173. Endgültige Fundamentalsätze der Kugelkongruenzentheorie im konformen Raume, I.

By Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Nov. 2, 1928.)

In meiner Abhandlung: Differentialkugelgeometrie, II[1] habe ich dem Fundamentalsatze der Theorie von Kugelkongruenzen $\xi=\xi(u^1, u^2)$, $((\xi\xi)_5=1)$ mit zwei Enveloppenmänteln $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(u^1,u^2)$, $((\mathfrak{x}\mathfrak{x})_5\equiv 0)$; $\bar{\mathfrak{x}}=\bar{\mathfrak{x}}(u^1, u^2)$, $((\bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{x}})_5\equiv 0)$ im konformen Raume fünf Gestalten I–V gegeben[2]. Z.B. hiessen I und V:

I. *Sind zwei quadratische Formen* $\mathfrak{G}_{hk}(u^1, u^2)\, du^h du^k$ *und* $D_{hk}(u^1,u^2)\, du^h du^k$, *von denen die erste positiv definit ist, so vorgeschrieben, dass zwischen ihnen die Differentialgleichungen* $(555)_2$ *gelten, so existieren für* $(555)_1$ *stets Kugelkongruenzen, die diese Formen zu Grundformen haben und werden bis auf konforme Transformationen eindeutig bestimmt. Es gibt im Falle* $(555)_3$ *und* $(555)_4$ *eine ein-parametrige Schar wesentlich verschiedener Kugelkongruenzen, die dieselben Grundformen haben*[3].

V. *Wenn drei Differentialformen* $\mathfrak{G}_{hk}(u^1, u^2)\, du^h du^k$, $\vartheta_{hk}(u^1,u^2) du^h du^k$ *und* $\bar\vartheta_{hk}(u^1,u^2) du^h du^k$, *von denen die erste positiv definit ist, mit den Bendingungen* (616), (628) *und* (629) *gegeben sind, dann lässt sich* $\mathfrak{M}_l$ *aus* (628) *bestimmen, und also wird* (614) *integrierbar, sodass eine Kugelkongruenz* $\xi(u^1, u^2)$ *dadurch bis auf konforme Transformationen sich eindeutig so bestimmen lässt, dass* $\xi(u^1, u^2)$ *die drei gegebenen Formen zu Grundformen hat*[4].

---

1) The Science Reports of the Tohoku Imperial University, **17** (1928).

2) Ebenda, SS. 373, 380, 386, 393, 395. Jede Gestalt hat je einen Vorteil. Vgl. Art. 138, a.a.O. Die Theorie von allgemeinen Kugelkongruenzen enthält die N.E. Flächentheorie im Ebenen-Raum als ein Spezialfall, während die konforme Flächentheorie der N.E. Theorie beliebiger spezieller Flächen entspricht.

3) Ebenda, S. 373.

4) Ebenda, S. 395.

Dabei war die Bezeichnung wie folgt:

$$D_{hk}=-(\mathfrak{x}_h\xi_k)_5,\ D=D_{11}D_{22}-D_{12}^2;\ \bar{D}_{hk}=-(\bar{\mathfrak{x}}_h\xi_k)_5,\ \bar{D}=\bar{D}_{11}\bar{D}_{22}-\bar{D}_{12}^2;$$

$$\mathfrak{G}_{hk}=(\xi_h\xi_k)_5,\ \mathfrak{G}=\mathfrak{G}_{11}\mathfrak{G}_{22}-\mathfrak{G}_{12}^2;\ G_{hk}=(\mathfrak{x}_h\mathfrak{x}_k)_5,\ G=G_{11}G_{22}-G_{12}^2;$$

$$A=\frac{1}{2i}(\mu\mathfrak{x}-\bar{\mu}\bar{\mathfrak{x}}),\ (AA)_5=1;\ U=\frac{1}{2}(\mu\mathfrak{x}+\bar{\mu}\bar{\mathfrak{x}}),\ \ (UU)_5=1;$$

$$\vartheta_{hk}=-(A_k\xi_h)_5,\ \vartheta=\vartheta_{11}\vartheta_{22}-\vartheta_{12}^2;\ \bar\vartheta_{hk}=-(U_k\xi_{h5}),\ \bar\vartheta=\bar\vartheta_{11}\bar\vartheta_{22}-\bar\vartheta_{12}^2;$$

