Sur la conjecture de Halperin relative au rang torique

Mohamed Rachid Hilali

Abstract

If a torus T^n acts almost freely on a finite CW-complex X, then Halperin's conjecture asserts : $dimH^\star(X, \mathbb{Q}) \geq dimH^\star(T^n, \mathbb{Q}) = 2^n$. In this paper we show that this inequality is true for hyperelliptic spaces and for Poincaré duality spaces of codimension less or equal to 6.

1 introduction

Le présent travail est consacré à l'étude du rang torique des espaces topologiques. Notre but est la majoration du supremum des entiers n, tels que le tore $T^n = (\mathbb{S}^1)^n$ agit presque librement sur un espace topologique X. Malheureusement ce supremum n'est pas un invariant homotopique, car un cercle admet une action libre du tore T^1, mais un cercle auquel on a recollé un intervalle n'admet pas d'action presque libre de T^1. Ainsi, convient-il de modifier notre définition. De ce fait, nous définissons le rang torique d'un espace topologique X, que nous notons $rk_0(X)$, comme étant le supremum des entiers n tels que le le tore T^n agit presque librement sur un espace topologique Y de même type d'homotopie rationnelle que X. On vérifie qu'il est un invariant de type d'homotopie rationnelle.
De nombreux auteurs ont essayé de calculer $rk_0(X)$, Halperin, Allday et Puppe en particulier. Leurs calculs les ont conduits à formuler la conjecture suivante appelée

Received by the editors December 1998 – In revised form February 1999.
Communicated by Y. Félix.
1991 *Mathematics Subject Classification :* homotopie rationnelle - cohomologie - espace elliptique - espace pur - espace hyperelliptique - modèle minimal de Sullivan - rang torique - action du tore.
Key words and phrases : 55P62. 57S10.

conjecture du rang torique (CRT) :

Conjecture(CRT) 1. *Si X est un espace topologique raisonnable (voir [19]), alors :*

$$dimH^{\star}(X,\mathbb{Q}) \geq 2^{rk_0(X)}.$$

Cette conjecture a été proposée en 1985 par S. Halperin [19], et résolue dans les cas suivants :

– $X = G/H$; où G est un groupe de Lie compact, H un sous groupe fermé([13]).
– $rk_0(X) \leq 3$ ([3]).
– X a la cohomologie rationnelle d'un espace de Kähler ([3]).
– X est 1-connexe, raisonnable, coformel, $L_{impair}(X) = 0$, et $L(X)^3 = 0$ ([3]).
– X un $T^{rk_0(X)}$-espace strict et raisonnable ([16]).

Un espace topologique X est dit elliptique si : $dimH^{\star}(X,\mathbb{Q}) < \infty$, et $dim(\pi_{\star}(X) \otimes \mathbb{Q}) < \infty$.
On dit que X est hyperelliptique si X est l'espace total d'une fibration telle que la cohomologie rationnelle de la fibre, et de l'espace de lacets de la base sont des algèbres extérieures de dimension finie.
On définit la dimension formelle $fd(X)$, et la codimension $codim(X)$, d'un CW-complexe fini X par :

$$\begin{array}{rcl} fd(X) & = & max\{k \in \mathbb{N} / dimH^{\star}(X,\mathbb{Q}) \neq 0\} \\ codim(X) & = & fd(X) - rk_0(X). \end{array}$$

Dans cette article nous résolvons la conjecture CRT dans les deux cas suivants :

Théorème 1. *CRT est vérifiée si X est un espace topologique 1-connexe, de type d'homotopie d'un CW-complexe fini, satisfaisant la dualité de Poincaré, et $codim(X) \leq 6$.*

Corollaire 1. *CRT est vérifiée si X est un espace topologique 1-connexe, de type d'homotopie d'un CW-complexe fini, satisfaisant la dualité de Poincaré , et $fd(X) \leq 10$. En particulier la conjecture est vraie pour une variété 1-connexe, compacte, et de dimension ≤ 10.*

Théorème 2. *CRT est vérifiée si X est un espace hyperelliptique et 1-connexe .*

Cet article est organisé de la façon suivante : le premier paragraphe donnera les rappels essentiels a notre étude, les autres paragraphes seront consacrés aux démonstrations des théorèmes ci-dessus.

