78. Über die Darstellungen der Verbände.

Von Hidetaka TERASAKA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1938.)

In dieser vorläufigen Mitteilung sollen einige neuen Begriffe sowie Sätze bezüglich der Darstellungen der Verbände, ohne oder mit den Andeutungen der Beweise, dargestellt werden. Je nach den Gegenständen ist sie in drei Paragraphen eingeteilt.

§ 1.

Jeder distributive Verband mit 0 und 1 lässt sich nach M. H. Stone und H. Wallman[1] sowohl durch eine Klasse von abgeschlossenen Punktmengen eines T_1-Raumes, als auch durch eine Klasse von offenen Punktmengen eines Hausdorffschen Raumes darstellen. Im ersten Falle ist der T_1-Raum bekanntlich *bikompakt*. Das Ziele dieses Paragraphen ist es zu zeigen, dass *der Hausdorffsche Raum* im zweiten Falle *kompakt* ist.

Um dies zu beweisen ist es bequemer, den Begriff des Verbandes ein wenig zu verallgemeinern.[2]

Wir wollen die Klasse von Elementen A, B, X, Y, usw. *allgemeinen komplementären Verband* nennen, und kurz mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen, wenn es unter den Elementen von $\mathfrak{K}$ die $\subset$-Beziehung erklärt ist, die den folgenden Axiomen genügt:

K_1. $A \subset A$.

K_2. $A \subset B$, $B \subset C \rightarrow A \subset C$.

K_3. *Es gibt das Nullelement* 0 *und das Einselement* 1 *in* $\mathfrak{K}$, *so dass für jedes* $A \in \mathfrak{K}$ *gilt* $0 \subset A \subset 1$.

K_4. *Zu jedem* $A \in \mathfrak{K}$ *gibt es ein eindeutig bestimmtes Element* A^c, *das* Komplement *von* A, *mit den folgenden Eigenschaften:*

i) $A \subset X$, $A^c \subset X \rightarrow X = 1$,

ii) $X \subset A$, $X \subset A^c \rightarrow X = 0$.

K_5. $(X \subset A,\ X \subset B \rightarrow X = 0) \rightarrow B \subset A^c$.

Beispiel: Die Klasse aller Ellipsen (Inneren sowie Äusseren) im Euklidischen R^2.

Aus K_3 folgt, dass es zu je zwei Elementen A und B von $\mathfrak{K}$ mindestens ein X bzw. Y gibt, so dass gelten $A \subset X$ und $B \subset X$ bzw.

---

1) M. H. Stone: Topological Representations of Distributive Lattices and Brouwerian Logics, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, **67** (1937). M. H. Stone: Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937). H. Wallman: Lattices and Topological Spaces, Annals of Math. **38** (1938).

2) Dies ist nicht notwendig. Denn der allgemeine komplementäre Verband (s. unten) lässt sich leicht zur Booleschen Algebra erweitern. Vgl. MacNeille: Partially Ordered Set. Trans. Am. Math. Soc. **42** (1937).

$Y \subset A$ und $Y \subset B$. Im allgemeinen gibt es zu jeder Klasse $\mathfrak{A} = \{A\}$ von Elementen $A \in \mathfrak{K}$ mindestens ein X bzw. Y, so dass gilt

$$A \subset X \textit{ für jedes } A \in \mathfrak{A} \text{ bzw. } Y \subset A \textit{ für jedes } A \in \mathfrak{A}.$$

Wir wollen X bzw. Y einen *Superior* bzw. *Inferior* nennen, und mit σAB, $\underset{A \in \mathfrak{A}}{\sigma} A$, usw. bzw. mit πAB, $\underset{A \in \mathfrak{A}}{\pi} A$, usw. bezeichnen.

Wir sagen, A und B sind zueinander *fremd*, wenn aus $X \subset A$ und $X \subset B$ folgt $X = 0$, wenn also nach K_5 $B \subset A^c$.