$$\mathfrak{G}^{hk}=\frac{1}{\mathfrak{G}}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\mathfrak{G}_{hk}},\ \mathfrak{M}_h=(AU_h)_5,\ \mathfrak{E}^{11}=0,\ -\mathfrak{E}^{21}=\mathfrak{E}^{12}=\mathfrak{G}^{-\frac{1}{2}},\ \mathfrak{E}^{22}=0;$$

$$E^{11}=0,\ -E^{21}=E^{12}=G^{-\frac{1}{2}},\ E^{22}=0.$$

Bei diesen Sätzen habe ich die Normierung von Punkten $\mathfrak{x}$ und $\overline{\mathfrak{x}}$ zuerst[1] ganz allgemein gemacht und dann *eine* Normierungsmethode (S. 364, Zeile 7, a.a.O.) gegeben. Die Individualisierung von A innerhalb des Kugelbüschels $l\mathfrak{x}+m\overline{\mathfrak{x}}$ habe ich zuerst auch ganz allgemein gemacht und dann *eine* Individualisierungsmethode eingeführt (S. 362, 1°, a.a.O.).

Diese bisherigen Theorien hatten zwei Nachteile: (1) Bei I war die Symmetrie (für D_{hk}, $\overline{D}_{hk}$) scheinbar unterdruckt, trotzdem die Theorie symmetrisch sein sollte. (2) Es war sehr schwer die auftretenden Grössen D_{hk}, $\overline{D}_{hk}$, A, U, ϑ_{hk}, $\overline{\vartheta}_{hk}$ mittels ξ, ξ_h, ξ_{hk} allein darzustellen. Aus diesem Grunde hat Herr Prof. Kubota diesen Nachteil dadurch beseitigt, dass er zwei quadratische Formen $\mathfrak{g}_{hk}(u^1, u^2)\, du^h du^k$, $\sqrt{-\mathfrak{g}} \times J(D_{hk} du^h du^k,\ \overline{D}_{hk} du^h du^k)$ und eine biquadratische Form $(D_{hk} du^h du^k.\ \overline{D}_{hk} du^h du^k)$ für Grundformen einführte[2]. Aber dabei war die Anzahl von begleitenden Bedingungen sieben (drei differentiell und vier algebraisch), die alle nicht einfach waren, während beim obigen Satze I sie nur eins war und die nötigen Grundformen aus zwei quadratischen Formen bestanden. Überdies kam man dadurch zu weit von den Ableitungsgleichungen. Den Nachteil (1) kann man sofort beseitigen, indem man $\overline{D}_{hk}$ mittels $\mathfrak{g}_{hk}$ und D_{hk} allein darstellt, was möglich ist.

Im folgenden möchte ich *eine sehr natürliche Normierungsweise von* $\mathfrak{x}$ (für Kugelkongruenzen) und *eine sehr zweckmässige Individualisierungsweise von A, U einführen, womit alle obige Nachteile vollständig beseitigt werden.* Natürlich wird die entsprechende Theorie auch für die Laguerresche Geometrie anwendbar. Dadurch wird der Satz V auch dem *Fundamentalsatze*[3] (von C. E. Wilder) *in der Differentialgeometrie von zweidimesionalen Mannigfaltigkeiten im Euklidischen oder N.E. Raume von vier Dimensionen* eine vervollständigte Form geben.

1. Sechs natürliche Normierungsweisen für die Enveloppenmäntelpunkte der Kugelkongruenzen im konformen Raume.

(i) Setzen wir[4]

(1) $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{hk} D_{hk} : 2, \qquad \overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{g}^{hk} \overline{D}_{hk} : 2,$

1) Um damit den Übergang zu den N.E. und Euklidischen Geometrien zu ermöglichen!

2) Unter der Presse für: the Science Reports of the Tohoku Imperial University.

3) C.E. Wilder, Differential Geometry of an m-dimensional manifold in a Euclidean Space of n Dimensions, Trans. Am. M.S. **25** (1923).

