Comportement asymptotique de la fonction de répartition empirique perturbée multivariée à variables dépendantes

Michel Harel   Bouameur Ragbi

Résumé

Dans cet article, nous étudions le comportement asymptotique d'un estimateur obtenu par intégration de l'estimateur à noyau d'une densité, basé sur un échantillon de taille n, de fonction de répartition $\mathbf{F}$. Le théorème limite centrale est établi pour la statistique $\hat{\mathbf{F}}_n(\mathbf{U}_n)$ lorsque les variables aléatoires sont stationnaires, fortement mélangeantes et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et $(\mathbf{U}_n)$ est une suite de U-statistiques multivariées. Des exemples d'application sont donnés dans la section 2.2.

Abstract

In this paper, we study the asymptotic behavior of an estimator obtained by integrating a kernel type density estimator based on random sample of size n with distribution function $\mathbf{F}$. A central limit theorem is established for the statistic $\hat{\mathbf{F}}_n(\mathbf{U}_n)$ where the underlying random variables are stationary and strongly mixing with random values in $\mathbb{R}^p$ and where $(\mathbf{U}_n)$ is sequence of multivariate U-Statistics. Examples of application are given in section 2.2

Received by the editors November 1996. In revised form in June 1997.
Communicated by M. Hallin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 60F05.
Key words and phrases : U-statistic, strongly mixing, stationary, asymptotic behavior.

1 Introduction

Soit p un entier strictement positif et soit

$$\mathbf{X_1} = (X_1^1, ..., X_1^p), ..., \mathbf{X_n} = (X_n^1, ..., X_n^p), ...$$

une suite strictement stationnaire de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant pour fonction de répartition commune $\mathbf{F}$, de densité f et de marges F_1,..., F_p. L'estimateur naturel de $\mathbf{F}$ basé sur l'échantillon ($\mathbf{X_1}$,...,$\mathbf{X_n}$) est la fonction de répartition expérimentale $\tilde{\mathbf{F}}_\mathbf{n}$ définie par :

$$\tilde{\mathbf{F}}_\mathbf{n}(\mathbf{x}) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{s}(\mathbf{x} - \mathbf{X_i}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p,$$

où $\mathbf{s}$ est la fonction de répartition dégénérée définie par :

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x} \geq 0 \\ 0, & \text{s'il existe au moins un } j, 1 \leq j \leq p \text{ tel que } x_j < 0, \end{cases}$$

la relation d'ordre $\geq$ étant définie sur $\mathbb{R}^p$ par : $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_p) \geq \mathbf{y} = (y_1, ..., y_p)$ si et seulement si $x_i \geq y_i$, pour tout $1 \leq i \leq p$.

Bien que la répartition empirique $\tilde{\mathbf{F}}_\mathbf{n}$ soit optimale en terme de vitesse de convergence d'erreurs quadratiques, elle ne tient aucun compte du fait que $\mathbf{F}$ soit lisse et notamment de l'existence d'une densité f. Pour corriger cette situation, on peut faire appel à des estimateurs de la forme

$$\hat{\mathbf{F}}_n(\mathbf{x}) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} K_n(\mathbf{x} - \mathbf{X_i}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \tag{1.1}$$

où (K_n) est une suite de fonctions de répartition continues. De tels estimateurs apparaissent tout naturellement comme intégrales d'estimateurs de la densité à noyau (voir Rosenblatt (1956) et Parzen (1962))

$$\hat{\mathbf{f}}_n(\mathbf{x}) = n^{-1} a_n^{-p} \sum_{i=1}^{n} k(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{a_n}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p,$$

où (a_n) est une suite de nombres réels positifs telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et k une densité définie sur $\mathbb{R}^p$. L'estimateur $\hat{\mathbf{F}}_n$ se déduit alors de $\hat{\mathbf{f}}_n$ en posant $k_n(t_1, ..., t_p) = a_n^{-p} k((t_1, ..., t_p)/a_n)$ et

$$K_n(x_1, ..., x_p) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_p} k_n(t_1, ..., t_p) dt_1 ... dt_p. \tag{1.2}$$

Le but de cet article est d'étudier le comportement asymptotique de la distribution $\hat{\mathbf{F}}_n$ (avec K_n défini en (1.2)) évaluée en un point aléatoire ayant la structure d'une U-statistique afin d'estimer une fonctionnelle $\mathbf{F}(\xi)$ où ξ est un paramètre fonctionnel et où $\mathbf{F}$ est inconnue, supposée de classe C^2. Nos résultats généralisent ceux de Sun

(1993) au cas multivarié, ce qui engendre de nombreuses applications (par exemple le cas de variables à erreurs corrélées comme dans l'exemple 2.2). L'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires a été étendue à différents cas de dépendance. Sun (1995 (a)) a généralisé les résultats de Ralescu et Sun (1993) à la m-dépendance de processus stochastiques non stationnaires. Il est bien connu que la m-dépendance appartient aux classes beaucoup plus larges de φ-mélange et de mélange fort par exemple Rosenblatt (1956) et Billingsley (1968).