2 Rappels

Rappelons qu'une action d'un groupe de Lie G sur un espace X est dite presque libre si le sous groupe d'isotropie de tout point $x \in X$ est fini.
La fibration de Borel associée à une action d'un groupe de Lie compact G sur X :

$$(\mathcal{F}) : X \longrightarrow X_G \longrightarrow B_G$$

est définie comme le fibré de groupe structural G et de fibre X, qui est associé à la fibration universelle principale de G :

$$G \longrightarrow E_G \longrightarrow B_G.$$

On sait d'après Hsiang [14] que si un groupe de Lie compact G agit presque librement sur un CW-complexe fini X, alors :

$dimH^\star(X_G, \mathbb{Q}) < \infty$, et donc $\chi_c(X) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i dimH^\star(X, \mathbb{Q}) = 0$.

D'après Sullivan, on peut associer à chaque espace topologique simplement connexe X une algèbre différentielle graduée et commutative $m_X = (\Lambda V, d)$ vérifiant :

- ΛV est l'algèbre graduée commutative libre sur l'espace vectoriel gradué V.
- $dV \subset \Lambda^{\geq 2}(V)$.
- il existe un quasi-isomorphisme d'algèbres différentielles graduées $\psi : (\Lambda V, d) \longrightarrow A_{PL}(X)$, où $A_{PL}(X)$ désigne l'algèbre différentielle des PL-formes sur X.

Si X est simplement connexe de type fini (ie : $\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie $\forall n \in N$), alors :

$$V^n \simeq Hom_Z(\pi_n(X), \mathbb{Q}), \forall n \geq 1.$$

Plus généralement, à toute fibration $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ on peut associer un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A_{PL}(B) & \longrightarrow & A_{PL}(E) & \longrightarrow & A_{PL}(F) \\ \uparrow f & & \uparrow g & & \uparrow h \\ m_B & \longrightarrow & (m_B \otimes \Lambda W, D) & \longrightarrow & (\Lambda W, \bar{D}) \end{array}$$

où f, g et h sont des quasi-isomorphismes. La ligne du bas du diagramme ci-dessus, qui est définie à isomorphisme près, s'appelle alors la KS-extension de la fibration([10]). En particulier la KS-extension associée à la fibration de Borel $(\mathcal{F})$ dans le cas où $G = T^n$ s'écrit :

$$(1) : (\Lambda(a_1, ..., a_n), 0) \longrightarrow (\Lambda(a_1, ..., a_n) \otimes \Lambda V, D) \longrightarrow (\Lambda V, \bar{D})$$

où $(\Lambda(a_1, ..., a_n), 0)$ (degré de $a_i = |a_i| = 2$) et $(\Lambda V, \bar{D})$ sont respectivement les modèles minimaux de B_{T^n} et X. Si X est un CW-complexe fini, alors d'après le théorème de Hsiang [14] les dimensions des espaces vectoriels, $H^\star(\Lambda V, \bar{D})$ et $H^\star(\Lambda(t_1, ..., t_n) \otimes \Lambda V, D)$ sont finies. Finalement en terme de modèle minimal de Sullivan CRT est équivalente à la conjecture suivante :

Conjecture(CRT) 2. *Si on a une KS-extension du type (1), avec* $dimH^\star(\Lambda(a_1, ..., a_n) \otimes \Lambda V, D) < \infty$, *alors* $dimH^\star(\Lambda V, \bar{D}) \geq 2^n$.

