12. *Zwei Sätze über die Matrizen.*

By Shôkichi IYANAGA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Rec. Feb. 1, 1930. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1930.)

Satz I: Von einer $(k,\ k+m)$-reihigen Matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,k+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,k+m} \end{pmatrix}$$

verschwinden alle Unterdeterminanten k-ten Grades ausser

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

doch sei $\varDelta$ von Null verschieden.[1] Dann ist

$$a_{i,k+j} = 0. \qquad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2, \dots\dots k. \\ j = 1,\ 2, \dots\dots m. \end{pmatrix}$$

Beweis: Wir beweisen $a_{1,k+1} = 0$.

Wir denken uns die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1k} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} \\ a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 \end{vmatrix}$$

auf zwei Arten entwickelt.

Erstens, nach der letzten Zeile; dann folgt nach der Vorraussetzung $\qquad D = 0.$

Zweitens, nach dem letzten Spalte; dann erhalten wir

$$D = \pm a_{1,k+1}\varDelta.$$

Und nach der Voraussetzung ist $\varDelta \neq 0$.

Also $\qquad a_{1,k+1} = 0.$

Satz II: Es sei $A = (a_{pq}) \qquad p,\ q = 1,\ 2, \dots\dots n.$

eine $(n,\ n)$-reihige Matrix, und

$$A^{(k)} = (A_{\mu\nu}) \qquad \mu,\ \nu = 1,\ 2, \dots\dots \lambda = \binom{n}{k}, \quad (n \geqq k)$$

---

1) Präziser: es braucht, wie man aus dem Beweise ersieht, nicht *alle* Unterdeterminanten k-ten Grades ausser Δ zu verschwinden; sondern nur die, die $k-1$ Spalten von Δ enthalten.

ihre k-te abgeleitete Matrix.[1]

Wenn $n>k$, und $A^{(k)}=E$ ist,[2] so ist

$$A=\omega E=\begin{pmatrix} \omega & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega \end{pmatrix}$$

wo ω eine k-te Einheitswurzel ist.

Beweis: *A ist Diagonalmatrix, d.h. $a_{pq}=0$ wenn $p\neq q$.*

Da $n\geqq k+1$ ist, können wir $k-1$ Ziffern $\alpha, \beta, \ldots\ldots \gamma$ unter $1, 2, \ldots\ldots n$ so wählen, dass sie von p und q und voneinander verschieden sind. Damit bilden wir eine Matrix:

$$\begin{vmatrix} a_{pp} & a_{p\alpha} & a_{p\beta} & \cdots & a_{p\gamma} & a_{pq} \\ a_{\alpha p} & a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & \cdots & a_{\alpha\gamma} & a_{\alpha q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{\gamma p} & a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & \cdots & a_{\gamma\gamma} & a_{\gamma q} \end{vmatrix}$$

und wenden hierauf Satz I an.

Es folgt ja $a_{pq}=0$.

2) $\qquad a_p=\omega, \quad \omega^k=1. \qquad p=1, 2, \ldots\ldots n.$

wo $a_{pp}=a_p$ gesetzt ist.

Da $\qquad A_{\mu\mu}=A_{\nu\nu}=1, \qquad \mu, \nu=1, 2, \ldots\ldots \lambda$

ist, haben wir $\qquad a_pa_\alpha a_\beta \ldots\ldots a_\gamma=a_qa_\alpha a_\beta \ldots\ldots a_\gamma=1,$

also $\qquad a_p=a_q. \qquad q, p=1, 2, \ldots\ldots n.$

Hiernach folgt $a_p^k=A_{\mu\mu}$ für passende Ziffer μ,

also $\qquad a_p=\omega, \quad \omega^k=1. \qquad p=1, 2, \ldots\ldots n.$

w. z. b. w.

---

1) Wegen der Definition, siehe z. B. Pascal, Repertorium, I, 138.

2) Herr K. Shôda hat mir freundlichst mitgeteilt, dass solche Matrizes in seiner Untersuchung über Gruppen mit Abelscher Automorphismengruppe auftreten, und mich darauf aufmerksam gemacht.