4) $\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{H}})$ ist die K-Verallgemeinerung der dualistischen Mittelkrümmung. Siehe Abschnitt II, Fussnote 1), S. 157.

und normieren $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ folgendermassen[1]:

$$(2)_1 \quad \check{\mathfrak{x}} = \sqrt{\overline{\mathfrak{H}}/\mathfrak{H}}\,\mathfrak{x}, \qquad \check{\bar{\mathfrak{x}}} = \sqrt{\mathfrak{H}/\overline{\mathfrak{H}}}\,\bar{\mathfrak{x}};$$

$$(2)_2 \quad \mathfrak{x}' = \overline{\mathfrak{H}}\mathfrak{x}, \qquad \bar{\mathfrak{x}}' = \mathfrak{H}\bar{\mathfrak{x}};$$

$$(2)_3 \quad \mathfrak{x}'' = \mathfrak{x}/\mathfrak{H}, \qquad \bar{\mathfrak{x}}'' = \bar{\mathfrak{x}}/\overline{\mathfrak{H}}.$$

(ii) Setzen wir[2]

$$(3) \quad H = G^{hk}D_{hk}:2, \qquad \overline{H} = G^{hk}\overline{D}_{hk}:2$$

und normieren $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ folgendermassen[3]:

$$(4)_1 \quad \mathfrak{x}' = \sqrt{H/\overline{H}}\,\mathfrak{x}, \qquad \bar{\mathfrak{x}}' = \sqrt{\overline{H}/H}\,\bar{\mathfrak{x}};$$

$$(4)_2 \quad \mathfrak{x}'' = \mathfrak{x}/\overline{H}, \qquad \bar{\mathfrak{x}}'' = \bar{\mathfrak{x}}/H;$$

$$(4)_3 \quad \hat{\mathfrak{x}} = H\mathfrak{x}, \qquad \hat{\bar{\mathfrak{x}}} = \overline{H}\bar{\mathfrak{x}}.$$

2. Sechs Paare kovariante Tangentialkugeln einer Kugelkongruenz.

(i) Wir führem drei Paare Tangentialkugeln ein, die mit den Mäntelflächen $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$, $\bar{\mathfrak{x}}(u^1, u^2)$ der Kugelkongruenz $\xi(u^1, u^2)$ kovariant verbunden sind[4]:

$$(5)_1 \quad \chi \equiv \xi + \varepsilon\check{\mathfrak{x}} \equiv \xi + \varepsilon\sqrt{\overline{\mathfrak{H}}/\mathfrak{H}}\,k^{-1}\mathfrak{x}, \qquad \bar{\chi} \equiv \xi + \varepsilon\check{\bar{\mathfrak{x}}} \equiv \xi + \varepsilon\sqrt{\mathfrak{H}/\overline{\mathfrak{H}}}\,k^{-1}\bar{\mathfrak{x}},$$

$$(5)_2 \quad \chi' \equiv \xi + \varepsilon\mathfrak{x}' \equiv \xi + \varepsilon\overline{\mathfrak{H}}\mathfrak{x}, \qquad \bar{\chi}' \equiv \xi + \varepsilon\bar{\mathfrak{x}}' \equiv \xi + \varepsilon\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{x}}; \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$(5)_3 \quad \chi'' \equiv \xi + \varepsilon\mathfrak{x}'' \equiv \xi + \varepsilon\mathfrak{x}/\mathfrak{H}, \qquad \bar{\chi}'' \equiv \xi + \varepsilon\bar{\mathfrak{x}}'' \equiv \xi + \varepsilon\bar{\mathfrak{x}}/\overline{\mathfrak{H}}.$$

Die kovarianten Tangentialkugeln $\chi(\bar{\chi})$, $\chi'(\bar{\chi}')$ wollen wir bez. die *Kongruenztangentialkugeln erster und zweiter Art* nennen. Die Tangentialkugel $\chi''(\bar{\chi}'')$ ist eine Analogie der *Mittenkugel* Herrn Blaschkes in $\mathfrak{x}(\bar{\mathfrak{x}})$, die in der Laguerresceen Geometrie wichtige Rolle gespielt hat. Aus diesem Grunde wollen wir $\chi''(\bar{\chi})''$ für $\varepsilon = +1$ die *K-Mittenkugel* in $\mathfrak{x}(\bar{\mathfrak{x}})$ und $\chi''(\bar{\chi}'')$ für $\varepsilon = -1$ die *inverse K-Mittenkugel* nennen.