Spécifiquement, supposons que l'on cherche à estimer un paramètre fonctionnel de la forme $\xi = (\xi_1, ..., \xi_p)'$ dont la jème composante s'exprime en terme d'une application symétrique et mesurable g_j de $\mathbb{R}^{pm_j}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g_j(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{m_j})$ soit invariante pour toute permutation sur les m_j indices de $\mathbf{x}_i$, $i = 1, ..., m_j$ $(m_j \leq n)$:

$$\xi_j = \int_{\mathbb{R}^{pm_j}} g_j(\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_{m_j}}) \prod_{\ell=1}^{m_j} d\mathbf{F}(\mathbf{x}_\ell). \tag{1.3}$$

Soit $(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n)$ un échantillon aléatoire de fonction de répartition $\mathbf{F}$, on estime ξ au moyen de la U-statistique $\mathbf{U_n} = (U_{n,1}, ..., U_{n,p})'$ définie par :

$$U_{n,j} = \binom{n}{m_j}^{-1} \sum_{J_n(m_j)} g_j(\mathbf{X_{i_1}}, ..., \mathbf{X_{i_{m_j}}}), \quad j = 1, ..., p, \tag{1.4}$$

où $J_n(m_j)$ désigne l'ensemble de toutes les combinaisons de m_j éléments distincts $\{i_1, ..., i_{m_j}\}$ dans $\{1, ..., n\}$. Une telle statistique est également utile pour estimer une fonctionnelle $\theta = \mathbf{F}(\xi)$ si $\mathbf{F}$ est inconnue. Ainsi si $\mathbf{U}_n = (\overline{X_n^1}, ..., \overline{X_n^p})$ où $\overline{X_n^j} = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^j, j = 1, ..., p$ (dans ce cas $\xi = (E(X_1^1), ..., E(X_1^p))'$), on peut utiliser $\hat{\mathbf{F}}_n((\overline{X}_n^1, ..., \overline{X}_n^p))$ pour tester l'hypothèse que $\mathbf{F}$ est symétrique par rapport à chacune des coordonnées du paramètre de localisation ξ contre certaines alternatives. Les conditions précisées dans le présent travail permettront d'assurer la normalité asymptotique de la statistique $\hat{\mathbf{F}}_n(\mathbf{U}_n)$. Elles généralisent à la fois, les travaux de Puri et Ralescu (1986) et ceux de Sun (1993). Les premiers ont obtenu un théorème limite centrale pour $\hat{\mathbf{F}}_n(\mathbf{U}_n)$ lorsque les variables aléatoires $\mathbf{X}_i$ sont i.i.d. et $p = 1$. Le second a généralisé leur résultat lorsque les variables aléatoires ne sont plus indépendantes mais absolument régulières et strictement stationnaires avec $p = 1$.

Ces dernières années, le comportement asymptotique de $\hat{\mathbf{F}}_n$ et son usage dans la théorie de l'estimation ont fait l'objet de multiples travaux. Lorsque les variables aléatoires sont i.i.d., Nadaraya (1964) a prouvé que $\hat{\mathbf{F}}_n$ est asymptotiquement sans biais et de même variance que $\tilde{\mathbf{F}}_n$. De plus, il a obtenu sa convergence uniforme vers $\mathbf{F}$ avec probabilité 1. La convergence presque sûre de $\hat{\mathbf{F}}_n$ vers $\mathbf{F}$ a été démontrée par Winter (1973) et Yamato (1973). Watson et Leadbetter (1964) ont obtenu la normalité asymptotique de $\hat{\mathbf{F}}_n$ et Winter (1979) a obtenu le taux de convergence uniforme, à savoir, $(2n/\log\log n)^{-1/2}$. Sarda (1993) a montré, en utilisant la procédure de la validation croisée pour le choix du paramètre a_n, que $\hat{\mathbf{F}}_n$ est asymptotiquement optimal au sens de l'erreur quadratique moyenne sous certaines conditions de régularité sur $\mathbf{F}$ et k. Toujours dans le cadre i.i.d., les travaux de Shirahata et Chu (1992), Jones (1990), Swanepoel (1988) et Sarda (1993) sont consacrés à l'étude des propriétés de convergence de l'estimateur (1.1). Sous conditions de dépendance, les travaux concernant les propriétés de la répartition empirique restent limités aux variables unidimensionnelles (en général uniformément distribuées), voir par exemple, Berkes et Philipp (1977) et Philipp (1977). Une extension du théorème de Glivenko-Cantelli pour des variables aléatoires φ-mélangeantes est établie par Sarda et Vieu (1989), par Gyorfi, Härdle, Sarda et Vieu (1989) lorsque les variables sont φ-mélangeantes, ρ-mélangeantes ou α-mélangeantes. Cela conduit naturellement à étudier le comportement asymptotique des fonctions de répartitions empiriques lisses et des quantiles à noyau lisse aussi bien pour le φ-mélange que pour le mélange fort. Dans ce contexte, nous faisons référence aux travaux de Sun (1993), Sun (1995 (a), 1995 (b)), Sun et Chiang (1995) et Harel et Puri (1995).

2 Résultat principal

2.1 Définitions et notations

Rappelons qu'une suite $(\mathbf{X}_n), n \geq 1$ est dite absolument régulière si :

$$\beta(n) = E\{\sup_{A \in \mathcal{M}_{n+t}^{\infty}} |P(A|\mathcal{M}_0^t) - P(A)|\} \to 0, \quad n \to \infty$$

où $\mathcal{M}_0^t$ (resp. $\mathcal{M}_{n+t}^{\infty}$) est la σ-algèbre engendrée par $(\mathbf{X}_s, s \leq t)$ (resp. $(\mathbf{X}_s, s \geq t+n)$). Elle est dite fortement mélangeante si

$$\alpha(n) = \sup_{A \in \mathcal{M}_0^t} \sup_{B \in \mathcal{M}_{n+t}^{\infty}} \{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|\} \to 0, \quad n \to \infty$$

On a toujours $\alpha(m) \leq \beta(m)$, de sorte que si une suite $\{\mathbf{X}_n\}$ est absolument régulière, elle est aussi fortement mélangeante.

Pour $j \in \{1, ..., p\}$ et $0 \leq c \leq m_j$, on définit :

$$g_{j,c}(x_1, ..., x_c) = \int_{\mathbb{R}^{(m_j - c)p}} g_j(\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_{m_j}}) \prod_{\ell=c+1}^{m_j} \mathbf{F}(d\mathbf{x}_\ell)$$

et

$$U_{n,j}^{(c)} = n^{-[c]} \int_{\mathbb{R}^{pc}} \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_c \leq n} g_{j,c}(\mathbf{x_{i_1}}, ..., \mathbf{x_{i_c}}) \prod_{\ell=1}^{c} d[\mathbf{s}(\mathbf{x}_\ell - \mathbf{X}_{\mathbf{i}_\ell}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_\ell)], \tag{2.1}$$

où $n^{-[c]} = [n(n-1)(n-2)...(n-c+1)]^{-1}$.

