Pfaffiens et Déterminant de E.H. Moore

Jean-Pierre Tignol*

à Paul Van Praag, à l'occasion de son soixantième anniversaire

Abstract

The determinant of hermitian quaternionic matrices defined by Moore can be seen as a particular case of the generalized pfaffian defined by Knus-Parimala-Sridharan or of the generic norm of Jordan algebras defined by Jacobson.

Soit D un corps de quaternions sur un corps F de caractéristique différente de 2. Pour toute matrice $x = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(D)$ on pose $x^* = (\overline{x_{ij}})^t_{1\leq i,j\leq n}$, où $\bar{\ }$ désigne la conjugaison de D. Si $x = x^*$, un déterminant $m(x) \in F$ a été défini par E.H. Moore de la manière suivante :

$$m(x) = \sum_{\pi\in P} \prod_{E\in\pi} s_E$$

où P est l'ensemble des partitions de $\{1,\ldots,n\}$ et, pour toute partie $E = \{i_1,\ldots,i_r\}$ de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal r,

$$s_E = (-1)^{r-1} \sum_{\tau\in\mathrm{Sym}(i_2,\ldots,i_r)} x_{i_1\tau(i_2)}x_{\tau(i_2)\tau(i_3)}\ldots x_{\tau(i_r)i_1}.$$

(Voir Van Praag [6], [7], [8], et les références qui y sont citées.) Pour notre objet, les propriétés essentielles de ce déterminant sont les suivantes :

1. $m(x)$ est une expression polynomiale des entrées de la matrice x ;

*Subventionné par le F.N.R.S. et par l'Union Européenne (contrat ERB FMRX CT-97-0107).
Received by the editors February 1998.
Communicated by M. Van den Bergh.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 16K20, 12E15, 11E57.
Key words and phrases : déterminant, algèbres simples centrales, algèbres à involution.

2. $m(x)$ est un représentant du déterminant de Dieudonné $\text{dét}(x)$ (qui est un élément de l'abélianisé $D^\times/[D^\times, D^\times]$ du groupe multiplicatif de D) ;
3. $m(I_n) = 1$, où I_n est la matrice unité de $M_n(D)$.

Ces propriétés sont démontrées par Van Praag dans [8, Appendice]. Comme la norme réduite Nrd_D prend la valeur 1 sur le groupe des commutateurs $[D^\times, D^\times]$, la norme réduite de $\text{dét}(x)$ est bien définie. D'après Draxl [2, p. 146], on a $\text{Nrd}_D\big(\text{dét}(x)\big) = \text{Nrd}_A(x)$, donc la deuxième propriété ci-dessus entraîne

$$\text{Nrd}_A(x) = \text{Nrd}_D\big(m(x)\big) = m(x)^2. \tag{1}$$

Par ailleurs, Knus-Parimala-Sridharan [5] ont défini pour toute algèbre simple centrale à involution une notion de pfaffien qui, dans le cas symplectique, coïncide avec la norme réduite de l'algèbre de Jordan des éléments symétriques (voir Jacobson [3, §5.3]). Rappelons la construction, qui se trouve aussi dans [4, §2.A] : Soit A une algèbre simple centrale sur un corps F arbitraire, et soit F_{sep} une clôture séparable de F. Soit encore σ une involution symplectique sur A, c'est-à-dire un anti-automorphisme F-linéaire de A qui, par une identification quelconque de $A \otimes F_{sep}$ avec $M_d(F_{sep})$, prend la forme

$$\sigma(x) = ux^t u^{-1} \tag{2}$$

pour une certaine matrice inversible u alternée ($u = a - a^t$ pour un certain $a \in M_d(F_{sep})$). (Le degré d de A est nécessairement pair, sinon aucune matrice alternée n'est inversible.) On note

$$\text{Symd}(A, \sigma) = \{x + \sigma(x) \mid x \in A\},$$

de sorte que $\text{Symd}(A,\sigma)$ est l'ensemble des éléments symétriques de A si la caractéristique de F est différente de 2. Notons $\mathcal{P} = S\big(\text{Symd}(A,\sigma)^*\big)$ l'algèbre symétrique du dual de $\text{Symd}(A,\sigma)$, c'est-à-dire l'algèbre des polynômes sur $\text{Symd}(A,\sigma)$. La restriction à $\text{Symd}(A,\sigma)$ de la norme réduite Nrd_A est un élément de $\mathcal{P}$ que l'on note simplement N.

