103. Über das Holomorphie einer endlichen Abelschen Gruppe.

Von Kenjiro SHODA.

(Rec. Sept. 15, 1929. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1929.)

Ist eine endliche Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt von Abelschen Gruppen, deren Ordnungen teilerfremde Primzahlpotenzen sind, so ist die Automorphismengruppe bzw. das *Holomorphie*[1] von $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt der einzelnen. Daher betrachte ich eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$, deren Invarianten $p^{e_1}, p^{e_2}, \ldots\ldots, p^{e_m}$ sind, wo p eine Primzahl bedeutet.

Der Automorphismenring $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{A}$ besteht aus den ganzzahligen Matrizen P, die *links* modulo der Diagonalmatrix F mit diagonalen Koeffizienten $p^{e_1}, p^{e_2}, \ldots\ldots, p^{e_m}$ betrachtet werden sollen und der Gleichung $PF=FP'$ genügen mit einer ganzzahligen Matrix P'.[2] Die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ (die Einheitengruppe von $\mathfrak{o}$) besteht dann aus den Matrizen aus $\mathfrak{o}$, deren Determinanten durch p nicht teilbar sind.[3]

Es dürfte nicht ohne Interesse sein zu bemerken, daß die von W. Burnside gegebene Darstellungsweise des Holomorphies einer Abelschen Gruppe vom Typus (1, 1, ……, 1) für eine beliebige Abelsche Gruppe verallgemeinert werden kann. Wir beweisen nämlich: *Das Holomorphie von $\mathfrak{A}$ ist der Gruppe $\mathfrak{H}$ isomorph, die aus den nichthomogenen Substitutionen*

$$y_j=\sum_{i=1}^{m} h_{ij}\, x_i+g_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m),$$

1) Vgl. W. Burnside, The theory of groups of finite order, 2. Aufl. (Cambridge, 1911), §§ 64, 87; und A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl. (Berlin, 1927), 123.

2) A. Chatelet, Les groups abélien finis et les modules de points entiers, Chap. IV, (Lille, 1925).

3) K. Shoda, Ueber die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe, Math. Ann. **100**, 674, § 1. In dieser Arbeit habe ich die Matrizen betrachtet, die rechts modulo F betrachtet werden und der Gleichung $FP=P'F$ genügen. Dadurch erhält man aber in der Tat eine antistrophe Darstellung von $\mathfrak{G}$ (Frobenius, Theorie der hyperkomplexen Grössen, Sitzungsberichte der Akad. der Wiss. zu Berlin, 1903). Man darf offenbar diese antistrophe Darstellung auch als eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ betrachten, wenn es um einer einzigen Darstellung handelt. Wir vermeiden hier trotzdem diese antistrophe Darstellung.

Vgl. M. Sono. Koto Daisu-gaku (japanisch), Bd. 1, Kap. 3, 1928.

oder, was dasselbe ist, aus den Matrizen

$$H=\begin{pmatrix} P & R_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

besteht, wo P *(=die transponierte Matrix von* (h_{ij})*) eine Automorphismus-matrix aus* $\mathfrak{G}$ *und* R_g *eine einspaltige Matrix mit konstanten Koeffizienten* $g_1, g_2, \ldots\ldots, g_m$ *bedeutet. Dabei soll* g_i *modulo* p^{e_i}*, also* R_g *modulo* F *betrachtet werden.*

Der Beweis ergibt sich ganz analog wie bei W. Burnside. Es ist klar, daß die Gesamtheit solcher Substitutionen (Matrizen H) eine Gruppe bildet. Bedeutet $\chi(\mathfrak{A})$ bzw. $\chi(\mathfrak{G})$ die Ordnung von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{G}$, so ist die Ordnung von $\mathfrak{H}$ gleich dem Produkt $\chi(\mathfrak{A})\,\chi(\mathfrak{G})$, also gleich der Ordnung des Holomorphies von $\mathfrak{A}$. Man zeigt leicht, daß die Matrizen

$$\begin{pmatrix} E_m & R_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

einen Abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{H}$ bilden, die zu $\mathfrak{A}$ isomorph ist. Dabei bedeutet E_m die Einheitsmatrix des Grades m. Zum Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, daß jede mit $\mathfrak{A}'$ elementweise vertauschbare Matrizen aus $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{A}'$ enthalten ist. Aus

$$\begin{pmatrix} P & R_h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & R_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & R_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & R_h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt aber

$$\begin{pmatrix} P & PR_g+R_h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P & P+R_h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad PR_g\equiv R_g \pmod{F}.$$

Da diese Gleichung für jedes Element aus $\mathfrak{A}'$ bestehen soll, so muss $P=E_m$ sein, was zu beweisen war.

