126. *Sur la pseudoconvexité par rapport à une direction. I*

Par Ikuo KIMURA
Université de Kôbé

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., June 13, 1966)

Introduction. Dans des notes antérieures [1]~[5], nous avons examiné des propriétés de la pseudoconvexité par rapport à une direction de domaines dans l'espace de *deux* variables complexes. Dans cette présente Note et la suivante, nous poursuivons le même objet dans l'espace de $n(n\geqq 2)$ variables, et montrons que tous les résultats de [1]~[5] subsistent pour les n variables.

1. Définitions. Bien que, dans [1]~[5], nous ayons limité nos considérations aux domaines, c'est-à-dire aux ensembles ouverts et connexes, tous les résultats de cette série de notes sont vrais pour les ensembles ouverts et non connexes; pour cette raison, dans la suivante nous traitons, plus généralement, les ensembles ouverts que nous exprimons par le mot "régions". Soit D une région (connexe ou non) dans l'espace de n variables $z_1, z_2, \cdots, z_n$. Soit x une des variables $z_1, z_2, \cdots, z_n$, et soient $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ les autres; nous considérons quatre sortes de pseudoconvexité par rapport à une direction, comme suit.

Définition 1. *Soient $y_i=f_i(x, t)$, $i=1, 2, \cdots, n-1$, des fonctions continues sur l'ensemble $\{|x-x_0|\leqq r, 0\leqq t\leqq 1\}$ et telles que pour tout t_0 fixe, $f_i(x, t_0)$, $i=1, 2, \cdots, n-1$, soient holomorphes en x sur $|x-x_0|\leqq r$, où x_0 et $r(r>0)$ sont des nombres fixes mais arbitrairement donnés auparavant. Considérons la famille des surfaces analytiques*

$$F_t\colon y_i=f_i(x,t),\ |x-x_0|\leqq r,\ i=1,2,\cdots,n-1, 0\leqq t\leqq 1.$$

Nous disons que la région D est pseudoconvexe (O) *par rapport à x, si les relations $F_t\subset D$ pour $0<t\leqq 1$ et* $\mathrm{Fr}.F_0\subset D$ *entraînent $F_0\subset D$, quelque soient $f_i(x, t)$.*

Remarque 1. La terminologie ancienne dans [1]~[5] est un peu différente de celle que nous employons ici. En effet, par exemple, la définition 1 est exprimée par la terminologie ancienne comme suit: la région D satisfaisant aux conditions de la définition 1 est pseudoconvexe (O) par rapport à $y=(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})$.

Définition 2. *Soient $y_i=f_i(x,t)$, $i=1, 2, \cdots, n-1$, des fonctions continues sur un ensemble $\{|x-x_0|\leqq r, 0\leqq t\leqq 1\}$ et holomorphes en x sur $|x-x_0|\leqq r$ pour tout t fixe. Et supposons que l'on ait*

$$(x_0, f_1(x_0, 0), \cdots, f_{n-1}(x_0, 0)) \notin D$$

et

$$(x, f_1(x, 0), \cdots, f_{n-1}(x, 0)) \in D$$

pour $0<|x-x_0|\leqq r$. *Nous disons que la région D est pseudoconvexe* (I) *par rapport à x, si, pour toutes telles fonctions* $y_i=f_i(x, t)$, $i=1, 2, \cdots, n-1$, *satisfaisant à ces conditions-ci, il existe un* δ *positif tel que, pour tout t dans* $0\leqq t<\delta$, *il y ait un point x dans* $|x-x_0|<\varepsilon$ *satisfaisant à*

$$(x, f_1(x, t), \cdots, f_{n-1}(x, t)) \notin D,$$

où ε *est un nombre positif arbitrairement donné auparavant.*

Définition 3. *Soient* C, C_1, C_2 *trois domaines définis par*

$$C : |x-x_0|<\rho,\ |y_i-f_i(x)|<r_i,\ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$
$$C_1: \rho'<|x-x_0|<\rho,\ |y_i-f_i(x)|<r_i,\ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$
$$C_2: |x-x_0|<\rho,\ |y_i-f_i(x)|<r_i'(<r_i),\ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$

où $f_i(x)$ *sont des fonctions holomorphes sur* $|x-x_0|\leqq\rho$. *Nous disons que la région D est pseudoconvexe* (II) *par rapport à x, si nous avons* $C\subset D$ *pour tous tels domaines* C, C_1, C_2 *satisfaisant à* $C_1+C_2\subset D$.