On a alors $g_{j,0} = \xi_j$ et $g_{j,m_j} = g_j$ pour tout $1 \leq j \leq p$.

On note

$$\mu_n = EK_n(\xi - \mathbf{X_1}) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbf{F}(\xi - \mathbf{t}) k_n(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \tag{2.2}$$

Pour $1 \leq \ell \leq n$, définissons encore

$$A_\ell = \mathbf{s}(\xi - \mathbf{X}_\ell) - \mathbf{F}(\xi) + \sum_{j=1}^{p} m_j (g_{j,1}(\mathbf{X}_\ell) - \xi_j) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x_j}}(\xi), \tag{2.3}$$

et soit

$$(2.4) \qquad \sigma^2 = E(A_1^2) + 2\sum_{\ell=1}^{+\infty} E(A_1 A_{\ell+1}).$$

Théorème 2.1 : *On suppose que pour $\delta > 0$, il existe M_0 tel que :*

$$(2.5) \qquad E|g_j(\mathbf{X}_{i_1}, ..., \mathbf{X}_{i_{m_j}})|^{2+\delta} \leq M_0 < \infty$$

pour tous $i_1 < i_2 < ... < i_{m_j}$ et pour tout $1 \leq j \leq p$.
On suppose de plus que les taux de mélangeance vérifient :

$$(2.6) \qquad \alpha(n) = O(n^{-a}), \quad a > (1+\theta)p + 3, \quad \theta > 0.$$

On suppose enfin que

$$(2.7) \qquad \int_{\mathbb{R}^p} ||\mathbf{t}||\mathbf{k}(\mathbf{t})d\mathbf{t} < +\infty, \quad ||\mathbf{t}|| = \sup_{1\leq i\leq p} |t_i|.$$

Alors pour toute fonction de répartition $\mathbf{F}$ différentiable de classe C^2 à dérivées partielles secondes bornées, $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{U}_{\mathbf{n}}) - \mu_n)$ converge en loi vers une loi normale $N(0, \sigma^2)$.

Remarque 2.1. Les taux de mélanges (2.6) sont automatiquement vérifiés par des taux géométriques (voir exemples 2.1-2.3). Considérons par exemple le modèle défini par

$$X_n = \alpha X_{n-1} + e_n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1, n \geq 1,$$

où (e_n) est un bruit blanc. Soit maintenant la suite de variables aléatoires (Y_n) définie par

$$Y_n = aX_n + \varepsilon_n, \quad a \in \mathbb{R},$$

où (ε_n) est un bruit corrélé indépendant de e_n. On suppose plus précisément que les ε_n sont des variables aléatoires réelles absolument régulières et de taux géométrique, de même loi et de densité strictement positive dérivable de classe C^1 à dérivée première bornée (voir Mokkadem (1990) et pour plus de détails sur les propriétés de mélange, on peut consulter Doukhan (1994)). Ainsi les (X_n, Y_n) forment-ils une suite de vecteurs aléatoires absolument réguliers (voir exemple 2.2) avec un taux géométrique $\beta(n) = O(\rho^n)$, $0 < \rho < 1$. Comme cette suite vérifie les conditions du théorème 2.1, les conclusions du théorème 2.1 s'appliquent à $\hat{\mathbf{F}}_n(\mathbf{U}_n)$ pourvu que k vérifie (2.7). On pourra par exemple tester $\mathbf{F}$ symétrique par rapport à $(0, 0)$ contre une certaine alternative en choisissant $\mathbf{U}_n = (\overline{X}_n, \overline{Y}_n)$ car ici on aura $\xi = (0, 0)$. Le théorème 2.1 permet donc de conclure là où le résultat de Sun (1993) ne s'applique pas. On verra au paragraphe 3 d'autres modèles multidimensionnels plus généraux qui peuvent être testés en utilisant l'aspect multidimensionnel du théorème 2.1.

2.2 Exemples d'applications

Exemple 2.1. On considère le modèle autorégressif $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et vérifiant l'équation :

$$X_n = \Psi(X_{n-1}) + \epsilon_n,$$

où $(\epsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ est une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. de densité différentiable de classe C^1 à dérivées partielles premières bornées et $\Psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est une fonction mesurable. On suppose que le vecteur ϵ_n est indépendant du vecteur X_ℓ pour tout $\ell < n$, ce qui confère à (X_n) une structure de chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. De plus, on suppose que :

(i) ϵ_n admet une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^p$ et sa densité f est strictement positive sur $\mathbb{R}^p$.

(ii) il existe une constante $\rho, 0 < \rho < 1$, telle que : $||\Psi(x)|| \leq \rho||x||$, où $||.||$ est la norme définie par : $||x|| = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$.

Sous les condition (i) et (ii), (X_n) est stationnaire, λ-irréductible et apériodique. D'après Mokkadem (1987), (X_n) est géométriquement ergodique, ce qui entraîne la forte mélangeance de (X_n) avec une vitesse de convergence géométrique. On peut alors appliquer le théorème 2.1 à la statistique $\hat{\mathbf{F}}_\mathbf{n}(\mathbf{U_n})$.