3 Preuve du théorème 1

Considérons la fibration de Borel $(\mathcal{F})$ associée à l'action de T^n $(n = rk_0(X))$ sur un espace topologique X, 1-connexe, ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe fini, et vérifiant la dualité de Poincaré :

$$(\mathcal{F}) : X \longrightarrow X_{T^n} \longrightarrow B_{T^n}$$

$(\mathcal{F})$ induit la fibration suivante :

$$(\mathcal{F}') : \Omega B_{T^n} \longrightarrow X \longrightarrow X_{T^n}.$$

D'après Hsiang [14], on a :

$$dimH^\star(X_{T^n}, \mathbb{Q}) < \infty.$$

Puisque X satisfait la dualité de Poincaré, et B_{T^n} est un espace de Gorenstein, d'après [6,th 4,3] l'espace X_{T^n} satisfait aussi la dualité de Poincaré. D'autre part, on déduit d'après la fibration $(\mathcal{F}')$ que :

$$fd(X_{T^n}) = codim(X) = fd(X) - n.$$

Posons $A = H^\star(X_{T^n}, \mathbb{Q})$. Il résulte du théorème de Neisendorfer-Miller [15] que l'espace X_{T^n} est formel car il vérifie la dualité de Poincaré et $fd(X_{T^n}) \leq 6$. La KS-extension associée à la fibration $(\mathcal{F}')$ s'écrit :

$$(A,0) \longrightarrow (A \otimes \Lambda(t_1,...,t_n), d) \longrightarrow (\Lambda(t_1,...,t_n),0)$$

où $(\Lambda(t_1,...,t_n),0)$ désigne le modèle minimal du tore T^n, $(|t_i| = 1)$. On peut supposer que les dt_i sont linéairement indépendants, car autrement on pourrait trouver par combinaison linéaire un i avec $dt_i = 0$, et dans ce cas

$$(A \otimes \Lambda(t_1,...,t_n), d) \simeq (A \otimes \Lambda(t_1,...,t_{i-1},t_{i+1},...,t_n), d) \otimes (\Lambda t_i, 0),$$

et il suffirait de démontrer le théorème pour $(A \otimes \Lambda(t_1,...,t_{i-1},t_{i+1},...,t_n), d)$. De même, on peut supposer que $n = dimA^2$, car si $n < m = dimA^2$, on peut introduire de nouvelles variables $t_{n+1},...,t_m$ avec dt_i linéairement indépendants. Si l'on montre que la cohomologie de $(A \otimes \Lambda(t_1,...,t_n) \otimes \Lambda(t_{n+1},...,t_m), d)$ a une dimension totale supérieure ou égale à 2^m, alors il résultera de la suite spectrale de Serre que $dimH^\star(A \otimes \Lambda(t_1,...,t_n), d) \geq 2^n$.
Introduisons maintenant une bigraduation $M_i^j = A^{j-i} \otimes \Lambda^i(t_1,...,t_n)$ sur le modèle $M = (A \otimes \Lambda(t_1,...,t_n), d)$ de X. On a alors $d(M_i^j) \subset M_{i-1}^{j+1}$. L'algèbre de cohomologie de M admet donc une bigraduation $\bigoplus_{i,j} H_i^j$.
Maintenant de l'égalité entre les séries de Poincaré-Koszul (voir[9])

$$\sum_{r\geq 0}(\sum_{i+j=r}(-1)^i dimM_i^j)t^r = \sum_{r\geq 0}(\sum_{i+j=r}(-1)^i dimH_i^j)t^r,$$

on déduit que

$$\sum_{r\geq 0}(\sum_{i+j=r}(-1)^i dimH_i^j)t^r = (\sum_k dimA^k t^k)(1-t^2)^n. \quad (\star)$$

