Spectre marqué des longueurs et métriques conformément équivalentes

Hamid-Reza Fanaï

Abstract

It is well known that two conformally equivalent negatively curved metrics on a compact manifold with the same marked length spectrum are equal. We prove this fact for two conformally equivalent complete metrics with finite volume and without conjugate points on a manifold, provided a density condition on Dirac measures.

Soit (M, g) une variété riemannienne complète sans points conjugués. Il est bien connu qu'on peut représenter chaque classe de conjugaison $< \gamma >$ du groupe fondamental de M par une classe d'homotopie libre de courbes dans M. On notera $\ell(\gamma)$ la longueur des géodésiques périodiques dans cette classe d'homotopie libre.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison du groupe fondamental de M. On définit *le spectre marqué des longueurs* de la métrique g comme l'élément $(\ell(\gamma))_{\gamma\in\mathcal{C}}$ du produit direct $\mathbb{R}^{\mathcal{C}}$ indexé par l'ensemble $\mathcal{C}$. Cet élément ne change pas, si l'on prend une autre métrique isotope à g, i.e. l'image de g par un difféomorphisme de M homotope à l'identité. Il est important de savoir si le spectre marqué des longueurs détermine la métrique à isotopie près. Travaillant dans un cadre particulier, nous nous intéressons au cas de deux métriques conformément équivalentes et obtenons un résultat de rigidité. Dans la preuve, nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire concernant la densité des mesures de Dirac. Plus précisément, nous démontrons le

Théorème. *Soient g_0, g_1 deux métriques riemanniennes complètes sans points conjugués de volumes finis conformément équivalentes sur une variété M. Supposons que l'enveloppe convexe des mesures de Dirac, supportées sur des géodésiques périodiques, est dense parmi toutes les mesures finies invariantes par le flot géodésique sur les*

1991 *Mathematics Subject Classification :* 58F11, 58F17.
Key words and phrases : spectre marqué des longueurs, intersection, flot géodésique.

fibrés unitaires tangents de g_0 et g_1. Si g_0 a le même spectre marqué des longueurs que g_1, alors $g_0 = g_1$.

Remarque. Sur une variété compacte, la condition de densité des mesures de Dirac est vérifiée pour toute métrique riemannienne dont le flot géodésique est de type Anosov.

En courbure strictement négative et pour les variétés compactes, avoir même spectre marqué des longueurs est équivalent à l'existence d'une conjugaison de classe C^0 entre les flots géodésiques ([H]), et dans ce cadre là, on avait déjà le résultat ([F], [Ka], [Kn2]). L'idée essentielle comme dans [F] est la notion d'intersection de deux métriques (voir [Kn1] pour les définitions et quelques propriétés utiles).

Maintenant nous commençons à prouver le théorème. Soient γ_0 et γ_1 deux géodésiques périodiques de g_0 et g_1 respectivement, dans la même classe d'homotopie libre et on prend $\varphi : [0,1] \times [0,1] \to M$ l'homotopie entre ces deux géodésiques parmi des courbes continues dans M telle que $\varphi(0,t) = \gamma_0(t)$, $\varphi(1,t) = \gamma_1(t)$ pour tout t, où γ_0 et γ_1 sont paramétrées par le paramètre $t \in [0,1]$ et pour tout $s \in [0,1]$, $\gamma_s(t) = \varphi(s,t)$ est une courbe fermée. On a les relevés de ces courbes dans $\widetilde{M}$, le revêtement universel de M, qu'on désigne par $\widetilde{\gamma}_0$, $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\varphi}(s,t)$ $(s,t \in [0,1])$. Il existe pour tout $s \in [0,1]$, l'élément σ_s du groupe fondamental de M, vu comme une isométrie agissant sur $\widetilde{M}$ (pour les métriques relevées $\widetilde{g}_0$ et $\widetilde{g}_1$) tel que : $\widetilde{\gamma}_s(1) = \widetilde{\varphi}(s,1) = \sigma_s \widetilde{\gamma}_s(0)$.