Exemple 2.2. On considère $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires réelles, absolument régulière avec des taux géométriques (par exemple une chaîne de Markov Harris récurrente, apériodique et géométriquement ergodique est absolument régulière avec des taux géométriques). On définit une suite de variables aléatoires par la formule suivante :

$$Y_n = aX_n + e_n, \quad a \in \mathbb{R},$$

où $(e_n, n \in \mathbb{N})$ est un bruit corrélé. De façon plus précise, (e_n) sont des variables aléatoires réelles absolument régulières de même loi, de taux géométrique et de densité strictement positive dérivable de classe C^1 à dérivée première bornée telles que : $E(e_n) = 0$ et $E(e_n^2) < \infty$. Les couples (X_i, Y_i) forment alors une suite de vecteurs aléatoires, absolument réguliers telle que $\beta(m) = O(\rho^m)$, pour un certain $0 < \rho < 1$. Ainsi, dans un tel modèle, les valeurs de Y_n sont souvent des valeurs observées tandis que les valeurs de X_n sont inobservables et e_n représente une erreur de mesure indépendante des observations X_n. L'utilisation de la statistique $\hat{\mathbf{F}}_\mathbf{n}(\mathbf{U_n})$ permet alors d'estimer la fonctionnelle $\mathbf{F}(\xi)$ où $\mathbf{F}$ est la fonction de répartition inconnue de Y_n et ξ est un paramètre fonctionnel. On pourra également tester la symétrie de $\mathbf{F}$ par rapport à un paramètre de localisation ξ.

Exemple 2.3. On considère le modèle défini par la relation de récurrence :

$$X_i + \sum_{j=1}^{p_1} A_j X_{i-j} = \epsilon_i + \sum_{\ell=1}^{p_2} B_\ell \epsilon_{i-\ell}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

où $A_1, ..., A_{p_1}, B_1, ..., B_{p_2}$ sont des matrices réelles de dimension $p \times p$, A_{p_1} et B_{p_2} inversibles. Ici, $(\epsilon_i, i \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc multivarié, c'est-à-dire une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, de densité strictement positive différentiable de classe C^1 à dérivées partielles premières bornées. Sous ces hypothèses, X_i est un processus ARMA à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. D'après Pham et Tran (1985), X_i admet une représentation markovienne, à savoir

$$X_i = HZ_i, \quad Z_i = FZ_{i-1} + G\epsilon_i,$$

où Z_i sont des vecteurs aléatoires et H, F, G des matrices appropriées. Si les valeurs propres de la matrice H sont de module inférieur à 1, alors la suite X_i est absolument régulière avec des taux géométriques.

Soit maintenant la suite de vecteurs aléatoires définie par la formule suivante :

$$Y_i = CX_i + e_i,$$

où C est une $q \times p$ matrice réelle, Y_i un $q \times 1$ vecteur aléatoire et $(e_i, i \in \mathbb{Z})$ un bruit corrélé multivarié . De façon plus précise (e_i) sont des vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ absolument réguliers et de taux géométriques de densité strictement positive différentiable de classe C^1 à dérivées partielles bornées tels que $E(e_i) = 0$ et la matrice de covariance D de e_i est définie positive. L'aspect multidimensionnel du résultat du théorème 2.1 permet donc de l'appliquer à la suite de vecteurs Y_i et d'utiliser la statistique $\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{U_n})$ pour estimer $\mathbf{F}(\xi)$ où $\mathbf{F}$ est la fonction de répartition inconnue de Y_i et ξ est un paramètre fonctionnel à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

3 Démonstration du Théorème 2.1

A partir de (1.3), (1.4) et (2.1), on a :

$$U_{n,j} = \xi_j + \sum_{c=1}^{m_j} \binom{m_j}{c} U_{n,j}^{(c)}, \quad 1 \le j \le p. \tag{3.1}$$

En écrivant

$$\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{U_n}) = \hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}}(\xi) + \sum_{j=1}^{p}(U_{n,j} - \xi_j)\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi) + n^{-\frac{1}{2}}Q_n,$$

où

$$Q_n = n^{\frac{1}{2}}\{\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{U_n}) - \hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}}(\xi) - \sum_{j=1}^{p}(U_{n,j} - \xi_j)\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi)\},$$

il vient alors

$$n^{\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{U_n}) - \mu_n) = C_n + Q_n \tag{3.2}$$

avec

$$C_n = n^{\frac{1}{2}}\left\{\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}}(\xi) - \mu_n + \sum_{j=1}^{p}(U_{n,j} - \xi_j)\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi)\right\} \tag{3.3}$$

D'après (2.1), on a pour $j = 1, ..., p$:

$$U_{n,j}^{(1)} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^p} g_{j,1}(\mathbf{x})d[\mathbf{s}(\mathbf{x} - \mathbf{X_i}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})] = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}[g_{j,1}(\mathbf{X_i}) - \xi_j]. \tag{3.4}$$

De (1.1), (3.1), (3.2) et (3.3), on déduit

$$C_n = \mathbf{H_n}(\xi) + n^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{p} \sum_{c=2}^{m_j} \binom{m_j}{c} U_{n,j}^{(c)} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi) \tag{3.5}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{H_n}(\xi) &= n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\ell=1}^{n} \{K_n(\xi - \mathbf{X}_\ell) - \mu_n + \sum_{j=1}^{p} m_j (g_{j,1}(\mathbf{X}_\ell) - \xi_j) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi)\} \\ &= n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\ell=1}^{n} T_{n\ell},\end{aligned}$$

où

$$T_{n\ell} = K_n(\xi - \mathbf{X}_\ell) - \mu_n + \sum_{j=1}^{p} m_j (g_{j,1}(\mathbf{X}_\ell) - \xi_j) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi), 1 \leq \ell \leq n. \tag{3.6}$$

Remarquons que $\{T_{n\ell}, 1 \leq \ell \leq n, n \geq 1\}$ est une suite de variables alátoires centrées, non stationnaire fortement mélangeante.

Lemme 3.1 *Sous les conditions du théorème 2.1,*
(i) C_n converge en loi vers $N(0, \sigma^2)$
(ii) Q_n converge en probabilité vers 0.

La démonstration du théorème 2.1 est alors une conséquence immédiate du lemme 3.1 et de l'égalité (3.2).

