p} + \frac{2}{(p-2)!}\varepsilon^{\lambda\sigma_3\cdots\sigma_p}_{\rho_2\cdots\rho_p} \nabla^\nu R_\lambda{}^\mu \beta_{\mu\nu\sigma_3\cdots\sigma_p}\,.$$

Le tenseur de Ricci d'une variété kählerienne vérifie:

$$\nabla^\nu R_\lambda{}^\mu = \nabla^\mu R_\lambda{}^\nu\,.$$

Comme $\beta_{\mu\nu\sigma_3\cdots\sigma_p}$ est antisymétrique en μ et ν le second terme du membre de droite est nul. D'autre part, d'après l'identité de Bianchi:

$$2\nabla^\nu R_\nu{}^\mu = \nabla^\mu(\mathrm{Tr.}\, R)$$

et il vient:

$$\delta' Q(R)\beta = -\, i(d\,\mathrm{Tr.}\, R)\,\beta\,.$$

Si Tr. $R = \text{const.}$, $\delta' Q(R)\beta = 0$.

b) Du lemme précédent, on déduit:

Lemme 6. *Soit $A \in T^p$ un p-tenseur holomorphe sur la variété kählerienne compacte W_n à courbure scalaire constante. Dans la décomposition:*

$$\alpha(A) = d'\mu + H\alpha(A)$$

la p-forme holomorphe $H\alpha(A)$ est à dérivée covariante nulle.

D'après la proposition 1 du paragraphe 9, $\alpha(A)$ vérifie l'équation:

$$\Delta\alpha(A) - Q(R)\alpha(A) = 0 .$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} < \Delta d'\mu - Q(R)d'\mu, d'\mu > &= - < \Delta H\alpha(A) - Q(R)H\alpha(A), d'\mu > \\ &= < Q(R)H\alpha(A), d'\mu > \end{aligned}$$

soit

$$< \Delta d'\mu - Q(R)d'\mu, d'\mu > = < \delta' Q(R)H\alpha(A), \mu > .$$

Mais d'après le lemme 5, le second membre est nul. De la proposition 1 du paragraphe 9, il résulte que la p-forme $d'\mu$ et, par suite, la p-forme $H\alpha(A)$ sont associées à des p-tenseurs holomorphes; $H\alpha(A)$ vérifie donc les relations:

$$\nabla_\lambda \{H\alpha(A)\}_{\rho_1 \cdots \rho_p} = 0 , \qquad \nabla_{\bar\lambda} \{H\alpha(A)\}_{\rho_1 \cdots \rho_p} = 0$$

et est ainsi à dérivée covariante nulle.

c) Une variété riemannienne est dite irréductible si son groupe d'holonomie connexe est irréductible (dans le réel). Nous allons établir le lemme suivant:

Lemme 7. *Soit W_n une variété kählerienne compacte telle que $c_1(W_n) \geqslant 0$, sans être nulle. Si W_n est irréductible et à courbure scalaire constante, on a:*

$$b_{p,0}(W_n) = 0 \qquad (p = 1, \cdots, n) .$$

En effet, d'après le raisonnement conduisant au théorème 2, toute p-forme holomorphe β de W_n peut s'écrire $\beta = H\alpha(A)$, où A est un p-tenseur holomorphe. Il résulte du lemme 6 que, sous les hypothèses faites, *toute p-forme holomorphe β de W_n est à dérivée covariante nulle*, donc vérifie simultanément $\Delta\beta = 0$, $\Delta\beta - Q(R)\beta = 0$ et par suite $Q(R)\beta = 0$.

On en déduit:

$$(Q(c)\beta, \beta) + 2\nabla_\lambda(\nabla_{\bar\mu} \log f \beta^{\lambda\sigma_2\cdots\sigma_p}\beta^{\bar\mu}{}_{\sigma_2\cdots\sigma_p}) = 0 .$$

Par intégration sur W_n, il vient:

$$< Q(c)\beta, \beta > = 0 .$$

$(Q(c)\beta, \beta)$ étant nécessairement $\geqslant 0$, on en déduit:

$$(Q(c)\beta, \beta) = 0$$

soit en coordonnées locales:

$$c_{\lambda\bar{\mu}}\beta^{\lambda\alpha_2\cdots\alpha_p}\beta^{\bar{\mu}}{}_{\alpha_2\cdots\alpha_p} = 0\,. \tag{15.2}$$

Si $\beta \not\equiv 0$ est une p-forme holomorphe, il résulte de l'irréductibilité de W_n:

$$\beta^{\lambda\alpha_2\cdots\alpha_p}\beta^{\bar{\mu}}{}_{\alpha_2\cdots\alpha_p} = ag^{\lambda\bar{\mu}} \qquad (a = \text{const.} \neq 0)$$

puisque le premier membre est à dérivée covariante nulle. De (15.2), il résulterait alors Tr. $c \equiv 0$, ce qui est contraire aux hypothèses du lemme. On en déduit $b_{p,0}(W_n) = 0$ $(p = 1, \cdots n)$.

b) Supposons que W_n, variété de Hodge, satisfasse aux hypothèses du lemme 7. Le raisonnement du paragraphe 14 s'applique sans modification à la situation présente et l'on a (voir [4])

Théorème 4. *Soit W_n une variété de Hodge compacte telle que $c_1(W_n) \geqslant 0$, sans être nulle. Si W_n est irréductible et à courbure scalaire constante, on a:*

$$H_1(W_n, Z) = 0\,.$$

Bibliographie

[1] Y. Akizuki & S. Nakano, *Note on Kodaira—Spencer's proof of Lefschetz theorems,* Proc. Japan Acad. **30** (1954) 266–272.

[2] S. S. Chern, *Characteristic classes of Hermitian manifolds,* Ann. of Math. **47** (1948) 85–121.

[3] S. Kobayashi, *On the automorphism group of a certain class of algebraic manifolds,* Tôhoku Math. J. **11** (1959) 184–190.

[4] ——, *On compact Kähler manifolds with positive definite Ricci tensor,* Ann. of Math. **74** (1961) 570–573.

[5] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry,* Vol I, Interscience, New York, 1963.

[6] K. Kodaira, *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39** (1953) 1268–1273.

[7] K. Kodaira & D. C. Spencer, *On arithmetic genera of algebraic varieties,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39** (1953) 641–649.

[8] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie,* Cremonese, Rome, 1955; *Géométrie des groupes de transformations,* Dunod, Paris, 1958.

[9] ——, *Isométries et transformations analytiques d'une variété kählérienne compacte,* Bull. Soc. Math. France **87** (1959) 427–437.

[10] ——, *Sur certaines variétés kählériennes compactes,* C. R. Acad. Sci. Paris **263** (1966) 570–575.

[11] ——, *Variétés complexes et tenseur de Bergmann,* Ann. Inst. Fourier (Genoble) **15** (1965) 345–407.

COLLÈGE DE FRANCE