Nun sagen wir, dass die Klasse $\mathfrak{A} = \{A^\lambda\}$ von Elementen $A^\lambda \in \mathfrak{K}$ die *Eigenschaft vom endlichen Durchschnitt*[1] besitzt, wenn es zu jeder beliebigen Anzahl von Elementen $A^{\lambda_1}, A^{\lambda_2}, \ldots, A^{\lambda_n}$ aus $\mathfrak{A}$ ein von 0 verschiedenes Element $X \in \mathfrak{K}$ gibt mit $X \subset A^{\lambda_1}, \ldots, X \subset A^{\lambda_n}$. Wir haben dann den

Hilfssatz: Es sei $\mathfrak{A}$ eine Klasse von Elementen A^λ mit der Eigenschaft vom endlichen Durchschnitt und sie sei maximal betreffs dieser Eigenschaft, d. h., sie verliere durch Hinzufügung eines jeden nicht zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Elementes $X \in \mathfrak{K}$ die Eigenschaft vom endlichen Durchschnitt. *Ist dann $B \in \mathfrak{K}$ zu keinem $A^\lambda \in \mathfrak{A}$ fremd, so gehört B selbst zu $\mathfrak{A}$.*

Nimmt man in der Tat an, dass B^c zu einem gewissen A^λ fremd ist, so ist nach K_5 $A^\lambda \subset B$ für dieses A^λ, woraus folgt $B \in \mathfrak{A}$.

Nimmt man dagegen an, dass B^c zu keinem $A^\lambda \in \mathfrak{A}$ fremd ist, so kann ersichtlich weder B noch B^c zu $\mathfrak{A}$ gehören. Dann kann man nach der maximalen Eigenschaft von $\mathfrak{A}$ die Elemente $A^{\lambda_1}, A^{\lambda_2}, \ldots, A^{\lambda_m}$ bzw. $A^{\mu_1}, A^{\mu_2}, \ldots, A^{\mu_n}$ in $\mathfrak{A}$ finden derart, dass es gelten:

i) Aus $X \subset A^{\lambda_1}, \ldots, X \subset A^{\lambda_m}$ folgt, dass X zu B fremd ist.

ii) Aus $X \subset A^{\mu_1}, \ldots, X \subset A^{\mu_n}$ folgt, dass X zu B^c fremd ist.

Es gibt aber nach der Eigenschaft vom endlichen Durchschnitt ein von 0 verschiedenes X, welches die beiden Beziehungen i) und ii) zu gleicher Zeit erfüllt, was ja unmöglich ist. —

Wir wollen die Klasse $\mathfrak{A}$ dieses Hilfssatzes in Anlehnung an H. Wallman die *maximale Kollektion* nennen. Auf Grund dieses Hilfssatzes lässt sich dann eine jede maximale Kollektion $\mathfrak{A}$ als *Punkt* mit den *Koordinaten* A^λ auffassen, genau so wie es H. Wallman getan hat. Definiert man als *Umgebung* die Gesamtheit aller Punkte $\mathfrak{A}$, deren jede ein gegebenes Element A von $\mathfrak{K}$ als eine Koordinate enthält, so wird die Menge aller denkbaren Punkte $\mathfrak{A}$ zu einem Hausdorffschen Raum R. Es ist nunmehr zu zeigen, dass R *kompakt* ist.

Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst die Klasse aller Zahlenfolgen

$$x: \quad x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

wobei x_n, das *n-te Glied* von x, den Wert 0 oder 1 annimmt. Es sei dann $\mathfrak{x} = \{x^\lambda\}$ eine Teilklasse derselben mit den folgenden Eigenschaften:

i) Für jede endliche Anzahl von Elementen $x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots, x^{\lambda_\nu}$ von $\mathfrak{x}$ gelten $x_n^{\lambda_1} = x_n^{\lambda_2} = \cdots = x_n^{\lambda_\nu} = 1$ für unendlich viele n.

ii) In bezug auf die Eigenschaft i) ist $\mathfrak{x}$ maximal.