Remarque 2. Nous pouvons supposer, sans perdre la généralité, que les fonctions $f_i(x)$ sont des polynômes [3].

Définition 4. *Nous disons que la région D est pseudoconvexe* (III, y_1) *par rapport à x, lorsque, sous les hypothèses de la définition* 1, *si nous supposons de plus que* $f_1'(x_0, 0)\neq 0$, *nous avons la même conclusion que dans la définition* 1.

2. Coïncidence de dèfinitions. Critères pour la pseudoconvexité par rapport à x**.** D'après le théorème suivant, on peut dire simplement qu'une région D est pseudoconvexe par rapport à x, si D est pseudoconvexe (O) ou (I) ou (II) par rapport à x.

Théorème 1. *Les trois sortes de pseudoconvexité* (O), (I), (II) *par rapport à x sont équivalentes.*

Preuve. Il est facile et tout à fait le même que dans [3], de montrer que (O) entraîne (I) et que (II) entraîne (O). Donc nous démontrons seulement que (I) entraîne (II).

Soient $f_i(x)$, $i=1, 2, \cdots, n-1$, des polynômes; prenons trois domaines suivants.

$$C : |x-x_0|<\rho,\ |y_i-f_i(x)|<r_i,\ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$
$$C_1: \rho'<|x-x_0|<\rho,\ |y_i-f_i(x)|<r_i,\ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$
$$C_2: |x-x_0|<\rho,\ |y_i-f_i(x)|<r_i'(<r_i),\ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$

satisfaisant à $C_1+C_2\subset D$. Dans ces circonstances, prouvons que $C\subset D$. D'abord, pour simplifier C, C_1, C_2, considérons la transformation

$$X=x-x_0,\ Y_i=y_i-f_i(x),\ (i=1, 2, \cdots, n-1).$$

Alors l'image de D par cette transformation est pseudoconvexe (I) par rapport à X, et les images de C, C_1, C_2 sont trois domaines cylindriques suivants.

$$C' : |X|<\rho,\ |Y_i|<r_i,\ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$
$$C'_1 : \rho'<|X|<\rho,\ |Y_i|<r_i,\ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$
$$C'_2 : |X|<\rho,\ |Y_i|<r'_i,\ (i=1, 2, \cdots, n-1).$$

Par conséquent, dans les expressions de C, C_1, C_2, on peut supposer que $x_0=0$ et $f_i(x)\equiv 0$, c'est-à-dire que ces trois domaines ont les expressions suivantes.

$$C : |x|<\rho,\ |y_i|<r_i,\ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$
$$C_1 : \rho'<|x|<\rho,\ |y_i|<r_i,\ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$
$$C_2 : |x|<\rho,\ |y_i|<r'_i,\ (i=1, 2, \cdots, n-1).$$

Ensuite, pour $1\leqq k<n$, désignons par $\sum_k$ l'ensemble

$$|x|<\rho,\ |y_i|<r_i,\ |y_i|<r'_j,\ (1\leqq i\leqq k,\ k<j<n).$$

Si $C=\sum_{n-1}\not\subset D$, on aurait une contradiction. En effet, en supposant que $\sum_{n-1}\not\subset D$, désignons par l le minimum de k tel que $\sum_k\not\subset D$, et prenons un point (a, b)*) de $\sum_l - D$; on a $r_l>|b_l|\geqq r'_l$. Considérons l'expression

$$d(x, y_l)=[|1/y_l|^2+\lambda|x|^2]^{\frac{1}{2}},\ (\lambda \text{ est un nombre positif}),$$

et posons

$$d_0=\sup\left\{d(x, y_l)\mid (x, y)\in \textstyle\sum_l - D,\ y_i=b_i,\ i\neq l\right\}.$$

Soit $r''_l=\dfrac{1}{2}(r_l+|b_l|)$; alors pour λ assez petit, on a

$$d(a, b_l)>[(1/r''_l)^2+\lambda(\rho')^2]^{\frac{1}{2}}\equiv d_1.$$

Donc, si (x, y) est un point de $\sum_l - D$ tel que $y_i=b_i$, $i\neq l$ et $|y_l|>r''_l$, on a $d(x, y_l)<d_1$. Par conséquent, il existe au moins un point (ξ, η) de $\sum_l - D$ tel que $d(\xi, \eta_l)=d_0$ et $\eta_i=b_i$, $i\neq l$. Définissons $n-1$ fonctions $y_i=f_i(x, t)$ par les équations

$$\begin{cases} y_i=b_i,\ i\neq l, \\ 1/(\bar{\eta}_l y_l)+\lambda\bar{\xi}x=d_0^2 t,\ t\geqq 1. \end{cases}$$