---

1) In der Tat bei der Umnormierung $\mathfrak{x}^* = \omega\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}^* = \omega^{-1}\bar{\mathfrak{x}}$, gilt: $D^*_{hk} = \omega D_{hk}$, $\overline{D}^*_{hk} = \omega^{-1}\overline{D}_{hk}$, sodass $\mathfrak{H}^* = \omega\mathfrak{H}$, $\overline{\mathfrak{H}}^* = \omega^{-1}\overline{\mathfrak{H}}$ wird.

2) $H(\overline{H})$ ist die K-Verallgemeinerung der Mittelkrümmung. Siehe Abschnitt II, a.a.O.

3) In der Tat, bei der Umnormierung $\mathfrak{x}^* = \omega\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}^* = \omega^{-1}\bar{\mathfrak{x}}$ gilt: $H^* = \omega^{-1}H$, $\overline{H}^* = \omega\overline{H}$. Jedenfalls ist die bisherige Forderung $(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})_5 = 2k^2$, $\mu\bar{\mu} = k^{-2}$ noch beibehalten. Diese Normierungsweisen versagen für Zentralkugelkongruenzen $\mathfrak{H} = 0$ $(\overline{\mathfrak{H}} = 0)$, $H = 0$ $(\overline{H} = 0)$.

4) *Sie sind unter den betreffenden Tangentialkugeln dadurch charakterisiert, dass die Tangentialkugel* ξ, *der Flächenpunkt* $\mathfrak{x}(\bar{\mathfrak{x}})$, *die dortige Zentralkugel und* 1°. $\chi(\bar{\chi})$, 2°. $\chi'(\bar{\chi}')$, 3°. $\chi''(\bar{\chi}'')$ bez. *das folgende Normierungs- und Parameterinvariante D.V. bilden*: 1°. $kH\sqrt{\overline{\mathfrak{H}}/\mathfrak{H}}$; $(k\overline{H}\sqrt{\mathfrak{H}/\overline{\mathfrak{H}}})$; 2°. $H/\overline{\mathfrak{H}}$, $(\overline{H}/\mathfrak{H})$; 3°. $H\mathfrak{H}$, $(\overline{H}\,\overline{\mathfrak{H}})$.

(ii) Wir führen noch drei Paare Tangentialkugeln ein, die mit den Mäntelflächen ebenfalls kovariant verbunden sind[1]:

$$(6)_1 \quad \eta' \equiv \xi + \varepsilon\mathfrak{x}' \equiv \xi + \varepsilon\sqrt{H/\overline{H}}\,k^{-1}\mathfrak{x}, \qquad \overline{\eta}' \equiv \xi + \varepsilon\overline{\mathfrak{x}}' \equiv \xi + \varepsilon\sqrt{\overline{H}/H}\,k^{-1}\overline{\mathfrak{x}};$$

$$(6)_2 \quad \eta'' \equiv \xi + \varepsilon\mathfrak{x}'' \equiv \xi + \varepsilon\mathfrak{x}/\overline{H}, \qquad \overline{\eta}'' \equiv \xi + \varepsilon\overline{\mathfrak{x}}'' \equiv \xi + \varepsilon\overline{\mathfrak{x}}/H; \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$(6)_3 \quad \eta \equiv \xi + \varepsilon\hat{\mathfrak{x}} \equiv \xi + \varepsilon H\mathfrak{x}, \qquad \overline{\eta} \equiv \xi + \varepsilon\hat{\overline{\mathfrak{x}}} \equiv \xi + \varepsilon\overline{H}\,\overline{\mathfrak{x}}.$$

1) $\eta\,(\overline{\eta})$ ist für $\varepsilon = +1$ die sogenannte *Zentralkugel* Herrn Thomsens. *Die ersten zwei Paare sind unter den betreffenden Tangentialkugeln dadurch charakterisiert, dass die Tangentialkugel* ξ, *der Flächenpunkt* $\mathfrak{x}\,(\overline{\mathfrak{x}})$, *die dortige Zentralkugel und* 1°. $\eta'(\overline{\eta}')$, 2°. $\eta''(\overline{\eta}'')$ *bez. das folgende Normierungs- und Parameter-invariante Doppelverhältnis bilden*: 1°. $k^{-1}\sqrt{H\overline{H}}$, $(k^{-1}\sqrt{\overline{H}H})$; 2°. $H\overline{H}$, $(\overline{H}H)$.