Es seinen nun $\mathfrak{A}_n = \{A_n^\lambda\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ abzählbar viele Punkte von R. Bildet man die Gesamtheit $\mathfrak{S}$ aller Superioren

1) H. Wallman, a. a. O.

$$(*) \qquad \underset{1\leq n<\infty}{\sigma}(x_n^\lambda A_n^\mu)$$

für alle $x^\lambda \in \mathfrak{x}$ und $A_n^\mu \in \mathfrak{A}_n$, wobei $x_n^\lambda A_n^\mu$ gleich A_n^μ oder gleich 0 zu setzen ist, je nachdem $x_n^\lambda = 1$ oder 0 ist, so lässt sich zeigen, dass $\mathfrak{S}$ ein Häufungspunkt von $\mathfrak{A}_n$ ist.

In der Tat ist $\mathfrak{S}$ zunächst ein Punkt. Denn, (i) erstens hat jede endliche Anzahl von (*), sagen wir, $\sigma(x_n^{\lambda_1} A_n^{\mu_1}), \ldots, \sigma(x_n^{\lambda_\nu} A_n^{\mu_\nu})$, nach der Eigenschaft vom endlichen Durchschnitt von $\mathfrak{x}$ und von $\mathfrak{A}_n$ ein gewisses $\sigma(x_n^\lambda A_n^\mu)$ gemeinsam; (ii) Zweitens sei B ein beliebiges Element von $\mathfrak{K}$. Wir definieren dann x_n für jedes feste $n=1, 2, \ldots$ folgendermassen:

$x_n = 1$, wenn es für jedes λ gilt $\sigma_1 A_n^\lambda B \neq 0$,[1] oder, nach dem obigen Hilfssatze, wenn $B \in \mathfrak{A}_n$.

$x_n = 0$, wenn für gewisses λ gilt $\sigma_1 A_n^\lambda B = 0$, d. h. wenn für gewisses λ gilt $A_n^\lambda \subset B^c$.

Wenn die Folge $x: x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ zu $\mathfrak{x}$ gehört, so ist gewiss $B \in \mathfrak{S}$. Wenn x dagegen zu $\mathfrak{x}$ fremd ist, so muss $B^c \in \mathfrak{S}$ sein, weil $A_n^\lambda \subset B^c$ für jedes n mit $x_n = 0$. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{S}$ die maximale Eigenschaft besitzt.

Aus (i) und (ii) folgt, dass $\mathfrak{S}$ ein Punkt ist. Es ist schliesslich evident, dass jede Umgebung von $\mathfrak{S}$ unendlich viele von $\mathfrak{A}_n$ enthält, womit die Kompaktheit von R bewiesen ist.

§ 2.

Wir wollen jetzt in die Boolesche Algebra $\mathfrak{B}$ die Begriffe einführen, die *Exklusion* bzw. *Inklusion* heissen.

Zwei Elemente A, B von $\mathfrak{B}$ heissen *exklusiv*, wenn sie die Beziehung $A \cdot B < 0$ erfüllt. Dabei soll diese Beziehung folgenden Axiomen genügen:

Fremdheit F.	$A \cdot B < 0 \rightarrow AB = 0.$
Symmetrie S.	$A \cdot B < 0 \rightarrow B \cdot A < 0.$
Heredität H.	$A \cdot B < 0,\ C \subset B \rightarrow A \cdot C < 0.$
Additivität A.	$A \cdot B < 0,\ A \cdot C < 0 \rightarrow A \cdot (B + C) < 0.$
Existenz E.	*Wenn* $AB = 0$, *so gibt es ein* $X \neq 0$, *so dass* $X \subset B$ *und* $A \cdot X < 0$ *sind.*

Wir definieren dann die *Inklusion*: $A < B$ von zwei Elementen A und B folgendermassen:

$$A < B \quad (\text{oder } B > A) \quad \textit{ist äquivalent mit} \quad A \cdot B^c < 0.$$

Es sei nun $\mathfrak{B}$ eine atomfreie[2] Boolesche Algebra mit Exklusionserklärung. Zur Abkürzung wollen wir die Folge

$$A^1 > A^2 > \cdots > A^\lambda > \cdots \qquad (\lambda < \alpha),$$

wobei α eine Ordnungszahl bedeutet, mit

$$\underset{\lambda=1}{\overset{\alpha}{>}} A^\lambda \text{ oder kürzer mit } \underset{\lambda}{>} A^\lambda \text{ oder noch kürzer mit } > A^\lambda$$

bezeichnen. Unter einer *Fundamentalreihe* (fundamentalen Inklusions-

1) $\sigma_1 AB$ bedeutet „ein gewisser Superior von A, B."

