Généralisation à $\mathbb{C}^n$ d'un théorème de M. Jarnicki sur les cellules d'harmonicité

M. Boutaleb

Abstract

In this paper, it is proved that if $f : D \to D'$ is a holomorphic homeomorphism between two domains D and D' in $\mathbb{C}^n (n \geq 2)$ which commutes with the Lelong transformation T, then f extends to a holomorphic homeomorphism $\widetilde{f}$ between the corresponding cells of harmonicity $\mathcal{H}(D)$ and $\mathcal{H}(D')$. In such way a generalization is given of Jarnicki 's result obtained in the case $n = 1$.

1 Introduction et résultats

La théorie du prolongement holomorphe dans $\mathbb{C}^n$ des fonctions réelles harmoniques, polyharmoniques, et harmoniques d'ordre infini a été introduite par N. Aronzajn [Ar] et M. Nicolesco [N] , généralisée aux solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants par C.O.Kiselman [K], et développée dans de nombreux travaux. Citons en particulier ceux de P. Lelong [L_1] [L_2], V. Avanissian [A_1] [A_2], M. Jarnicki [J], J. Siciak [S]...

On s'intéresse ici au problème (résolu dans [J] dans le cas d'une seule variable complexe) de savoir sous quelles conditions deux domaines D et D' de $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ $(n \geq 2)$ analytiquement homéomorphes déterminent deux cellules d'harmonicité $\mathcal{H}(D)$ et $\mathcal{H}(D')$ qui soient également analytiquement homéomorphes dans $\mathbb{C}^{2n}$. Le

Received by the editors November 2002.
Communicated by R. Delanghe.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 32A30, 31A30, 31B30.
Key words and phrases : Cellule d'harmonicité. Transformation de Lelong. Chemin de Lelong. Extension holomorphe de Jarnicki.

but de ce travail est d'établir un théorème généralisant le résultat de M. Jarnicki au cas de plusieurs variables complexes.

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^n$, non vide, $\partial D \neq \emptyset$. La cellule d'harmonicité $\mathcal{H}(D)$ de D est la composante connexe de l'ouvert $\mathbb{C}^n - \cup_{t\in\partial D}\Gamma(t)$ où $\Gamma(t)$ est le cône isotrope dans $\mathbb{C}^n$ de sommet t : $\Gamma(t) = \{z \in \mathbb{C}^n; (z_1 - t_1)^2 + ... + (z_n - t_n)^2 = 0\}$. La trace de $\mathcal{H}(D)$ avec $\mathbb{R}^n$ est $\mathcal{H}(D) \cap \mathbb{R}^n = D$. Dans $[L_1][L_2]$ P. Lelong prouve que $\mathcal{H}(D)$ coincide avec l'ensemble des points w de $\mathbb{C}^n$ qui peuvent être joints à un point de D par un chemin continu $\gamma_D : [0,1] \to \mathbb{C}^n$ tel que pour tout $0 \leq \tau \leq 1$: $T(z)$ est inclus dans D , où $z = \gamma(\tau) = x + iy$ et $T(z)$ est la $(n-2)-$sphère de $\mathbb{R}^n$, de centre x, de rayon $\| y \|$, (la norme euclidienne), et située dans l'hyperplan affine passant par x et orthogonal à y.

Rappelons d'abord le résultat de M. Jarnicki [J] :

Théorème [J] .*Si* $f : D_1 \to D_2$*est un homéomorphisme analytique complexe, où* $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2, D_1, D_2 \neq R^2$ *et* $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, *alors* $\mathcal{H}(D_1)$ *et* $\mathcal{H}(D_2)$ *sont analytiquement homéomorphes dans* $\mathbb{C}^2$*. L'application holomorphe* $Jf : \mathcal{H}(D_1) \to \mathcal{H}(D_{\mathbf{2}})$ *définie par* $w \mapsto w'$ *avec :*

$$w'_1 = \frac{f(w_1 + iw_2) + \overline{f(\overline{w_1} + i\overline{w_2})}}{2} \quad , \quad w'_2 = \frac{f(w_1 + iw_2) - \overline{f(\overline{w_1} + i\overline{w_2})}}{2i}$$

réalise cet homéomorphisme.

