PAPERS COMMUNICATED

62. Über die Fermatsche Vermutung, II.

By Taro MORISHIMA.
Shizuoka Kotogakko.

(Rec. April 15, 1929. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1929.)

Satz: Es sei

$$x^p+y^p+z^p=0, \qquad (x, y, z)=1, \qquad p \nmid xyz.$$

Dann ist

$$\sum_{h=1}^{p-1} h^{p-1} t^h \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p^2),$$

wo $t \equiv -\frac{y}{z},\ -\frac{z}{y},\ -\frac{z}{x},\ -\frac{x}{z},\ -\frac{x}{y},\ -\frac{y}{x} \qquad (\mathrm{mod}\ p^2).$

Beweis: Es ist

$$f(\rho)=\rho^y x+\rho^{-x} y \equiv x+y \qquad (\mathrm{mod}\ \lambda^2), \quad (1)$$

$$Nf(\rho)=b^p=\left(q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_e^{a_e}\right)^p,$$

wo $\rho=e^{\frac{2\pi i}{p}}$, $\lambda=1-\rho$, $q_h \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p)$ für $h=1, 2, \dots e$,

also $$[f(\rho)]^{\sum\limits_{h=0}^{p-2} r_{-h} S^h} = \pm\left[\prod_{h=1}^{e}\left((\rho, \eta_h)^p\right)^{a_h}\right]^p \equiv \pm 1 \qquad (\mathrm{mod}\ \lambda^{p+1}),^{1)} \quad (2)$$

wo r eine primitive Wurzel mod p ist, $r_{-h} \equiv -r^{-h}$ (mod p),

$$1 \leqq r_{-h} \leqq p-1, \quad S=(\rho : \rho^r), \quad \eta_h=e^{\frac{2\pi i}{q_h}}, \quad (\rho, \eta_h)=\sum_{t=1}^{q_h-1} \rho^{\mathrm{Ind}\,t} \eta_h^{\ t}.$$

Aus (1) folgt

$$[f(\rho)]^{k_h S^h} \equiv (x+y)^{k_h} \qquad (\mathrm{mod}\ \lambda^2),$$

wo $r_{-h}=-r^{-hp^n}+pk_h$, $n \geqq 1$ also

$$[f(\rho)]^{pk_h S^h} \equiv (x+y)^{k_h p} \qquad (\mathrm{mod}\ \lambda^{p+1}),$$

$$[f(\rho)]^{\sum\limits_{h=0}^{p-2} pk_h S^h} \equiv (x+y)^{\sum\limits_{h=0}^{p-2} k_h p} \equiv (x+y)^{\sum\limits_{h=0}^{p-2} r_{-h} + \sum\limits_{h=0}^{p-2} r^{-hp^n}} \qquad (\mathrm{mod}\ \lambda^{p+1}),$$

1) E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, **3** (1927), 281, 299.

wegen $\sum_{h=0}^{p-2} r_{-h} = \frac{p(p-1)}{2}$ ist also

$$[f(\rho)]^{2\sum_{h=0}^{p-2} pk_h S^h} \equiv (x+y)^{2\sum_{h=0}^{p-2} r^{-hp^n}} \quad (\text{mod } \lambda^{p+1}); \quad (3)$$

$$[f(\rho)]^{2\sum_{h=0}^{p-2} r_{-h} S^h} = [f(\rho)]^{-2\sum_{h=0}^{p-2} r^{-hp^n} S^h + 2\sum_{h=0}^{p-2} pk_h S^h},$$

nach (2) und (3) ist also

$$[f(\rho)]^{2\sum_{h=0}^{p-2} r^{-hp^n} S^h} \equiv (x+y)^{2\sum_{h=0}^{p-2} r^{-hp^n}} \quad (\text{mod } \lambda^{p+1}),$$

$$\prod_{h=0}^{p-2} \left[\frac{f(\rho^{r^h})}{f(1)}\right]^{2r^{-hp^n}} \equiv 1 \quad (\text{mod } \lambda^{p+1}). \quad (4)$$

Nun ist

$$\log \prod_{h=0}^{p-2} \left[\frac{f(\rho^{r^n})}{f(1)}\right]^{2r^{-hp^n}} = \sum_{h=0}^{p-2} r^{-hp^n} \log\left[\frac{f(\rho^{r^h})}{f(1)}\right]^2$$

$$\equiv \frac{d_0^{p^n} \log [f(e^u)]^2}{du^{p^n}} X(\rho) \quad (\text{mod } p^{n+1}),\ ^{1)}$$

wo $X(\rho) = \sum_{h=0}^{p-2} r^{-hp^n} \rho^{r^h}$, also nach (4)

$$\frac{d_0^{p^n} \log [f(e^u)]^2}{du^{p^n}} X(\rho) \equiv 0 \quad (\text{mod } \lambda^{p+1}),$$

folglich

$$\frac{d_0^{p^n} \log f(e^u)}{du^{p^n}} \equiv 0 \quad (\text{mod } p^2),$$

d.h.

$$\frac{d_0^{p^n} \log (x + e^{-(x+y)u} y)}{du^{p^n}} \equiv 0 \quad (\text{mod } p^2),$$

da $X(\rho) \equiv \sum_{h=0}^{p-2} r^{-hp^n}(1 - r^h \lambda) \equiv -\lambda \sum_{h=0}^{p-2} r^{-h(p^n-1)} \equiv -\lambda(p-1) \equiv \lambda \quad (\text{mod } \lambda^2)$.

---

1) nach Kummer; vgl. Hilbert, Théorie des Corps de Nombres Algébriques (Trad. Lévy-Got). S. 341.

Es ist also

$$\frac{d_0^{p^n}\log(x+e^u y)}{du^{p^n}}=\frac{d_0^{p^n-1}}{du^{p^n-1}}\left(\frac{1}{1-e^{-u}t}\right)\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p^2),$$

wo $-\dfrac{x}{y}\equiv t \pmod{p^2}$, folglich

$$\frac{d_0^{p^n-1}}{du^{p^n-1}}\left(\sum_{l=0}^{p^2-1}e^{-lu}t^l\right)+\frac{d_0^{p^n-1}}{du^{p^n-1}}\left(\frac{e^{-p^2u}t^{p^2}}{1-e^{-u}t}\right)\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p^2),$$

also

$$\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{h=1}^{p-1}(kp+h)^{p-1}t^{kp+h}\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p^2), \qquad (5)$$

da

$$\frac{d_0^{p^n-1}}{du^{p^n-1}}\left(\frac{e^{-p^2u}}{1-e^{-u}t}\right)\equiv\frac{d_0^{p^n-1}}{du^{p^n-1}}\left(\frac{1}{1-e^{-u}t}\right)\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p^2).$$

Nun ist

$$\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{h=1}^{p-1}(kp+h)^{p-1}t^{kp+h}\equiv\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{h=1}^{p-1}(h^{p-1}-h^{p-2}kp)\,t^{kp+h} \qquad (\mathrm{mod}\ p^2),$$

also nach (5)

$$\left(\sum_{h=1}^{p-1}h^{p-1}t^h\right)\frac{t^{p^2}-1}{t^p-1}\equiv p\sum_{h=1}^{p-1}h^{p-2}t^h\sum_{k=0}^{p-1}kt^{kp} \qquad (\mathrm{mod}\ p^2),$$

folglich

$$\sum_{h=1}^{p-1}h^{p-1}t^h\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p^2),$$

da nach Kummer $\sum\limits_{h=1}^{p-1}h^{p-2}t^h\equiv 0 \pmod{p}$, $p\nmid t-1$.