2) A. Tarski: Über additive und multiplikative Mengenkörper und Mengenfunktionen. C. R. Soc. Varsovie, **30** (1937).

reihe) verstehen wir dann die Reihe $\underset{\lambda=1}{\overset{\alpha}{>}} A^\lambda$ mit der Eigenschaft, dass es kein Element $X \in \mathfrak{B}$ gibt mit $A^\lambda > X$ für alle $\lambda < \alpha$.

Es seien nun

$$\underset{\lambda=1}{\overset{\alpha}{>}} A^\lambda, \qquad \underset{\mu=1}{\overset{\beta}{>}} B^\mu$$

zwei willkürliche Fundamentalreihen. Dann sind zwei Fälle möglich:

i) $A^\lambda B^\mu = 0$ für gewisse $\lambda < \alpha$ und $\mu < \beta$. Von diesen λ, μ an gilt durchweg $A^\lambda \cdot B^\mu < 0$. In diesem Falle sagen wir, $\underset{\lambda}{>} A^\lambda$ und $\underset{\mu}{>} B^\mu$ sein *exklusiv*.

ii) $A^\lambda B^\mu \neq 0$ für alle $\lambda < \alpha$ und $\mu < \beta$. Wir sagen, $\underset{\lambda}{>} A^\lambda$ und $\underset{\mu}{>} B^\mu$ *schneiden sich.*

Im allgemeinen sagen wir, dass eine endliche Anzahl von Fundamentalreihen $\underset{\lambda=1}{\overset{\alpha_1}{>}} A^\lambda_{(1)}, \dots, \underset{\lambda=1}{\overset{\alpha_n}{>}} A^\lambda_{(n)}$ sich *schneidet,* wenn $A^{\lambda_1}_{(1)} A^{\lambda_2}_{(2)} \cdots A^{\lambda_n}_{(n)} \neq 0$ für alle $\lambda_i < \alpha_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Es sei nun

$$\mathfrak{A} = \{\underset{\lambda}{>} A^\lambda\}$$

eine Klasse von Fundamentalreihen $\underset{\lambda}{>} A^\lambda$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) Beliebige endlichviele $\underset{\lambda}{>} A^\lambda$ von $\mathfrak{A}$ schneiden sich (Eigenschaft vom endlichen Durchschnitt!)

ii) Durch Hinzufügung neuer nicht zu $\mathfrak{A}$ gehöriger Fundamentalreihe zu $\mathfrak{A}$ verliert dieselbe die Eigenschaft i) (maximale Eigenschaft!)

Jede solche Klasse $\mathfrak{A} = \{> A^\lambda\}$, die wir *maximale F-Klasse* nennen wollen, lässt sich als *Punkt* auffassen, A^λ dessen *Koordinaten.* Nennt man die Gesamtheit aller Punkte $\mathfrak{A}$, die ein gegebenes Element A aus $\mathfrak{B}$ als eine Koordinate enthält, eine *Umgebung* jedes von diesen Punkten $\mathfrak{A}$, so bilden die Menge aller denkbaren Punkte $\mathfrak{A}$ unter dieser Umgebungserklärung einen Hausdorffschen Raum R. Dabei ergibt sich, dass jede Umgebung in R regulär offen[1] ist. Bezeichnet man mit $U(A)$ die Umgebung, die dem Element A entspricht, so entsprechen der Summe $A+B$ und dem Produkt AB zweier Elemente A und B aus $\mathfrak{B}$ die regulär offenen Mengen $U(A+B) = U(A) \circ U(B)$ bzw. $U(AB) = U(A)\,U(B)$ in R, wobei $U(A) \circ U(B)$ die *reguläre Summe*[2] in R bedeutet.