Proposition. *Il existe un et un seul polynôme* $\text{Nrp}_\sigma \in \mathcal{P}$ *tel que*

$$\text{Nrp}_\sigma^2 = N \qquad \textit{et} \qquad \text{Nrp}_\sigma(1) = 1.$$

Démonstration. Il suffit de prouver la proposition après extension des scalaires à F_{sep}. En effet, supposons que N admette une racine carrée $P \in \mathcal{P} \otimes F_{sep}$. Alors P et $-P$ sont les seules racines carrées de N dans $\mathcal{P} \otimes F_{sep}$, puisque $\mathcal{P} \otimes F_{sep}$ est un anneau intègre. Comme $N(1) = 1$, on peut supposer $P(1) = 1$, quitte à remplacer P par $-P$. Le polynôme P est alors déterminé de manière unique. Il est donc invariant sous l'action du groupe de Galois de F_{sep} sur F, c'est-à-dire que $P \in \mathcal{P}$.

On peut donc supposer $F = F_{sep}$, identifier $A = M_d(F)$ et mettre σ sous la forme (2). Tout élément $s \in \text{Symd}(A,\sigma)$ s'écrit

$$s = x + ux^t u^{-1} = \big(xu - (xu)^t\big)u^{-1}.$$

Alors

$$\text{Nrd}_A(s) = \text{dét}(s) = \Big[\text{pf}\big(xu - (xu)^t\big)\,\text{pf}(u^{-1})\Big]^2,$$

où pf est le pfaffien des matrices alternées (voir par exemple Artin [1, Theorem 3.27]). Comme le pfaffien est un polynôme, la proposition est démontrée. ∎

Le polynôme Nrp_σ est appelé “norme réduite pfaffienne” dans [4, §2.A].

Théorème. *Soit D un corps de quaternions sur un corps F de caractéristique différente de 2. Pour toute matrice $s \in M_n(D)$ telle que $s^* = s$, le déterminant de Moore $m(s)$ et la norme réduite pfaffienne* Nrp_* *coïncident :*

$$m(s) = \mathrm{Nrp}_*(s).$$

Démonstration. Vu (1) et la définition de Nrp_*, on a pour tout $s \in \mathrm{Symd}\Big(M_n(D), {}^*\Big)$

$$\mathrm{Nrp}_*(s)^2 = \mathrm{Nrd}_A(s) = m(s)^2.$$

Comme Nrp_* et m sont deux polynômes sur $\mathrm{Symd}\Big(M_n(D), {}^*\Big)$, et que l'anneau des polynômes est intègre, on en déduit $\mathrm{Nrp}_* = \pm m$. Or, $\mathrm{Nrp}_*(1) = 1 = m(1)$, donc $\mathrm{Nrp}_* = m$. ■

La norme réduite pfaffienne donne par conséquent une extension du déterminant de Moore aux algèbres simples centrales dont l'indice de Schur est supérieur à 2, sur un corps de caractéristique arbitraire.

Références

[1] E. Artin. *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, Inc., New York-London, 1957.

[2] P.K. Draxl. *Skew Fields*, London Math. Soc. Lecture Note Series 81, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.

[3] N. Jacobson. *Finite-dimensional Division Algebras over Fields*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1996.

[4] M.-A. Knus, A.S. Merkurjev, M. Rost et J.-P. Tignol. *The Book of Involutions*, Colloq. Pub. 44, American Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[5] M.-A. Knus, R. Parimala et R. Sridharan. On the discriminant of an involution, *Bull. Soc. Math. Belgique, Sér. A* **43** (1991), 89–98.

[6] P. Van Praag. Les formes hermitiennes quaternioniennes et le déterminant d'Eliakim Hastings Moore, *Bull. Soc. Math. Belgique, Sér. A* **42** (1990), 767–775.

[7] P. Van Praag. Sur les déterminants de Dieudonné et de Moore, *Bull. Soc. Math. Belgique, Sér. A* **43** (1991), 159–161.

[8] P. Van Praag. Sur la norme réduite du déterminant de Dieudonné des matrices quaternioniennes, *J. Algebra* **136** (1991), 265–274.

Université catholique de Louvain
B-1348 Louvain-la-Neuve