Affirmation *Pour tout $s \in [0,1]$, $\sigma_s = \sigma_0$.*

En effet, si $A = \Big\{ s \in [0,1], \sigma_s = \sigma_0 \Big\}$ alors A est non vide, fermé et ouvert dans [0,1] :

A **est fermé :** Si $s_i \in A \to s^* \in [0,1]$ alors $\sigma_0 \widetilde{\gamma}_{s_i}(0) = \widetilde{\gamma}_{s_i}(1) \to \widetilde{\gamma}_{s^*}(1) = \sigma_{s^*} \widetilde{\gamma}_{s^*}(0)$ donc $(\sigma_{s^*}^{-1}\sigma_0)\widetilde{\gamma}_{s_i}(0) \to \widetilde{\gamma}_{s^*}(0)$, mais $\widetilde{\gamma}_{s_i}(0) \to \widetilde{\gamma}_{s^*}(0)$ donc $(\sigma_{s^*}^{-1}\sigma_0)\widetilde{\gamma}_{s^*}(0) = \widetilde{\gamma}_{s^*}(0)$ mais le groupe fondamental agissant librement sur $\widetilde{M}$, donne $\sigma_{s^*}^{-1}\sigma_0 = id$ et donc $s^* \in A$ et A est fermé.

A **est ouvert :** Soit $s^* \in A$ et supposons que s^* n'est pas un point "intérieur" de A, c'est-à-dire qu'il existe une suite $s_i \in [0,1]$, $s_i \to s^*$ mais $s_i \notin A$. On a donc $\sigma_{s_i}\widetilde{\gamma}_{s_i}(0) \to \sigma_0 \widetilde{\gamma}_{s^*}(0)$, ou $(\sigma_0^{-1}\sigma_{s_i})\widetilde{\gamma}_{s_i}(0) \to \widetilde{\gamma}_{s^*}(0)$. Si $\lambda_i = \sigma_0^{-1}\sigma_{s_i}$ alors $\lambda_i \neq id$ et on a $\lambda_i \widetilde{\gamma}_{s_i}(0) \to \widetilde{\gamma}_{s^*}(0)$ et donc pour tout ouvert contenant $\widetilde{\gamma}_{s^*}(0)$ dans $\widetilde{M}$, il existe l'indice i telle que $\lambda_i \widetilde{\gamma}_{s_i}(0)$ et $\widetilde{\gamma}_{s_i}(0)$ soient dans cet ouvert. Ceci est une contradiction contre le fait que le groupe fondamental agit proprement et donc A est ouvert.

Soit δ_0 la mesure de Dirac normalisée, associée à γ_0 sur $S_{g_0}M$, le fibré unitaire tangent de (M, g_0), invariante par le flot géodésique de (M, g_0). Calculons $I_{\delta_0}(g_0, g_1)$, l'intersection de g_1 par rapport à g_0 et δ_0. Soit ℓ_0 la g_0-longueur de γ_0 et ℓ_1 la g_1-longueur de γ_1. On pose :

$$K_i = d_{\widetilde{g}_i}(\sigma_0^n \widetilde{\gamma}_0(0), \sigma_0^n \widetilde{\gamma}_1(0)) = d_{\widetilde{g}_i}\Big(\widetilde{\gamma}_0(0), \widetilde{\gamma}_1(0)\Big)$$

où $i = 0, 1$ et $n \geq 1$ est arbitraire. Soit $K = max(K_0, K_1)$. Les géodésiques $\widetilde{\gamma}_0$ et $\widetilde{\gamma}_1$ étant minimisantes pour $\widetilde{g}_0$ et $\widetilde{g}_1$ impliquent avec l'inégalité triangulaire :

$$n \cdot \ell_1 - 2K \leq d_{\widetilde{g}_1}(\widetilde{\gamma}_0(0), \sigma_0^n \widetilde{\gamma}_0(0)) \leq n \cdot \ell_1 + 2K, \ \forall n \geq 1$$

d'où on obtient :

$$I_{\delta_0}(g_0, g_1) = \lim_{n\to+\infty} d_{\widetilde{g}_1} \frac{(\widetilde{\gamma}_0(0), \sigma_0^n \widetilde{\gamma}_0(0))}{n \cdot \ell_0} = \frac{\ell_1}{\ell_0}.$$

On remarque que ceci implique que les longueurs des géodésiques périodiques dans une classe d'homotopie libre de courbes pour une métrique sans points conjugués sont constantes, ce qui est bien connu. Maintenant à l'aide de notre hypothèse sur les spectres marqués des longueurs, on a $\ell_0 = \ell_1$ et donc $I_{\delta_0}(g_0, g_1) = 1$, c'est-à-dire l'intersection de g_1 par rapport à g_0 et toute mesure de Dirac est égale à 1.