Damit ist die Boolesche Algebra $\mathfrak{B}$ durch die Klasse von regulär offenen Mengen des Hausdorffschen Raumes R dargestellt. R erscheint zwar unter geeigneter Exklusionserklärung sehr einfach. So z. B. ist der Raum R für die Boolesche Algebra der regulär offenen Mengen im Euklidischen R^n (mit regulären Summen) einfach die $(n+1)$-Sphäre S^{n+1},

1) C. Kuratowski: Sur l'opération $\bar{A}$ de l'analysis situs, Fund. Math. **3** (1922).

2) Sind X und Y regulär offene Mengen in R, so verstehen wir unter der regulären Summe $X \circ Y$ folgendes: $X \circ Y = (X+Y)^{acac}$, wobei a und c die Operation von Abschliessung bzw. die Komplementärbildung bedeuten. Vgl. H. Terasaka: Über die Topologie der Verbände (demnächst erscheint in Fund. Math.)

wenn $A \cdot B < 0$ bedeutet: $\rho(A, B)$ [Abstand zwischen A und B] > 0, im Gegensatz zum Darstellungsraum derselben Booleschen Algebra nach H. Wallman (§ 1), wo man keinen Anspruch auf Einfachheit machen würde.

Je nach den Exklusionserklärungen kommen die Darstellungsräume einer und derselben Booleschen Algebra als wesentlich verschieden vor, so z. B. werden sie kompakt, nicht kompakt, zusammenhängend oder zusammenhangslos. Z. B. könnte man als Exklusion einfach $AB \subset 0$, oder was dasselbe ist, $AB = 0$ nehmen. Dann ist R kompakt, wie wir in § 1 gezeigt haben. Um diese Umstände näher zu studieren, wollen wir uns mit einiger Spezialisierungen der Exklusionsbeziehung befassen.

Wenn A und B fremd sind ohne $A \cdot B < 0$ zu sein, so sagen wir, A und B *berühren sich.* Wir sagen ferner, die maximale F-Klasse $\mathfrak{A} = \{< A^\lambda\}$ sei *regulär,* wenn folgendes gilt: Wenn B zu keinem A^λ von $\mathfrak{A}$ fremd ist, so kommt jedes X mit $B < X$ als ein Element in $\mathfrak{A}$ vor. Schliesslich sagen wir, die maximale Kollektion (§ 1) $\mathfrak{A} = \{A^\lambda\}$ sei *vollständig,* wenn eine maximale F-Klasse $\mathfrak{A}^* = \{\underset{\lambda\nu}{>} A^{\lambda\nu}\}$ existiert derart, dass jedes $A^{\lambda\nu}$ Element von $\mathfrak{A}$ ist. Es gelten dann die folgenden Sätze:

Satz. Wenn jedes $A \in \mathfrak{B}$ sein Komplement A^c berührt und wenn jede maximale Kollektion vollständig ist, so ist der Raum R zusammenhängend.

Satz. Wenn jede maximale F-Klasse regulär ist, so ist der Raum R regulär.

Satz. Wenn jede maximale F-Klasse regulär ist und wenn jede maximale Kollektion vollständig ist, so ist der Raum R kompakt.

§ 3.

Wir betrachten jetzt eine unendliche, im allgemeinen transfinite Folge x von Zahlen x_λ ($x_\lambda = 0$ oder 1)

$$x: \quad x_1, x_2, \dots, x_\lambda, \dots \qquad (\lambda < \omega_\varphi),$$

wobei ω_φ die Anfangszahl der Zahlenklasse von der Mächtigkeit $\aleph_\varphi$ bedeutet. Dabei heisst x_λ das *λ-te Glied* von x.

Zwei solche Folgen

$$a: \quad a_1, a_2, \dots, a_\lambda, \dots \qquad (\lambda < \omega_\varphi),$$
$$b: \quad b_1, b_2, \dots, b_\lambda, \dots \qquad (\lambda < \omega_\varphi)$$

heissen *gleich* ($a = b$), wenn $a_\lambda = b_\lambda$ für alle λ mit $\alpha < \lambda < \omega_\varphi$, wobei α eine beliebige Ordnungszahl $< \omega_\varphi$ bedeutet. (Wir sagen dafür abkürzend, $a_\lambda = b_\lambda$ *für fast alle* λ). Bezeichnet man nun mit $a+b$ bzw. ab bzw. a^c die Folgen, von denen jedes λ-te Glied gleich $\max(a_\lambda, b_\lambda)$ bzw. $\min(a_\lambda, b_\lambda)$ bzw. $1 - a_\lambda$ ist, und mit 0 und 1 die Folgen, deren Glieder fast alle gleich 0 bzw. 1 sind, so bildet die Gesamtheit aller x eine Boolesche Algebra Ω_φ.

