124. Über die Definition der Shodaschen Diskriminante eines normalen einfachen hyperkomplexen Systems.

Von Tadasi NAKAMURA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1934.)

In einer Arbeit[1] hat K. Shoda Diskriminante eines normalen einfachen hyperkomplexen Systems definiert. Dabei hat er aber die Existenz einer Minimalbasis einer Maximalordnung in bezug auf die Maximalordnung des Zentrums vorausgesetzt. Im allgemeinen musste er sie im Kleinen definieren.[2] In dieser Arbeit gebe ich eine direkte Definition im Grossen an.[3]

Es sei $\mathfrak{S}$ eine normale einfache Algebra über einem algebraischen Zahlkörper K endlichen Grades, K_0 ein Unterkörper von K derart, dass eine Maximalordnung $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{S}$ eine Minimalbasis $(E_1, E_2, \ldots\ldots, E_N)$ in bezug auf die Maximalordnung von K_0 bezitzt. Die Existenz eines solchen Unterkörpers ist klar, da der rationale Zahlkörper die Eigenschaft von K_0 hat. Es sei ferner $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ eine beliebige Basis von $\mathfrak{S}$ in Bezug auf das Zentrum K. Dann gibt es Matrizen A_i, B_j in K, die den Gleichungen

$$E_i(e)=(e)\begin{pmatrix} a_{i1}^1 \cdots a_{in}^1 \\ \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{i1}^n \cdots a_{in}^n \end{pmatrix}=(e)A_i\,, \qquad (e)E_j=(e)\begin{pmatrix} b_{1j}^1 \cdots b_{nj}^1 \\ \vdots \quad\;\; \vdots \\ b_{1j}^n \cdots b_{nj}^n \end{pmatrix}=(e)B_j$$

genügen, wo (e) die einzeilige Matrix $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ bedeutet.

Man bilde nun die Matrix

$$M\begin{bmatrix} E_1 \cdots E_N \\ e_1 \cdots e_n \end{bmatrix}=\Big(\sum_k a_{ip}^k b_{kj}^q\Big)\,,$$

wo (p, q) bzw. (i, j) Zeilen- bzw. Spaltenindex ist. Dann kann man beweisen:

Der Rang von $M\begin{bmatrix} E_1 \cdots E_N \\ e_1 \cdots e_n \end{bmatrix}$ *ist gleich* n^2. *Der grösste gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten* n^2*-ten Grades von* $M\begin{bmatrix} E_1 \cdots E_N \\ e_1 \cdots e_n \end{bmatrix}$ *ist die Shodasche Diskriminante von* $\mathfrak{S}$.

---

1) K. Shoda: Diskriminantensatz für normale einfache hyperkomplexe Systeme, Proc. **10** (1934), 315. Diskriminantenformel für normale einfache hyperkomplexe Systeme, Proc. **10** (1934), 318.

2) Vgl. Anmerkung 1) in der vorstehenden Arbeit von K. Shoda und mir.

3) Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich K. Shoda.

Zum Beweis betrachten wir N^2 Elemente $E_i x E_j$ mit dem Unbestimmten $x=\sum_{p=1}^{n} e_p x_p$, unter denen n^2 Elemente linear unabhängig bezüglich K sind.[4] Da aber

$$(E_1xE_1, \dots E_ixE_j, \dots, E_NxE_N) = (e_1x_1, \dots e_qx_p, \dots, e_nx_n) M\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix},$$

ist, so ist der Rang von $M\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}$ gleich n^2.

Wir beweisen nun, dass der grösste gemeinsame Teiler $\mathfrak{D}\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}$ aller Unterdeterminanten n^2-ten Grades von $M\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}$ von der Wahl der Basis $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ unabhängig ist. Nimmt man nämlich eine andere Basis $(e_1', e_2', \dots, e_n')$ an, wo $(e)=(e')P$ ist, so folgen aus

$$E_i(e') = (e')A_i', \qquad (e')E_j = (e')B_j'$$

ersichtlich die Gleichungen

$$A_i' = PA_iP^{-1}, \qquad B_j' = PB_jP^{-1}, \qquad B_jA_i = PB_jA_iP^{-1}.$$

Da der Koeffizient von B_jA_i an der Stelle (q, p) gleich $\sum_k a_{ip}^k b_{kj}^q$ ist, so ist, wie man leicht ausrechnen kann,

$$M\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1' \dots e_n' \end{bmatrix} = (P^{-1} \times P) \cdot M\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix},$$

wo $P^{-1} \times P$ das Kroneckersche Produkt von P^{-1} und P bedeutet. Da aber $|P^{-1} \times P| = 1$ ist, so folgt hieraus

$$\mathfrak{D}\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix} = \mathfrak{D}\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1' \dots e_n' \end{bmatrix}.$$

