12. *Sur l'ensemble des courbes intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, II.*

Par Masuo FUKUHARA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Feb. 12, 1931.)

Etant donné un système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, \cdots\cdots, y_n) \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n), \tag{1}$$

nous désignerons par $R(E, (1))$ la région remplie par les courbes intégrales passant par un point au moins d'un ensemble E de points et par $S_\xi(E, (1))$ la section de $R(E, (1))$ par l'hyperplan $x=\xi$. Nous supposerons désormais les fonctions f_i continues et bornées dans un domaine D: $0\leqq x\leqq a$. On sait alors que si P est un point de D, la section $S_\xi(P, (1))$ $(0\leqq \xi\leqq a)$ est un ensemble continu. Mais peut-elle être un ensemble continu quelconque? Autrement dit, étant donné un ensemble continu C dans l'hyperplan $x=\xi$, peut-on déterminer les f_i de manière que la section $S_\xi(P, (1))$ coïncide avec C? La réponse me semble affirmative, mais je ne m'occuperai pas ici de cette question. Au contraire, je considérerai seulement le cas où le nombre des points singuliers du système (1) est fini. J'appelle point singulier du système (1) le point $P(x, y_1, \cdots\cdots, y_n)$ tel qu'il existe au moins deux courbes intégrales passant par P et se bifurquant dans l'intervalle $(x-h, x+h)$ quelque petit que soit le nombre positif h. Avant d'aller plus loin, il est commode de classifier des ensembles continus.

Un ensemble continu C est dit de classe 1 s'il peut se réduire à un point par déformation continuelle dans tout domaine ouvert contenant C. Supposons maintenant définis les ensembles continus des classes inférieures à k. Un ensemble continu C est dit de classe k s'il n'est pas de classe inférieure à k et s'il existe des ensembles continus $C_1, C_2, \cdots\cdots$ jouissant des propriétés: 1° qu'ils appartiennent à C; 2° que $c_1+c_2+\cdots\cdots=k-1$, en désignant par $c_1, c_2, \cdots\cdots$ les classes de $C_1, C_2, \cdots\cdots$; 3° que si l'on enlève de C les points appartenant à un ensemble ouvert quelconque qui contient $C_1, C_2, \cdots\cdots$, l'ensemble restant peut se réduire à un point par déformation continuelle dans tout domaine ouvert contenant C.[1]

1) La classe d'un ensemble continu C est indépendante du nombre de dimensions de l'espace qui le contient. Nous la désignerons par cls (C).

La classe d'un ensemble continu étant ainsi définie, le théorème que nous voulons établir s'énonce comme il suit :

Théorème 1. Si le système (1) *n'admet que m points singuliers, la section* $S_\xi(P, (1))$, *où P est point de D, est un ensemble continu de classe au plus égale à m.*

Pour établir ce théorème, je donnerai d'abord quelques lemmes que l'on peut démontrer sans peine.

Lemme 1. Si un ensemble fermé E peut se réduire à un point par déformation continuelle dans un domaine ouvert U contenant E, il existe un ensemble fermé contenu dans U, contenant E à son intérieur et pouvant se réduire à un point par déformation continuelle dans U.

Introduisons maintenant un système auxiliaire

$$\frac{dy_i}{dx} = g_i(x, y_1, \ldots\ldots, y_n) \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n) \tag{2}$$

où g_i sont des fonctions continues dans D et y satisfaisant aux inégalités

$$|f_i(x, y_1, \ldots\ldots, y_n) - g_i(x, y_1, \ldots\ldots, y_n)| < \varepsilon \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n).$$

On peut supposer que le système (2) n'admet aucun point singulier dans D quelque petit que soit le nombre positif ε.

Lemme 2. Si E est un ensemble fermé, la distance entre un point de $R(E, (2))$ *et la région* $R(E, (1))$ *est inférieure à un nombre positif* $\delta(\varepsilon, E)$ *qui s'annule avec* ε.