Ces fonctions sont définies et holomorphes sur un ensemble $\{|x-\xi|\leqq r_0,\ 1\leqq t\leqq t_0\}$, où r_0 est assez petit et t_0 est assez voisin de 1, pour que l'on ait $(x, f_1(x, t), \cdots, f_{n-1}(x, t))\in\sum_l$ pour tout (x, t) dans cet ensemble. En outre, si $y_i=f_i(x, t)$, $i=1, 2, \cdots, n-1$, alors on a

$$d(x, y_l)^2=d_0^2(t^2+\lambda|\eta_l|^2|x-t\xi|^2).$$

En conséquence, pour $0<|x-\xi|\leqq r_0$, on a $d(x, f_l(x, 1))>d_0$, c'est-à-dire que $(x, f_1(x, 1), \cdots, f_{n-1}(x, 1))\in D$; et pour $|x-\xi|\leqq r_0$, $1<t\leqq t_0$, on a $d(x, f_l(x, t))>d_0$, c'est-à-dire que $(x, f_1(x, t), \cdots, f_{n-1}(x, t))\in D$. C'est en contradiction avec la pseudoconvexité (I) par rapport à x.

C.Q.F.D.

Comme un critère pour la pseudoconvexité par rapport à x, nous avons le

---

*) Nous désignons, pour simplifier l'exposition, le point $(x, y_1, \cdots, y_{n-1})$ par (x, y).

Lemme 1. *Soit $\prod$ une variété analytique à 2 dimensions complexes et de la forme*

$$\prod: y_i = a_i u + b_i(x), \ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$

où a_i sont des constantes satisfaisant à $\sum |a_i| \neq 0$, et $b_i(x)$ des polynômes, et que u est un paramètre complexe. Une région D est pseudoconvexe par rapport à x, si et seulement si, pour toute variété analytique $\prod$ de la forme expliquée ci-dessus, la région D_{Π} définie par

$$D_{\Pi} = \{(x, u) \mid (x, y) \in D, \ y_i = a_i u + b_i(x), \ i=1, 2, \cdots, n-1\},$$

est pseudoconvexe.

Preuve. 1°. Supposons que D soit pseudoconvexe par rapport à x. Soit $\prod$ la variété analytique expliquée dans le lemme. Et soit $u=f(x, t)$ une fonction continue sur un ensemble $\{|x-x_0| \leqq r, 0 \leqq t \leqq 1\}$ et holomorphe sur $|x-x_0| \leqq r$ pour tout t fixe. Supposons que $(x_0, f(x_0, 0)) \notin D_{\Pi}$ et $(x, f(x, 0)) \in D_{\Pi}$ pour $0 < |x-x_0| \leqq r$, où D_{Π} désigne la région déterminée par D et $\prod$. Posons

$$y_i = f_i(x, t) = a_i f(x, t) + b_i(x), \ i=1, 2, \cdots, n-1;$$

alors on a $(x_0, f_1(x_0, 0), \cdots, f_{n-1}(x_0, 0)) \notin D$ et on a $(x, f_1(x, 0), \cdots, f_{n-1}(x, 0)) \in D$ pour $0 < |x-x_0| \leqq r$. Donc, pour tout ε positif, il existe un δ positif tel que, pour tout t dans $0 \leqq t < \delta$, il y a un point x dans $|x-x_0| < \varepsilon$ tel que $(x, f_1(x, t), \cdots, f_{n-1}(x, t)) \notin D$, c'est-à-dire que $(x, f(x, t)) \notin D_{\Pi}$. Par conséquent, D_{Π} est pseudoconvexe par rapport à x; donc d'après l'unique théorème de [5], D_{Π} est pseudoconvexe.

2°. Réciproquement, supposons que la région D_{Π} déterminée par D et par une variéte quelconque $\prod$ de la forme exposée dans le lemme, soit pseudoconvexe. Soient C, C_1, C_2 les trois domaines dans la définition 2:

$$C: |x-x_0| < \rho, \ |y_i - f_i(x)| < r_i, \ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$
$$C_1: \rho' < |x-x_0| < \rho, \ |y_i - f_i(x)| < r_i, \ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$
$$C_2: |x-x_0| < \rho, \ |y_i - f_i(x)| < r'_i, \ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$

où l'on peut supposer que $f_i(x)$ sont des polynômes, d'après la remarque 2. Prouvons que l'hypothèse $C_1 + C_2 \subset D$ entraîne $C \subset D$.