Notons $c = fd(X_{T^n})$. Si $c \leq 2$, $dimA^2 \leq 1, n \leq 1$, et le théorème est démontré. Si $c = 3, n = dimA^2 = 0$ par dualité de Poincaré, et le théorème est également démontré. Si $c = 4$, en posant t égale au nombre complexe i, on obtient

$$\sum_{r,j}(-1)^r dimH_r^j i^{r+j} = (2-n)2^n$$

Comme on peut supposer que $n \geq 3$, la dimension de $H^\star$ est supérieure ou égale à 2^n. Lorsque $c = 5$, La formule $(\star)$ se décompose en deux parties

$$\begin{aligned} \sum_{r+j\in 2\mathbb{N}}(-1)^r dimH_r^j i^{r+j} &= (n-1)2^n \\ \sum_{r+j-1\in 2\mathbb{N}}(-1)^r dimH_r^j i^{r+j} &= (n-1)2^n \end{aligned}$$

Comme $n \geq 3$, on déduit de nouveau que la dimension de la cohomologie est supérieure ou égale à 2^n.
Lorsque $c = 6$ et $A^3 \neq 0$, alors on a

$$\sum_{r+j-1 \in 2\mathbb{N}} (-1)^r dim H_r^j i^{r+j} = 2^n dim A^3$$

et le résultat s'en déduit. Lorsque $dim A^3 = 0$ la formule $(\star)$ montre que la dimension de la cohomologie est supérieure ou égale au nombre E valeur maximale de la valeur absolue de l'expression
$(1-t)^n(1+nt+nt^2+t^3)$ lorsque t parcourt le disque unité. En posant $t = -e^{2i\theta}$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} E & \geq & max_\theta |(1+e^{2i\theta})^n(1-ne^{2i\theta}+ne^{4i\theta}-6e^{6i\theta})| \\ & = & max_\theta |2^{n+1}cos^n\theta sin\theta(n-3+4sin^2\theta)| \\ & \geq & 2^{n+1}(n-3)cos^n\theta sin\theta \quad pour \quad n > 3, o < \theta < \frac{\pi}{2} \\ & = & f(x) = 2^{n+1}(n-3)x^n\sqrt{1-x^2}, \quad x = cos\theta \end{array}$$

Le minimum de cette fonction est atteint au point $x = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}$, d'où

$$\begin{array}{rcl} E & \geq & 2^{n+1}(n-3)(1+\frac{1}{n})^{-\frac{n}{2}}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ & > & 2^{n+1}\frac{n-3}{\sqrt{n+1}}e^{-\frac{1}{2}} \\ & > & 2^n, \quad si \quad n \geq 6 \end{array}$$

Un simple calcul montre que le résultat est vrai pour $n \leq 6$. Le résultat est donc vrai en général.

4 Preuve du corollaire 1 :

Soit X un espace topologique simplement connexe, de type d'homotopie d'un CW-complexe fini, vérifiant la dualité de Poincaré et $fd(X) \leq 10$ (par exemple X est une variété simplement connexe, compacte et de dimension ≤ 10). La conjecture est vraie si $rk_o(X) \leq 3$[3]. Lorsque $rk_0(X) \geq 4$, on déduit le résultat d'après le théorème 1 car $codim(X) = fd(X) - rk_0(X) \leq 6$.

5 Preuve du théorème 2 :

Considérons la fibration associée à l'espace hyperelliptique X :

$$(1) : F \longrightarrow X \longrightarrow B$$

Soit la KS-extension minimale associée à (1) :

$$(\Lambda P, d_1) \longrightarrow (\Lambda P \otimes \Lambda Q, d) \longrightarrow (\Lambda Q, d_2).$$

Puisque X est hyperelliptique on aura :

(a) $d_1 = d_2 = 0$, et donc $dP = 0$, $dQ \subset \Lambda^+ P \otimes \Lambda Q$

(b) $H^\star(F, \mathbb{Q}) = \Lambda Q$, Q désigne un espace vectoriel gradué de dimension $q < \infty$, et concentré en degrés impairs.

(c) $H^\star(\Omega B, \mathbb{Q}) = \Lambda \bar{P}$, $\bar{P}$ désigne l'espace vectoriel (suspension de l'espace vectoriel P) gradué, de dimension $p < \infty$, et concentré en degrés impairs.