Lemme 3. Supposons que le système (1) *n'admet pas de point singulier dans* $\xi < x < \xi'$ *et désignons par A l'ensemble des points singuliers et de leurs points limites situés dans l'hyperplan* $x=\xi'$. *Soit E un ensemble fermé situé dans* $x=\xi$ *et soit E' un ensemble ouvert situé dans* $x=\xi$ *et contenant E. Si l'on enlève de* $S_{\xi'}(E, (1))$ *les points appartenant à un ensemble ouvert contenant A, l'ensemble restant est contenu dans* $S_{\xi'}(E', (2))$ *dès que le nombre positif* ε *est assez petit.*

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorèm 2. Si le système (1) *n'admet pas de points singuliers dans le domaine* $\xi < x < \xi'$ *et si p est le nombre des points singuliers de ce système situés dans* $S_{\xi'}(C, (1))$, *on a*

$$\operatorname{cls}(C) + p \geqq \operatorname{cls}[S_{\xi'}(C, (1))],$$

en désignant par C un ensemble continu situé dans $x=\xi$.

Si $\operatorname{cls}(C)=1$, le théorème est une conséquence immédiate des lemmes 1, 2, 3. Nous supposerons donc le théorème établi pour

$\mathrm{cls}\,(C) < k$ et démontrerons que le théorème reste encore vrai pour $\mathrm{cls}\,(C) = k$. Puisque $\mathrm{cls}\,(C) = k$ par hypothèse, on peut trouver des ensembles continus $C_1, C_2, \ldots\ldots$ remplissant les conditions énoncées dans la définition de la classe d'un ensemble continu. Supposons que $S_{\xi'}(C_1, (1))$, $S_{\xi'}(C_2, (1))$, $\ldots\ldots$ contiennent $p_1, p_2, \ldots\ldots$ points singuliers respectivement et désignons par $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_p$, les points singuliers situés dans $S_{\xi'}(C, (1))$ mais à l'extérieur des $S_{\xi'}(C_1, (1))$, $S_{\xi'}(C_2, (1))$, $\ldots\ldots$ D'après les lemmes 1, 2, 3, on voit aisément que si l'on enlève de $S_{\xi'}(C, (1))$ les points appartenant à un ensemble ouvert quelconque qui contient les points $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{p'}$ et les ensembles $S_{\xi'}(C_1, (1))$, $S_{\xi'}(C_2, (1))$, $\ldots\ldots$, l'ensemble restant peut se réduire à un point par déformation continuelle dans un domaine ouvert quelconque contenant $S_{\xi'}(C, (1))$. Il nous reste donc à démontrer

$$\mathrm{cls}\,(C_1') + \mathrm{cls}\,(C_2') + \cdots\cdots + p' \leqq k + p - 1 \tag{3}$$

où $C_1', C_2', \ldots\ldots$ sont des ensembles continus n'ayant pas de point commun l'un et l'autre et tels que leur somme coïncide avec $S_{\xi'}(C_1 + C_2 + \cdots\cdots, (1))$. Pour cela, remarquons que si la somme de deux ensembles continus C_1, C_2 est aussi un ensemble continu, on a $\mathrm{cls}\,(C_1 + C_2) \leqq \mathrm{cls}\,(C_1) + \mathrm{cls}\,(C_2)$. On peut donc supposer que les ensembles $C_1, C_2, \ldots\ldots$ n'ont pas de point commun l'un et l'autre. Si les ensembles $S_{\xi'}(C_1, (1))$, $S_{\xi'}(C_2, (1))$, $\ldots\ldots$ n'ont pas de point commun, on obtient la relation (3), car on a par hypothèses

$$p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p' = p$$

$$\mathrm{cls}\,[S_{\xi'}(C_1, (1))] \leqq \mathrm{cls}\,(C_1) + p_1, \quad \mathrm{cls}\,[S_{\xi'}(C_2, (1))] \leqq \mathrm{cls}\,(C_2) + p_2, \quad \ldots\ldots$$

Si $S_{\xi'}(C_1, (1))$, $S_{\xi'}(C_2, (1))$, par exemple, ont des points communs, ceux-ci sont des points singuliers et par suite est en un nombre fini q. On en verra facilement que

$$\mathrm{cls}\,[S_{\xi'}(C_1, (1)) + S_{\xi'}(C_2, (1))] \leqq \mathrm{cls}\,(C_1) + \mathrm{cls}\,(C_2) + q.$$

En continuant ainsi, on verra que la relation (3) reste vraie même dans le cas où plusieurs des $S_{\xi'}(C_i, (1))$ ont des points communs. Le théorème 2 est donc démontré. Le théorème 1 est évidemment une conséquence immédiate du théorème 2.