Démonstration du lemme 3.1 Soit $\varepsilon > 0$, $1 \leq j \leq p$ et $2 \leq c \leq m_j$. D'après le théorème 1 de Rio (1995), il existe $\gamma \geq 0$ tel que

$$P[n^{\frac{1}{2}} |U_{n,j}^{(c)}| \geq \varepsilon] \leq n \frac{E(U_{n,j}^{(c)})^2}{\varepsilon^2} = O(\frac{n^{-\gamma}}{\varepsilon^2}) \to 0, \quad n \to \infty \tag{3.7}$$

D'après (3.7), le deuxième terme du second membre de (3.5) converge en probabilité vers 0. Pour établir la convergence de C_n, il suffit de montrer que $\mathbf{H}_n(\xi)$ converge vers $N(0, \sigma^2)$. A cet effet, on définit pour chaque $K > 0$, une suite de variables aléatoires (Y_{ni}^K) par :

$$Y_{ni}^K = K_n(\xi - \mathbf{X_i}) - \mu_n + \sum_{j=1}^{p} m_j (g_{j,1}^K(\mathbf{X_i}) - \xi_j) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi), \quad 1 \leq i \leq n, n \geq 1,$$

où

$$g_{j,1}^K = \begin{cases} g_{j,1} & \text{si } |g_{j,1}| \leq K \\ 0 & \text{si } |g_{j,1}| > K, \end{cases}$$

et on montre que

$$(i) \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{1 \leq \ell \leq n} |Y_{n\ell}^K| \leq B_K < \infty, \quad \forall K > 0$$

$$(ii) \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{1 \leq \ell \leq n} E|T_{n\ell} - Y_{n\ell}^K|^{2+\delta} \to_{K \to \infty} 0,$$

(iii)
$$\frac{1}{n}E(\sum_{\ell=1}^{n} T_{n\ell})^2 \to \sigma^2 < \infty, \quad n \to \infty,$$

(iv)
$$\frac{1}{n}E\left[\sum_{\ell=1}^{n}(Y_{n\ell}^K - E(Y_{n\ell}^K))\right]^2 \to \sigma_K^2 < \infty, \quad n \to \infty,$$

où les $\sigma_K^2 > 0$ sont des constantes telle que $\lim_{K\to\infty}\sigma_K^2 = \sigma^2$. C'est le théorème limite centrale établi par Harel et Puri (1989) pour des variables non stationnaires non necessairement bornées en condition de mélange fort. Ce théorème généralise le théorème limite centrale lorsque les variables aléatoires sont uniformément bornées, établi par Withers (1975). La démonstration des assertions (i) à (iv) est donnée en annexe.

La convergence de C_n en découle immédiatement. Quand à Q_n, on peut l'écrire sous la forme $Q_n = A_n + B_n$, où

$$\begin{cases} A_n = \int [V_n(\mathbf{U_n} - \mathbf{t}) - V_n(\xi - \mathbf{t})]dK_n(\mathbf{t}) \\ B_n = \int [\mathbf{F}(\mathbf{U_n} - \mathbf{t}) - \mathbf{F}(\xi - \mathbf{t}) - \sum_{j=1}^{p}(U_{n,j} - \xi_j)\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi)]dK_n(\mathbf{t}) \end{cases}$$

et $V_n(\mathbf{x}) = n^{\frac{1}{2}}(\tilde{\mathbf{F}}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$ est le processus expérimental multidimensionnel standard. D'après le théorème 2 de Rio (1995), on a

$$U_{n,j}^{(1)} = O(b_n), \quad b_n = (n^{-1}\log\log n)^{\frac{1}{2}}, \quad j = 1, ..., p.$$

Il s'ensuit alors que :

$$|A_n| \le \sup_{||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \le Cb_n} |V_n(\mathbf{x}) - V_n(\mathbf{y})| \int dK_n(\mathbf{t}) \le \sup_{||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \le Cb_n} |V_n(\mathbf{x}) - V_n(\mathbf{y})|,$$

où C est une constante positive.

La convergence du majorant de $|A_n|$ vers 0 est obtenue par le théorème 3 de Deompongsa (1984) sous la condition de mélange fort (2.6) ($\alpha(n) = O(n^{-a})$ avec $a > (1+\theta)p + 3$ et $\theta > 0$).

Pour le second terme de Q_n, on utilise le développement de Taylor. D'après la formule de Lagrange appliquée à $\mathbf{F}$ aux points $\mathbf{U_n} - \mathbf{t}$ et $\xi - \mathbf{t}$ jusqu'à l'ordre deux, il existe $0 < \theta' < 1$ tel que

$$\mathbf{F}(\mathbf{U_n}-\mathbf{t}) - \mathbf{F}(\xi - \mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{p}(U_{n,j}-\xi_j)\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi - \mathbf{t}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{p}(U_{n,j}-\xi_j)(U_{n,\ell}-\xi_\ell)\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x_\ell \partial x_j}(z_{\theta'})$$

avec $z_{\theta'} = \xi - \mathbf{t} + \theta'(\mathbf{U_n} - \xi)$. De même, il existe $\theta'', 0 < \theta'' < 1$ tel que

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi - \mathbf{t}) - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi) = \sum_{\ell=1}^{p}(U_{n,\ell} - \xi_\ell)(-t_j)\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x_\ell \partial x_j}(z_{\theta''})$$

avec $z_{\theta''} = \xi - \theta''\mathbf{t}$. Par ailleurs, on trouve

$$\begin{aligned}|B_n| &\leq pn^{\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{p}|U_{n,j}-\xi_j|\cdot||\Delta\mathbf{F}||_\infty\int||\mathbf{t}||dK_n(\mathbf{t})\\&+\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}\sum_{j=1}^{p}|U_{n,j}-\xi_j|\sum_{\ell=1}^{p}|U_{n,\ell}-\xi_\ell|||\Delta\mathbf{F}||_\infty\int dK_n(\mathbf{t}),\end{aligned}$$

où $||\Delta\mathbf{F}||_\infty = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^p}|\Delta\mathbf{F}(\mathbf{x})|$, $\Delta\mathbf{F}$ est le Hessien de $\mathbf{F}$.