Le résultat principal de ce travail est :

Théorème 1 . *Soient* D *et* D' *deux domaines non vides de* $\mathbb{C}^n$*, identifié à* $\mathbb{R}^{2n}$*,* $n \geq 2$*, de frontières non vides,* $(\partial D \neq \emptyset, \partial D' \neq \emptyset)$*. Supposons qu'il existe* $f : D \to D'$ *un homéomorphisme analytique complexe satisfaisant la commutativité des deux diagrammes suivants :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(D) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "T"'] & D'^{f^{-1}} \arrow[d, "T"] \\ S^{2n-2}(D) \arrow[r, "f"'] & S^{2n-2}(\mathbb{R}^{2n}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D^f \arrow[d, "T"'] & \mathcal{H}(D') \arrow[l, "\widetilde{f^{-1}}"'] \arrow[d, "T"] \\ S^{2n-2}(\mathbb{R}^{2n}) & S^{2n-2}(D') \arrow[l, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Alors les cellules d'harmonicité $\mathcal{H}(D)$*et* $\mathcal{H}(D')$ *sont analytiquement homéomorphes. L'application holomorphe* $\widetilde{f} : \mathcal{H}(D) \to \mathbb{C}^{2n}$ *réalise cet homéomorphisme.*

Notamment, toute translation réelle, homothétie, et isométrie vectorielle du groupe orthogonal $O(2n)$*, envoyant* D *sur* D' *est la restriction d'un automorphisme holomorphe de* $\mathbb{C}^{2n}$*, du même type, et envoyant* $\mathcal{H}(D)$ *sur* $\mathcal{H}(D')$*.*

2 Résultats préliminaires

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n, \Omega \neq \emptyset, \partial\Omega \neq \emptyset$. A tout $z \in \mathcal{H}(\Omega)$, la cellule d'harmonicité de Ω, on associe une sphère unique $T(z) \in S^{n-2}(\Omega) =$ l'ensemble de toutes les sphères euclidiennes (n-2)-dimensionnelles et incluses dans Ω. Inversement, à une (n-2)-sphère incluse dans Ω correspond deux points conjugués de $\mathcal{H}(\Omega)$, de sorte que l'on peut définir une bijection $\widetilde{T} : \mathcal{H}(\Omega) /\!\sim \longrightarrow S^{n-2}(\Omega)$, où $z \sim z'$ signifie $z = z'$ ou $z = \overline{z'}$.

L'espace $\mathbb{R}^n$ étant considéré comme sous-espace fermé de $\mathbb{C}^n$, soit F une transformation continue de $\mathbb{C}^n$ vers $\mathbb{C}^n$ qui laissent invariant $\mathbb{R}^n$. A tout chemin de Lelong $\mathcal{L} = \gamma_{\mathbb{R}^n}$, décrit plus haut, on définit le chemin de Lelong image $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ par F : $\mathcal{L}' = \gamma'_{\mathbb{R}^n} = F\,[\gamma_{\mathbb{R}^n}]$, de manière que pour tout $w \in \mathbb{C}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$ on ait :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}^{F(w)}_{F(a),\mathbb{R}^n} = F[\mathcal{L}^{w}_{a,\mathbb{R}^n}].$$

Dans ce qui suit nous faisons constamment le prolongement holomorphe : $(D, f) \rightarrow (\widetilde{D}, \widetilde{f})$, où D est un ouvert de $\mathbb{R}^n = \{x+iy \in \mathbb{C}^n; y = 0\}$ (pour la topologie induite sur $\mathbb{R}^n$ par celle de $\mathbb{C}^n$), f une fonction analytique (réelle) sur D, $\widetilde{D}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$ dont la trace sur $\mathbb{R}^n$ est D, et $\widetilde{f}$ est la fonction holomorphe sur $\widetilde{D}$ dont la restriction $\widetilde{f} \mid D$ à D coincide avec f. Remarquons que si D est connexe, le domaine $\widetilde{D}$ l'est aussi ; on note $\widetilde{D}$ par D^f.