Wir beweisen nun, dass $\mathfrak{D}\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}$ von der Wahl der Minimalbasis $(E_1, E_2, \dots, E_N)$ unabhängig ist. Ist nämlich $(E_1', E_2', \dots, E_N')$ eine andere Minimalbasis und

$$(E_1', E_2', \dots, E_N') = (E_1, E_2, \dots, E_N)Q,$$

so sind Q und Q^{-1} beide ganzzahlig. Dann ergibt sich ferner leicht

$$M\begin{bmatrix} E_1' \dots E_N' \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix} \cdot (Q \times Q).$$

Da $Q \times Q$ ganzzahlig ist, so ist jede Unterdeterminante n^2-ten Grades von $M\begin{bmatrix} E_1' \dots E_N' \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}$ eine lineare Kombination der Unterdeterminanten

4) K. Shoda: Ein Kriterium für normale einfache hyperkomplexe Systeme, Proc. **10** (1934), 195.

n^2-ten Grades von $M\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}$, deren Koeffizienten ganz sind. Also ist $\mathfrak{D}\begin{bmatrix} E_1' \dots E_N' \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}$ durch $\mathfrak{D}\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}$ teilbar. Ganz analog kann man beweisen, dass $\mathfrak{D}\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}$ umgekehrt durch $\mathfrak{D}\begin{bmatrix} E_1' \dots E_N' \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}$ teilbar ist, da Q^{-1} ganzzahlig ist. Daher ist

$$\mathfrak{D}\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix} = \mathfrak{D}\begin{bmatrix} E_1' \dots E_N' \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}.$$

Wir beweisen endlich, dass das hier definierte, von der Wahl von $(E_1, E_2, \dots, E_N)$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ unabhängige Ideal $\mathfrak{D}$ gleich der im Kleinen definierten Shodaschen Diskriminante ist.[5] Dafür genügt es zu zeigen, dass der $\mathfrak{p}$-Komponent von $\mathfrak{D}$ gleich der Shodaschen Diskriminante von $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ ist, wo $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal in K bedeutet.

Im allgemeinen bilden die $E_1, E_2, \dots, E_N$ nicht mehr eine Minimalbasis von $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ bezüglich $(K_0)_{\mathfrak{p}_0}$, wo $\mathfrak{p}_0$ das Primidealvielfache von $\mathfrak{p}$ in K_0 ist.[6] Denn der Rang $(\mathfrak{S}_\mathfrak{p} : (K_0)_{\mathfrak{p}_0})$ ist im allgemeinen kleiner als N. Jedes Element aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ lässt sich als eine lineare Kombination von $E_1, E_2, \dots, E_N$ mit ganzzahligen Koeffizienten aus $K_\mathfrak{p}$ darstellen. Ist $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ bezüglich $K_\mathfrak{p}$, so gibt es ganzzahlige Matrizen Q, R in $K_\mathfrak{p}$, die den Gleichungen

$$(w_1, w_2, \dots, w_n) = (E_1, E_2, \dots, E_N)Q\,, \qquad (E_1, E_2, \dots, E_N) = (w_1, w_2, \dots, w_n)R$$

genügen.[7] Jetzt kann man wie oben vorgehen und beweisen, dass der $\mathfrak{p}$-Komponent von $\mathfrak{D}\begin{bmatrix} E_1 \dots E_N \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}$ gleich $\mathfrak{D}\begin{bmatrix} w_1 \dots w_n \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix}$ ist. Es ist aber

$$\mathfrak{D}\begin{bmatrix} w_1 \dots w_n \\ e_1 \dots e_n \end{bmatrix} = \mathfrak{D}\begin{bmatrix} w_1 \dots w_n \\ w_1 \dots w_n \end{bmatrix}$$

und $\mathfrak{D}\begin{bmatrix} w_1 \dots w_n \\ w_1 \dots w_n \end{bmatrix}$ ist nach der Definition nichts anderes als die Shodasche Diskriminante von $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$.

5) Dass $\mathfrak{D}$ auch von K_0 unabhängig ist, folgt aus dem zu beweisenden Satz, dass $\mathfrak{D}$ die Shodasche Diskriminante ist. Einen direkten Beweis kann man auch leicht ausführen.

6) Dabei betrachten wir $(K_0)_{\mathfrak{p}_0}$ als Unterkörper von $K_\mathfrak{p}$.

7) Q ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.