Bezeichnet man einen maximalen nilpotenten Unterring des Automorphismenringes $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{m}$, so bildet der Strahl $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ eine Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$,[1] oder die p-Automorphismengruppe von $\mathfrak{A}$. Durchläuft P die Elemente aus $\mathfrak{S}=\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$, so bilden die Matrizen H das *p-Holomorphie* von $\mathfrak{A}$.

Wir betrachten nun den speziellen Fall $e_1=e_2=\ldots\ldots=e_m=1$ und beweisen einige Burnsideschen Sätze.[2] Der Automorphismenring $\mathfrak{o}$ besteht dann aus den modulo p betrachteten Matrizen $P=(h_{ij})$ des

1) K. Shoda, Ueber die Einheitengruppe eines endlichen Ringes, § 2, Satz 3, die in den Math. Ann. erscheinen wird. Vgl. die Voranzeige in Proc. Vol. V. No. 3, 1929.

2) W. Burnside, On some properties of groups, whose order are powers of primes, II, §§ 13, 14, Proc. of the London Math. Soc. Ser. 2, Vol. 11, p. 225.

Grades m, die wir in der Form

$$P=\sum_{i,j=1}^{m} h_{ij} E_{ij}$$

schreiben. Dann bilden die Matrizen

$$M=\sum_{i<j} h_{ij} E_{ij}$$

einen maximalen nilpotenten Unterring $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{o}$.[1] Das p-Holomorphie von $\mathfrak{A}$ besteht also aus den Matrizen

$$\begin{pmatrix} E_m+M & R_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad E_{m+1}+\sum_{i<j=2}^{m+1} h_{ij} E_{ij}\,.$$

Also erhält man: *Das Holomorphie einer Abelschen Gruppe von der Ordnung p^m und vom Typus* (1, 1, ..., 1) *ist der p-Automorphismengruppe einer Abelschen Gruppe von der Ordnung p^{m+1} und vom Typus* (1, 1, ..., 1) *isomorph.*

Wir konstruieren nun die *Reihe von Ableitungen* (Kommutatorgruppen) der p-Automorphismengruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{A}$. Die Mehtode ist aber nach dem obigen Satz auch für die Konstruktion der Reihe von Ableitungen des Holomorphies von $\mathfrak{A}$ anwendbar.[2]

Es ist klar, daß $\mathfrak{m}^{\alpha}$ für jedes α ein (zweiseitiges) Ideal von $\mathfrak{m}$ bildet, also ist der Strahl $\{\mathfrak{o},\ \underline{\mathfrak{m}|\mathfrak{m}^{\alpha}}\}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{S}=\{\mathfrak{o},\ \mathfrak{m}\}$.[3] Besonders ist $\{\mathfrak{o},\ \underline{\mathfrak{m}|\mathfrak{m}^{2}}\}$ die Kommutatorgruppe $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{K}_0=\mathfrak{S}$, $\{\mathfrak{o},\ \underline{\mathfrak{m}|\mathfrak{m}^{2^2}}\}$ die Kommutatorgruppe $\mathfrak{K}_2$ von $\mathfrak{K}_1$, u.s.w. Da die Faktorgruppe $\{\mathfrak{o},\ \underline{\mathfrak{m}|\mathfrak{m}^{2^{\varkappa}}}\}/\{\mathfrak{o},\ \underline{\mathfrak{m}|\mathfrak{m}^{2^{\varkappa+1}}}\}$ Abelsch ist,[4] so ist $\{\mathfrak{o},\ \underline{\mathfrak{m}|\mathfrak{m}^{2^{\varkappa+1}}}\}$ in der Kommutatorgruppe von $\{\mathfrak{o},\ \underline{\mathfrak{m}|\mathfrak{m}^{2^{\varkappa}}}\}$ enthalten. Der Strahl $\{\mathfrak{o},\ \underline{\mathfrak{m}|\mathfrak{m}^{\lambda}}\}$ wird ersichtlich durch die Elemente $E+E_{ij}$, $j-i\geqq\lambda$, erzeugt. Es ist aber