Die Summen- und Produktbildung lässt sich in Ω_φ nicht auf beliebig viele Elemente ausdehnen. Es gelten diesbezüglich folgende zwei Sätze:

Satz. Es gibt Summe und Produkt für unendlich viele Elemente $x^1, x^2, \dots, x^\alpha, \dots$, wenn ihre Anzahl kleinere Mächtigkeit hat als $\aleph_\varphi$.

Satz. Wenn $a^1 < a^2 < \cdots < a^\alpha < \cdots < b^\beta < \cdots < b^2 < b^1$ $(1 \leqq \alpha, \beta < \omega_\varphi)$, *so gibt es ein (daher auch unendlich viele) c mit* $a^\alpha < c < b^\beta$ *für alle* $\alpha, \beta < \omega_\varphi$.

Dabei schreibt man $a < b$ (oder $b > a$), wenn $a_\lambda \leqq b_\lambda$ für fast alle λ, und wenn ausserdem $a_\lambda < b_\lambda$ für $\aleph_\varphi$-viele λ (d. h. $a_\lambda < b_\lambda$ für eine unendliche Menge von $\lambda < \omega_\varphi$ von der Mächtigkeit $\aleph_\varphi$).

Korollar. Ist $\mathfrak{A} = \{a^\alpha\}$ *eine Klasse von Elementen* $a^\alpha \in \Omega_\varphi$ *von der Mächtigkeit* $\aleph_\varphi$ *derart, dass jede ihre Unterklasse* $\mathfrak{A}^*$ *von der Mächtigkeit* $< \aleph_\varphi$ *nicht leeren Durchschnitt hat, so hat* $\mathfrak{A}$ *selbst nicht leeren Durchschnitt.*

Mit Hilfe dieser Sätze beweist man den folgenden Einbettungssatz.

Satz. Jeder allgemeine komplementäre Verband aus unendlich vielen Elementen von der Mächtigkeit $\aleph_1$ *lässt sich in* Ω_0 *isomorph einbetten.*

Dabei versteht man unter einer *isomorphen Einbettung* folgendes: Man ordne die Elemente des allgemeinen komplementären Verbands in die wohlgeordnete Reihe $A^1, A^2, \dots, A^\lambda, \dots$ $(\lambda < \omega_1)$. Dann gibt es in Ω_0 eine wohlgeordnete Reihe von Elementen $a^1, a^2, \dots, a^\lambda$, $(\lambda < \omega_1)$ derart, dass zu jeder Klasse von endlich vielen Ordnungszahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n (< \omega)$ die Elemente $A^{\lambda_1}, A^{\lambda_2}, \dots, A^{\lambda_n}$ und $a^{\lambda_1}, a^{\lambda_2}, \dots, a^{\lambda_n}$ zugleich leeren bzw. nicht leeren Durchschnitt haben.

Man beweist diesen Satz, indem man schrittweise die Elemente a^λ konstruiert. Durch Benutzung desselben Beweisganges beweist man dann

Satz. Unter der Kontinuumhypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *lässt sich jeder allgemeine komplementäre Verband aus* $\aleph_2$*-vielen Elementen isomorph in* Ω_1 *einbetten.*

Es bleibt noch offen, ob sich jeder allgemeine komplementäre Verband aus $\aleph_{\varphi+1}$-vielen Elementen isomorph in Ω_φ einbetten lässt oder nicht. Wir haben indessen

Satz. Jede geordnete Menge von der Mächtigkeit $\aleph_{\varphi+1}$ *lässt sich ordnungstreu in* Ω_φ *einbetten.*[1]

---

1) Vgl. W. Sierpinski: Hypothèse du Continu, Warszawa (1934), S. 141, § 7, Ensemble ordonné universel.