Or pour tout $1 \leq j \leq p, |U_{n,j} - \xi_j| \leq C_j b_n$, où C_j est une constante positive. De plus, $n^{\frac{1}{2}}(U_{n,j} - \xi_j)$ converge vers $N(0, m_j^2\tau_j^2)$ (voir Rio (1995)). Ainsi, si on pose

$$\tau_j^2 = E(g_{j,1}(\mathbf{X_1}))^2 - \xi_j^2 + 2\sum_{i=1}^{+\infty}E\left[g_{j,1}(\mathbf{X_1})g_{j,1}(\mathbf{X_{i+1}}) - \xi_j\right]^2, \quad 1 \leq j \leq p$$

alors

$$\int||\mathbf{t}||dK_n(\mathbf{t}) = \max_{1\leq i\leq p}\int|t_i|a_n^{-p}k(\mathbf{t}a_n^{-1})d\mathbf{t} = \max_{1\leq i\leq p}(a_n\int|t_i|k(\mathbf{t})d\mathbf{t}) \to_{n\to\infty} 0$$

et donc B_n converge vers 0 en probabilité. Le lemme 3.1 est démontré.

4 Annexe

Pour tout $K > 0$ on définit une suite de variables Y_{ni}^K par :

$$Y_{ni}^K = K_n(\xi - \mathbf{X_i}) - \mu_n + \sum_{j=1}^{p}m_j(g_{j,1}^K(\mathbf{X_i}) - \xi_j)\frac{\partial\mathbf{F}(\xi)}{\partial x_j} \quad 1 \leq i \leq n, n \geq 1 \tag{4.1}$$

et

$$g_{j,1}^K = \begin{cases} g_{j,1} & \text{si } |g_{j,1}| \leq K \\ 0 & \text{si } |g_{j,1}| > K\end{cases} \tag{4.2}$$

alors

$$\begin{aligned}\sup_n\max_{1\leq\ell\leq n}|Y_{n\ell}^K| &\leq 1 + \sup_n\max_{1\leq\ell\leq n}\sum_{j=1}^{p}m_j|g_{j,1}^K(\mathbf{X}_\ell) - \xi_j)\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi)|\\&\leq 1 + p||m||\cdot||\nabla\mathbf{F}||_\infty(K + ||\xi||) = B_K < +\infty\end{aligned}$$

où

$$||\mathbf{x}|| = \max_{1\leq j\leq p}|x_j|, m = (m_1, ..., m_p), ||\mathbf{F}||_\infty = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^p}|\mathbf{F}(\mathbf{x})|$$

$\nabla\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x_1}(\mathbf{x}), ..., \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x_p}(\mathbf{x}))$ est le gradient de $\mathbf{F}$, ce qui montre (i).
Soit $\delta'' > 0$ tel que $(2 + \delta'')(1 + \varepsilon) = 2 + \delta', \varepsilon > 0$, $0 < \delta'' < \delta' < \delta$,
en utilisant les deux inégalités suivantes

$$|a - b|^h \leq 2^h(|a|^h + |b|^h), \quad h \geq 1 \tag{4.3}$$

$$|\sum_{i=1}^{p} a_i|^h \leq 2^{h(p-1)} \sum_{i=1}^{p} |a_i^h|, \quad h \geq 1, p \geq 2 \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\sup_n \max_{1\leq \ell\leq n} E|T_{n\ell} - Y_{n\ell}^K|^{2+\delta''} &= \sup_n \max_{1\leq \ell\leq n} E|\sum_{j=1}^{p} m_j(g_{j,1}(\mathbf{X}_\ell) - g_{j,1}^K(\mathbf{X}_\ell))\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi)|^{2+\delta''} \\
&\leq (||m|| \cdot ||\nabla \mathbf{F}||_\infty)^{2+\delta''} \sum_{j=1}^{p} \int_{\{|g_{j,1}(\mathbf{x})|>K\}} |g_{j,1}(\mathbf{x})|^{2+\delta''} d\mathbf{F}(\mathbf{x}) \\
&\leq (\frac{2^{(p-1)}||m|| \cdot ||\nabla \mathbf{F}||_\infty}{K^\varepsilon})^{2+\delta''} \sum_{j=1}^{p} \int |g_{j,1}(\mathbf{x})|^{2+\delta''} d\mathbf{F}(\mathbf{x}) \qquad (4.5) \\
&\leq (\frac{2^{(p-1)}||m|| \cdot ||\nabla \mathbf{F}||_\infty}{K^\varepsilon})^{2+\delta''} p(1+M_0) \to_{K\to+\infty} 0
\end{aligned}$$

ce qui montre (ii).
Par stationnarité, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}E(\sum_{\ell=1}^{n} T_{n\ell})^2 &= \rho_0 + \frac{2}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1}(n-\ell)\rho_\ell \\
&\leq |\rho_0| + 2\sum_{\ell=1}^{n-1} |\rho_\ell| + \frac{2}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell|\rho_\ell| = J_1 + J_2 \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} J_1 &= |\rho_0| + 2\sum_{\ell=1}^{n-1} |\rho_\ell| \\ J_2 &= \frac{2}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell|\rho_\ell|. \end{cases}$$