A partir de la fibration (1), on obtient la fibration :

$$(2) : \Omega B \longrightarrow F \longrightarrow X.$$

Comme X est 1-connexe, la suite spectrale de Serre associée à (2) entraîne l'inégalité :

$$dim H^\star(F, \mathbb{Q}) \leq dim H^\star(X, \mathbb{Q}) dim H^\star(\Omega B, \mathbb{Q}).$$

Considérons la KS-extension associée à la fibration (2) :

$$(\Lambda P \otimes \Lambda Q, d) \longrightarrow (\Lambda Q, 0) \longrightarrow (\Lambda \bar{P}, 0).$$

On a alors d'après l'hyperellipticité de X :

$$\begin{array}{rcccl} dim H^\star(F, \mathbb{Q}) & = & dim H^\star(\Lambda Q, 0) & = & 2^q \\ dim H^\star(\Omega B, \mathbb{Q}) & = & dim H^\star(\Lambda \bar{P}, 0) & = & 2^p \end{array}$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{rcc} dim H^\star(X, \mathbb{Q}) & \geq & \frac{dim H^\star(F, \mathbb{Q})}{dim H^\star(\Omega B, \mathbb{Q})} \\ & \geq & 2^{q-p} \end{array}$$

Or on sait d'après Allday-Halperin [2] que

$$n = rk_0(X) \leq -\chi_\pi(X) = q - p.$$

D'où le résultat.

Références

[1] C.ALLDAY 'On the rank of a space', T.A.M.S. 166 (1972) 173-185.

[2] C.ALLDAY, S.HALPERIN 'Lie groupe actions on spaces of finite rank', Quar. J. Math Oxford 28(1978) 69-76.

[3] C.ALLDAY, V.PUPPE 'Bounds on the torus rank', Transformation groups, Poznán 85, Procedings, Springer lec. notes in Math 1217 (1986) 1-10.

[4] J.MILNOR 'Construction of universal bundles, II'. Ann. of Math 63 (1956) 430-436.

[5] G.E.BREDON 'Introduction to compact transformation groups'. New York-London Acad. Press 1972.

[6] Y.FELIX, S.HALPERIN, J.C.THOMAS 'Gorenstein spaces' Advances in Math (1988).

[7] J.FRIEDLANDER, S.HALPERIN 'Rational homotopie groups of certain spaces' . Invent. Math. 53 , (1979). 117-123 .

[8] P.GOTTLIEB 'Poincaré duality and fibrations' Proc. AMS. 76 (1979) 148-150.

[9] W.GREUB , S.HALPERIN ,R.VANSTONE 'Connexion, Curvature and Cohomologie ' , vol. III , Acad. Press , (1976).

[10] S.HALPERIN ' Lecture on minimal models' . Memoire S.M.F. 9-10 ,(1983).

[11] S.HALPERIN ' Finitness in the minimal models of Sullivan' T.A.M.S. 230 (1977) , 173-199.

[12] S.HALPERIN 'Rational fibrations, minimal models and fibring of homogeneous spaces ' . TAMS. 244 (1978) 199-223.

[13] S.HALPERIN 'Rational homotopy and torus actions' Aspects of topology, Mem. of Dowker, H. London Math Soc. Lect. Notes Series 93 (1985) 293-305.

[14] W.Y.HSIANG 'Cohomology theory of topological transformation groups' Berlin-Heidelberg-New york, Springer 1975

[15] J.NEISENDORFER, T.J.MILLER 'Formal and coformal spaces' Illinois J. Math 22 n 4 (1978) 565-580.

[16] V.PUPPE 'On the torus rank of topological spaces' Procedings Baker 87.

[17] D.S.SULLIVAN' Infinitesimal computation in topology' . Publ. Math. I.H.E.S. 47 (1978) 269-331. (1983).

Université Hassan II
Faculté des sciences Ain Chock
Département de Mathématiques et Informatique
B.P. 5366 Maarif Casablanca
MAROC
Email : rhilali@hotmail.com