Soit $\mu_L(g_0)$ la mesure de Liouville normalisée sur $S_{g_0}M$. La densité des mesures de Dirac, implique qu'il existe une suite de mesures de probabilité $\mu_n = \sum_{i=1,n} b_{i,n}\delta_{i,n}$ sur $S_{g_0}M$ telle que $\mu_n \to \mu_L(g_0)$ où $b_{i,n} > 0$, $\sum_{i=1,n} b_{i,n} = 1$ et $\delta_{i,n}$ est une mesure de Dirac normalisée. On sait que pour toute mesure de probabilité μ sur $S_{g_0}M$ invariante par le flot géodésique de (M, g_0), l'intersection de g_1 par rapport à g_0 et μ est égale à :

$$I_\mu(g_0, g_1) = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \int_{S_{g_0}M} a(v,t)\, d\mu(v)$$

où $a(v,t) = d_{\widetilde{g}_1}(\widetilde{C}_v(0), \widetilde{C}_v(t))$ et pour tout vecteur $v \in S_{g_0}M$, $\widetilde{C}_v(t)$ désigne le relevé de la géodésique paramétrée par longueur d'arc, définie par v, dans le revêtement universel de M. Il existe donc pour tout $\varepsilon > 0$ un $t = t(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\frac{1}{t} \int_{S_{g_0}M} a(v,t)\, d\mu_L(g_0)(v) < I_{\mu_L(g_0)}(g_0, g_1) + \varepsilon$$

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \int_{S_{g_0}M} a(v,t)\, d\mu_L(g_0)(v) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t} \int_{S_{g_0}M} a(v,t)\, d\mu_n(v) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1,n} b_{i,n} \cdot \frac{1}{t} \int_{S_{g_0}M} a(v,t)\, d\delta_{i,n}(v) \\
&\geq \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1,n} b_{i,n} \cdot I_{\delta_{i,n}}(g_0, g_1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

On a alors $I_{\mu_L(g_0)}(g_0, g_1) \geq 1$ et de façon similaire $I_{\mu_L(g_1)}(g_1, g_0) \geq 1$ et donc :

$$I_{\mu_L(g_0)}(g_0, g_1) \cdot I_{\mu_L(g_1)}(g_1, g_0) \geq 1 \quad (*).$$

D'après [Kn1], on sait que pour deux métriques g_0 et g_1 sans points conjugués et conformément équivalentes, on a toujours :

$$I_{\mu_L(g_0)}(g_0, g_1) \leq \left(\frac{\mathrm{vol}(M, g_1)}{\mathrm{vol}(M, g_0)} \right)^{1/m}$$

où $m = \dim M$ avec l'égalité si et seulement si $g_1 = c \cdot g_0$ pour une constante $c > 0$. Il est claire maintenant que $(*)$ nous donne le cas d'égalité et nous terminons ainsi la preuve du théorème.

Remarque. La densité des mesures de Dirac, implique en particulier que les vecteurs périodiques sont denses dans le fibré unitaire tangent. Si notre variété est compacte et admet une métrique riemannienne de courbure strictement négative, alors pour toute autre métrique sans points focaux sur cette variété, on a la densité des vecteurs périodiques dans le fibré unitaire tangent ([E], théorème 5.1 et [B], corollaire 2.2). On sait aussi que les vecteurs périodiques sont denses dans le fibré unitaire tangent pour toute métrique sans points conjugués sur une variété compacte ayant son flot géodésique expansif ([R]). Nous ne savons pas sous quelles conditions la densité des vecteurs périodiques implique la densité des mesures de Dirac.

Remerciements. Je remercie Gérard Besson pour les discussions fructueuses.

Références

[B] Burns K., *Hyperbolic behaviour of geodesic flows on manifolds with no focal points*, Erg. Th. & Dyn. Syst., 3, (1983), 1–12.

[E] Eberlein P., *Geodesic flow in certain manifolds without conjugate points*, Trans. Amer. Math. Soc., 167, (1972), 151–170.

[F] Fanaï H.R., *Trois propriétés du flot géodésique en courbure négative*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.323, Série I, (1996), 1039–1045.

[H] Hamenstädt U., *Time-preserving conjugacies of geodesic flows*, Erg. Th. & Dyn. Syst., 12, (1992), 67–74.

[Ka] Katok A., *Entropy and closed geodesics*, Erg. Th. & Dyn. Syst., 2, (1982), 339–367.

[Kn1] Knieper G., *Volume growth, entropy and the geodesic stretch*, Math. Research Let., 2, (1995), 39–58.

[Kn2] Knieper G, *An application of the geodesic stretch to the conjugacy problem*, Preprint.

[R] Ruggiero R. O., *On a conjecture about expansive geodesic flows*, Erg. Th. & Dyn. Syst., 16, (1996), 545–553.

Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS (UMR 5582)
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)