La convergence de K_n vers $\mathbf{s}$ implique $\rho_0 \to E(A_1^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$, en appliquant les inégalités sur les moments d'une suite de variables aléatoires fortement mélangeantes (voir théorème 10 de Doukhan et Portal (1983)) avec $\gamma = \frac{1+\delta'}{\delta'}, u = v = 2(1+\delta'), (\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1)$.
Pour $\delta' < \frac{\delta}{2}$, on a

$$|\rho_i| \leq 12(\alpha(i))^{\frac{1+\delta'}{\delta'}} ||T_{ni}||_u^2 = 12(\alpha(i))^{\frac{1+\delta'}{\delta'}} (E(T_{ni})^{2+2\delta'})^{\frac{1}{1+\delta'}} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
E(T_{n1})^{2+2\delta'} &\leq 2^{2+2\delta'}[1 + E(\sum_{j=1}^{p} m_j(g_{j,1}(\mathbf{X_1}) - \xi_j)\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi))]^{2+2\delta'} \\
&\leq 2^{2+2\delta'}[1 + (||m|| \cdot ||\nabla \mathbf{F}||_\infty)^{2+2\delta'} 2^{(p-1)(2+2\delta')} \sum_{j=1}^{p} E|g_{j,1}(\mathbf{X_1})|^{2+2\delta'}] \\
&\leq 2^{2+2\delta'}[1 + (||m|| \cdot ||\nabla \mathbf{F}||_\infty)^{2+2\delta'} 2^{(p-1)(2+2\delta')} p(1+M_0)] \\
&\leq M^{1+\delta'}
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$|\rho_i| \leq 12(\alpha(i))^{\frac{1+\delta'}{\delta'}} M, \tag{4.8}$$

et d'après (2.6) et (4.8), on a

$$J_1 \leq |\rho_0| + 24M \sum_{i=1}^{+\infty} O(i^{-(\frac{2+\delta'}{1+\delta'})}) < +\infty \tag{4.9}$$

$$J_2 \leq \frac{24M}{n} \sum_{i=1}^{n-1} O(i^{-(\frac{1}{1+\delta'})}) \to_{n\to+\infty} 0 \tag{4.10}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} T_{ni})^2 \to E(A_1^2) + 2\sum_{i=1}^{+\infty} E(A_1 A_{i+1}) = \sigma^2, \tag{4.11}$$

et (iii) est ainsi démontré.
On note

$$\rho_0^K = E(Y_{n1}^K - E(Y_{n1}^K))^2,$$
$$\rho_i^K = cov(Y_{n1}^K, Y_{n(i+1)}^K), \quad 1 \leq i \leq n-1, n \geq 1$$

et

$$A_i^K = \mathbf{s}(\xi - \mathbf{X_i}) - \mathbf{F}(\xi) + \sum_{j=1}^{p} m_j (g_{j,1}^K(\mathbf{X_i}) - E(g_{j,1}^K(\mathbf{X_i}))) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi), \quad i \geq 1.$$

Par stationnarité

$$\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}(Y_{ni}^K - E(Y_{ni}^K)))^2 = \rho_0^K + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\rho_i^K \leq J_1^K + J_2^K \tag{4.12}$$

où

$$J_1^K = |\rho_0^K| + 2\sum_{i=1}^{n-1} |\rho_i^K|,$$

$$J_2^K = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i|\rho_i^K|.$$

Or $K_n \to \mathbf{s}$, lorsque $n \to +\infty$, donc $|\rho_0^K| \to E(A_1^K)^2$, lorsque n tend vers l'infini.
On applique de nouveau les inégalités sur les moments d'une suite de variables aléatoires fortement mélangeantes (voir théorème 10 de Doukhan et Portal (1983)) avec $\gamma = \frac{1+\delta'}{\delta'}, u = v = 2(1+\delta'), (\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1)$.
On a pour $\delta' < \frac{\delta}{2}$

$$|\rho_i^K| \leq 12(\alpha(i))^{\frac{\delta'}{1+\delta'}} \{E(Y_{n1}^K - E(Y_{n1}^K))^{2+2\delta'}\}^{\frac{1}{1+\delta'}} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} E(Y_{n1}^K - E(Y_{n1}^K))^{2+2\delta'} &\leq 2^{2+2\delta'}[1 + E(\sum_{j=1}^{p} m_j (g_{j,1}^K(\mathbf{X_1}) - E(g_{j,1}^K(\mathbf{X_1}))) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\xi)]^{2+2\delta'} \\ &\leq [2^{2+2\delta'}(1 + 2^{(p-1)}||m|| \cdot ||\nabla \mathbf{F}||_\infty) \sum_{j=1}^{p} E(g_{j,1}^K(\mathbf{X_1}) - E(g_{j,1}^K(\mathbf{X_1})))]^{2+2\delta'} \end{aligned}$$

$$E(g_{j,1}^K(\mathbf{X_1}) - E(g_{j,1}^K(\mathbf{X_1})))^{2+2\delta'} \le 2^{2+2\delta'}\{E(g_{j,1}^K(\mathbf{X_1}))^{2+2\delta'} + (Eg_{j,1}^K(\mathbf{X_1}))^{2+2\delta'}\}$$
$$\le 2^{3+2\delta'}E(g_{j,1}^K(\mathbf{X_1}))^{2+2\delta'} \le M_0 2^{2+2\delta'} = M_1,$$

ce qui implique

$$E(Y_{n1}^K - E(Y_{n1}^K))^{2+2\delta'} \le 2^{2+2\delta'}\{1 + (||m|| \cdot ||\nabla\mathbf{F}||_\infty)^{2+2\delta'} 2^{(2+2\delta')(p-1)} pM_1\} = M_2^{1+\delta'}$$

et

$$|\rho_i^K| \le 12(\alpha(i))^{\frac{\delta'}{1+\delta'}} M_2$$

d'où

$$\begin{cases} |J_1^K| \le |\rho_0^K| + 24M_2 \sum_{i=1}^{+\infty} O(i^{-(\frac{2+\delta'}{1+\delta'})}) < +\infty, \\ |J_2^K| \le \dfrac{24M_2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} O(i^{-(\frac{1}{1+\delta'})}) \to 0, n \to +\infty \end{cases}$$

$K_n \to \mathbf{s}$ lorsque $n \to +\infty$

$$\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}(Y_{ni}^K - E(Y_{ni}^K)))^2 \to E(A_1^K)^2 + 2\sum_{i=1}^{+\infty} E(A_1^K A_{i+1}^K) = \sigma_K^2 < +\infty$$

$$\lim_{K\to+\infty} \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{(m_j-1)p}} |g_{j,1}^K(\mathbf{x}) - g_{j,1}(\mathbf{x})| = 0$$

et d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $E(A_1^K)^2$ converge vers $E(A_1)^2$ et $E(A_1^K A_{i+1}^K)$ converge vers $E(A_1 A_{i+1})$ quand K tend vers l'infini, ce qui implique que

$$\lim_{K\to+\infty} \sigma_K^2 = \sigma^2,$$

ce qui entraîne (iv).