Transformons l'espace $x, y_1, \cdots, y_{n-1}$ à l'espace $X, Y_1, \cdots, Y_{n-1}$ par

$$X = x - x_0, \ Y_i = y_i - f_i(x), \ (i=1, 2, \cdots, n-1).$$

Alors, par rapport aux variables $X, Y_1, \cdots, Y_{n-1}$, l'image D' de D par cette transformation satisfait à l'hypothèse que nous avons supposé pour D au commencement de ce 2°. Donc on peut supposer que $x_0 = 0$, $f_i(x) \equiv 0$, c'est-à-dire que les domaines C, C_1, C_2 ont les formes:

$$C: |x| < \rho, \ |y_i| < r_i, \ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$
$$C_1: \rho' < |x| < \rho, \ |y_i| < r_i, \ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$
$$C_2: |x| < \rho, \ |y_i| < r'_i, \ (i=1, 2, \cdots, n-1).$$

Maintenant, pour raisonner par l'absurde, supposons que $C \not\subset D$, et désignons par $\sum_k$ l'ensemble

$$|x|<\rho,\ |y_i|<r_i,\ |y_j|<r'_j,\ (1\leqq i\leqq k,\ k<j<n).$$

Alors, puisque $C=\sum_{n-1}\not\subset D$, il y a un entier l tel que $\sum_l\not\subset D$ et tel que, si $l>1$, on a $\sum_{l-1}\subset D$. Soit (a, b) un point de $\sum_l - D$; on a $|b_l|\geqq r'_l$, $|a|\leqq\rho'$. Enfin soit $\prod$ la variété analytique définie par $y_i=b_i$, $(i\neq l)$, $y_l=u$, où u est un paramètre complexe. La région D_{Π} est l'ensemble ouvert $\{(x, u)\,|\,(x, y)\in D,\ y_i=b_i,\ (i\neq l),\ y_l=u\}$. Prenons trois domaines suivants:

$$C': |x|<\rho,\ |u|<r_l,$$
$$C'_1: \rho'<|x|<\rho,\ |u|<r_l,$$
$$C'_2: |x|<\rho,\ |u|<r'_l,$$

alors on a $C'_1+C'_2\subset D_{\Pi}$. Par conséquent, on a $C'\subset D_{\Pi}$, car D_{Π} est pseudoconvexe par rapport à x. Donc on a $(a, b_l)\in D_{\Pi}$; c'est absurde.

Lemme 2. *Si une région D est pseudoconvexe* (III, y_1) *par rapport à x, D est pseudoconvexe par rapport à x.*

Preuve. En vertu du lemme 1, il suffit de prouver que, si D est pseudoconvexe (III, y_1) par rapport à x, alors la région D_{Π} déterminée par D et par $\prod$ est pseudoconvexe par rapport à x, où $\prod$ est une variété de la forme exposée dans le lemme 1, mais d'ailleurs arbitraire. Pour raisonner par l'absurde, supposons que la région D_{Π} déterminée par D et par $\prod$ ne soit pas pseudoconvexe par rapport à x, où $\prod$ est une variété de la forme

$$\prod: y_i=a_iu+b_i(x),\ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$

satisfaisant aux conditions dans le lemme 1. Alors il existe trois domaines fermés

$$C: |x-x_0|\leqq\rho,\ |u-f(x)|\leqq r,$$
$$C_1: \rho'\leqq|x-x_0|\leqq\rho,\ |u-f(x)|\leqq r,$$
$$C_2: |x-x_0|\leqq\rho,\ |u-f(x)|\leqq r'(<r),$$

tels que $C_1+C_2\subset D_{\Pi}$ et $C\not\subset D_{\Pi}$, où $f(x)$ est un polynôme.