$$\begin{aligned}(E+E_{i,\,i+\nu})&(E+E_{i+\nu,\,i+\nu+\mu})(E+E_{i,\,i+\nu})^{-1}(E+E_{i+\nu,\,i+\nu+\mu})^{-1}\\ &=(E+E_{i,\,i+\nu})(E+E_{i+\nu,\,i+\nu+\mu})(E-E_{i,\,i+\nu})(E-E_{i+\nu,\,i+\nu+\mu})\\ &=E+E_{i,\,i+\nu+\mu}\,.\end{aligned}$$

Setzt man $\mu,\ \nu\geqq 1$; $\geqq 2$; $\geqq 2^2$; u.s.w., so erkennt man die Richtigkeit unserer Behauptung.[5]

---

1) K. Shoda, a.a. O. 4) § 1, Hilfssatz 3.

2) Die hier gegebene Aufklärung stimmt wesentlich mit der von W. Burnside überein. Die zum Schluss bemerkte Uebertragbarkeit ist aber erst nach unserer Aufklärung klar.

3) K. Shoda, a.a.O. 3) § 3, Satz 4. Dieser Satz soll etwas modifiziert werden. Der Beweis ergibt sich aber ganz analog.

4) K. Shoda, a.a.O. 3) § 3, Satz 5.

5) Für eine beliebige Abelsche Gruppe kann $\mathfrak{K}_1$ eine echte Untergruppe von $\{\mathfrak{o},\ \underline{\mathfrak{m}|\mathfrak{m}^{2}}\}$ sein. Beispiel: Eine zyklische Gruppe von der Ordnung p^e, $e>2$.

Ist $2^{\varkappa} \leqq m-1 < 2^{\varkappa+1}$, so ist ersichtlich $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{K}_1$, ..., $\mathfrak{K}_{\varkappa}$, $\mathfrak{K}_{\varkappa+1} = \mathfrak{E}$ die Reihe von Ableitungen von $\mathfrak{S}$. Die Ordnung $\chi(\mathfrak{S})$ von $\mathfrak{S}$ ist gleich $p^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ und $\chi(\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_1) = p^{m-1}$, $\chi(\mathfrak{K}_1/\mathfrak{K}_2) = p^{(m-2)+(m-3)}$, u.s.w. Der Typus der Faktorgruppe $\mathfrak{K}_i/\mathfrak{K}_{i+1}$ ist (1, 1, ..., 1), was aus der Konstruktion von $\mathfrak{m}^{2^{\varkappa}}$ folgt.

Zum Schluss bemerke ich, daß die hier gegebene Konstruktionsmethode in die Theorie der Einheitengruppe eines endlichen einfachen Ringes[1)] übertragbar ist. Man erhält dabei: *Es sei* $\mathfrak{o}$ *ein endlicher einfacher Ring,* $\mathfrak{G}$ *die Einheitengruppe von* $\mathfrak{o}$. *Ist* $\mathfrak{m}$ *ein maximaler nilpotenter Unterring von* $\mathfrak{o}$, *so ist der Strahl* $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ *eine Sylowgruppe von* $\mathfrak{G}$ *und*

$$\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}, \quad \{\mathfrak{o}, \underline{\mathfrak{m}|\mathfrak{m}^2}\}, \quad \{\mathfrak{o}, \underline{\mathfrak{m}|\mathfrak{m}^{2^2}}\}, \quad \ldots\ldots$$

die Reihe von Ableitungen der Sylowgruppe $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$.

---

1) Die Einheitengruppe eines endlichen einfachen Ringes ist nichts anderes als die allgemeine lineare homogene Gruppe, die Herr L. E. Dickson mit GLH $[m, p^n]$ bezeichnet. Vgl. L. E. Dickson, Linear groups with an exposition of the Galois field theory, Leipzig, 1901, S. 75.