Remerciements : Les auteurs remercient le rapporteur de ses nombreuses remarques et suggestions qui ont permis d'améliorer de façon sensible les résultats de cet article.

Références

[1] Berkes, I., Philipp W. (1977). An almost sure invariance principle for the empirical distribution function of mixing random variables. *Z. Wahrsch. v. Geb.*, **41**, 115-137.

[2] Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York.

[3] Doukhan, P. (1994). Mixing : properties and examples. *Lecture Notes in Statistics*, **85**. Springer-Verlag, Berlin.

[4] Doukhan, P., Portal, F. (1983). Moments de variables aléatoires mélangeantes. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I,* **297**, 129-132.

[5] Gyorfi, L., Härdle, W., Sarda, P., Vieu, P. (1989). Non parametric curve estimation from time series. *Lecture Notes in Statistics,* **60**. Springer-Verlag, Berlin.

[6] Harel, M., Puri, M. L. (1989). Limiting behavior of U-statistics, V-statistics and one-sample rank order statistics for non-stationary absolutely regular processes. *J. Multiv. Anal.,* **30**, 181-204.

[7] Harel, M., Puri, M. L. (1995). Law of iterated logarithm for perturbed empirical distributions functions evaluated at a random point for nonstationary random variables. *J. Theoretical Probab.,* **7**, 831-855.

[8] Jones, M. C. (1990). The performance of kernel density functions in kernel distribution function estimation. *Statistics and Probability Letters,* **9**, 129-132.

[9] Mokkadem, A. (1987). Sur un modèle autorégressif non linéaire, ergodicité et ergodicité géométrique. *J.T.S.A.*, **2**, 195-204.

[10] Mokkadem, A. (1990). Propriétés de mélange des modèles autorégressifs polynomiaux. *Ann. I.H.P., Série B : Probabilités et Statistiques*, **26**, 2, 219-260.

[11] Nadaraya, E. A. (1964). Some new estimates for distribution functions. *Theory Probab. Appl.,* **9**, 497-500.

[12] Puri, M.L., Ralescu, S. (1986). Central limit theorem for perturbed empirical distributions evaluated at a random point. *J. Multiv. Anal.,* **19**, 273-270.

[13] Parzen, E. (1962). On estimation of probability density function and mode. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 1065-1070.

[14] Pham T. D., Tran L. T. (1985). Some mixing properties of time series models. *Stoch. Processes and Their Appl.,* **19**, 297-303.

[15] Philipp, W. (1977). A functional law of the iterated logarithm for empirical distribution functions of weakly dependent random variables. *Ann. Probab.* **5**, 3, 319-350.

[16] Ralescu, S., Sun, S.(1993). Necessary and sufficient conditions for the asymptotic normality of perturbed sample quantiles. *J. Statist. Plann. Inference*, **32**, 243-258.

[17] Rio, E. (1995). The functional law of the iterated logarithm for stationary strongly mixing sequences. *Ann. Probab.*, **23**, 3, 1188-1203.

[18] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.*, **27**, 832-837.

[19] Sarda, P., Vieu W. (1989). Distribution function for mixing random variables. Application on parametric hazard estimation. *Statistics*, **20**, 4, 559-571.

[20] Sarda, P. (1993). Smoothing parameter selection for smooth distribution functions. *J. Statist. Plann. Inference*, **35**, 65-75.

[21] Shirahata, S., Chu, I. S. (1992). Integrated squared error of kernel-type estimator of distribution function. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **3**, 579-591.

[22] Sun, S. (1993). Asymptotic behavior of the perturbed empirical distribution fonctions evaluated at random point for absolutely regular sequences. *J. Multiv. Anal.*, **47,** (2), 230-249.

[23] Sun, S. (1995 (a)). Central limit theorem of the perturbed sample quantile for sequence of a m-dependent nonstationary random process. *Theory Probab. Appl.,* **40**, 1, 143-158.

[24] Sun, S. (1995 (b)). Perturbed empirical distributions functions and quantiles under dependence. *J. Theoretical Probab.,* **8**, 4, 763-777.

[25] Sun, S., Chiang, Y. C. (1995). Limiting behavior of the perturbed empirical distributions functions evaluated at U-statistics for strongly mixing sequences of random variables. *J. Appl. Math. and Stochastic Anal.* (à paraître).

[26] Swanepoel, J. W. H. (1988). Mean integrated squared error properties and optimal kernels when estimating a distribution function. *Comm. Statist. Theory Methods,* **17**, 3785-3799.

[27] Watson, G. S., Leadbetter, M. R. (1964). Hasard analysis II. *Sankhyā, Ser. A.,* **26**, 101-116.

[28] Winter, B. B. (1973). Strong uniform consistency of integrals of density estimators. *Canad. J. Statist.,* **1,** 247-253.

[29] Winter, B. B. (1979). Convergence rate of perturbed empirical distributions functions. *J. Appl. Probab.,* **16**, 163-173.

[30] Withers, C. S. (1975). Convergence of empirical processes of mixing r.v's on [0,1]. *Ann. Statist.,* **3**, 1101-1108.

[31] Yamato, H. (1973). Uniform convergence of an estimator of a distribution function. *Bull. Math. Statist.,* **15**, 69-79.

IUFM du Limousin,
209 Bd. de Vanteaux,
87 036 Limoges cedex

et

UMRC 55 830 CNRS, Toulouse, France,
e-mail : HAREL@unilim.fr, RAGBI@unilim.fr