Or on peut supposer que a_1 n'est pas nul, puisque, si $a_1=0$, on peut trouver deux nombres a'_1 et c tels que $C_1+C_2\subset D_{\Pi'}$ et $C\not\subset D_{\Pi}$. où $\prod'$ est la variété

$$y_1=a'_1u+b_1(x)+c,\ y_i=a_iu+b_i(x),\ (i=2, 3, \cdots, n-1).$$

D_{Π}, C, C_1, C_2, et $b_1(x)$ jouissent de la propriété suivante: Soit $u=f(x, t)$ une fonction continue sur $\{|x-x_1|\leqq r_1,\ 0\leqq t\leqq 1\}$ et holomorphe en x sur $|x-x_1|\leqq r_1$ pour tout t fixe. Supposons que $(x_1, f(x_1, 0))\notin D_{\Pi}$ et $a_1f'(x_1, 0)+b'_1(x_1)\neq 0$, et que $(x, f(x, 0))\in D_{\Pi}$ pour $0<|x-x_1|\leqq r_1$; alors pour tout ε positif, il existe un δ positif tel que pour tout t dans $0\leqq t<\delta$ la relation $(x, f(x, t))\notin D_{\Pi}$ soit remplie par un certain point x dans $|x-x_1|<\varepsilon$.

En effet, soit $u=f(x, t)$ une fonction satisfaisant aux conditions expliquées ci-dessus. Posons

$$y_i = f_i(x, t) = a_i f(x, t) + b_i(x), \ (i=1, 2, \cdots, n-1);$$

alors $f_i(x, t)$ sont définis et continus sur l'ensemble $\{|x-x_1| \leqq r_1, 0 \leqq t \leqq 1\}$ et holomorphes sur $|x-x_1| \leqq r_1$ pour tout t fixe. En plus ces fonctions satisfont aux conditions que: $(x_1, f_1(x_1, 0), \cdots, f_{n-1}(x_1, 0)) \notin D$ et que $(x, f_1(x, 0), \cdots, f_{n-1}(x, 0)) \in D$ pour $0 < |x-x_1| \leqq r_1$ et enfin que $f_1'(x_1, 0) \neq 0$. Donc, d'après la pseudoconvexité (III, y_1) de D par rapport à x, il existe un δ positif tel que, pour tout t dans $0 \leqq t < \delta$, $(x, f_1(x, t), \cdots, f_{n-1}(x, t)) \notin D$ subsiste, c'est-à-dire que $(x, f(x, t)) \notin D_{\mathrm{II}}$ soit remplie par un certain point x dans $|x-x_1| < \varepsilon$, où ε est un nombre positif arbitrairement donné auparavant.

Maintenant, transformons l'espace x, u à l'espace X, U par

$$X = x, \ U = u + a_1^{-1} b_1(x);$$

alors l'image D' de D_{II} est pseudoconvexe (III, U) par rapport à X (ou pseudoconvexe (III) par rapport à U au sens de la définition 3, [3]); ceci est aisément vérifié. Donc d'après le corollaire 2, [5], D' est pseudoconvexe en tant qu'une région dans l'espace X, U. En outre, les images de C, C_1, C_2 par cette transformation sont les trois domaines suivants:

$$\begin{aligned} C'&: |X-x_0| \leqq \rho, \ |U-F(X)| \leqq r, \\ C_1'&: \rho' \leqq |X-x_0| \leqq \rho, \ |U-F(X)| \leqq r, \\ C_2'&: |X-x_0| \leqq \rho, \ |U-F(X)| \leqq r', \end{aligned}$$

où $F(X) = f(X) + a_1^{-1} b_1(X)$. C'est en contradiction avec la pseudoconvexité (II) de D' par rapport à X (ou la pseudoconvexité (II) de D' par rapport à U au sens de la définition 2, [3]), car on a $C_1' + C_2' \subset D'$ et $C' \not\subset D'$. C.Q.F.D.

Remarque 3. D'après le lemme 2, par rapport à x, la pseudoconvexité (III, y_1) et les pseudoconvexités (O), (I), (II) sont équivalentes. Donc nous pouvons dire simplement qu'une région D est pseudoconvexe par rapport à x, non seulement si D est pseudoconvexe (O) ou (I) ou (II) par rapport à x, mais encore si D est pseudoconvexe (III, y_1) par rapport à x.

Références

[1] I. Kimura: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. Proc. Japan Acad., **41** (7), 535–540 (1965).
[2] ——: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. II. Proc. Japan Acad., **41** (9), 791–794 (1965).
[3] ——: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. III. Proc. Japan Acad., **42** (2), 125–130 (1966).
[4] ——: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. IV. Proc. Japan Acad., **42** (2), 131–135 (1966).
[5] ——: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. V. Proc. Japan Acad., **42** (3), 210–212 (1966).