Concernant les domaines réels nous avons :

Lemme 2.1. *L'espace $\mathbb{R}^{2p}$ étant identifié à $\mathbb{C}^p, p \geq 2$, à tout couple (Ω, f) où Ω est un domaine non vide de $\mathbb{C}^p, \partial\Omega \neq \emptyset$, et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω, on peut associer un couple $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{f})$ où $\widetilde{\Omega}$ est un domaine de $\mathbb{C}^{2p}$ contenant $\mathcal{H}(\Omega)$, la cellule d'harmonicité de Ω, $\widetilde{\Omega} \cap \mathbb{R}^{2p} = \Omega$, et $\widetilde{f}$ une fonction holomorphe sur $\widetilde{\Omega}$ telle que $\widetilde{f}\mid_{\Omega} = f$.*

Démonstration. De l'holomorphie de $f = u + iv$ sur $\Omega \subset \mathbb{C}^p$, on déduit que u et v sont des fonctions réelles pluriharmoniques sur $\Omega \subset \mathbb{R}^{2p}$:

$$u, v \in C^2_{\mathbb{R}}(D) \quad et \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z_m \partial \overline{z_k}} = \frac{\partial^2 v}{\partial z_m \partial \overline{z_k}} = 0 \quad dans \quad \Omega, \quad 1 \leq m, k \leq p.$$

D'où en particulier : $\Delta u = 4\sum_{m=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial z_m \partial \overline{z_m}} = 0$ et $\Delta v = 4\sum_{m=1}^{p} \frac{\partial^2 v}{\partial z_m \partial \overline{z_m}} = 0$ (1)

- De l'analyticité réelle de u et v dans Ω , on déduit l'existence de deux domaines Ω^u , $\Omega^v \subset \mathbb{C}^{2p}$ et deux fonctions holomorphes $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ sur Ω^u et Ω^v (respectivement) telles que $\Omega^u \cap \mathbb{R}^{2p} = \Omega^v \cap \mathbb{R}^{2p} = \Omega$ et $\widetilde{u} \mid \Omega = u$,$\widetilde{v} \mid \Omega = v$. En posant $W = \Omega^u \cap \Omega^v$, on obtient encore un ouvert de $\mathbb{C}^{2p}$ dont la trace sur $\mathbb{R}^{2p}$ est Ω. Notons W_0 la composante connexe de W contenant Ω et montrons qu'en fait W_0 contient également la cellule d'harmonicité $\mathcal{H}(\Omega)$ de Ω. En effet :
- D'après $[L_2]$, la cellule d'harmonicité $\mathcal{H}(\Omega)$ coincide avec l'intérieur du plus grand ensemble de $\mathbb{C}^{2p}$ (au sens de l'inclusion) dans lequel toute fonction appartenant à la classe $\mathbf{Ha}\,(\Omega)$, des fonctions harmoniques réelles sur Ω, s'étend holomorphiquement dans $\mathbb{C}^{2p}$:

$$\mathcal{H}(\Omega) = \left[\cap_{h \in Ha(\Omega)} \Omega^h\right]^0 \qquad (2)$$

En outre, comme $\Omega \subset \mathbb{C}^p \simeq \mathbb{R}^{2p}$ avec $2p \geq 4$, alors par $[A_2]$ (p.133) et les égalités (1) ci-dessus, les fonctions harmoniques réelles u et v se prolongent dans $\mathbb{C}^{2p}$ en $\widetilde{u}$ et $\widetilde{v}$, des fonctions (uniques) définies et holomorphes sur $\mathcal{H}(\Omega)$. Puisque $\mathcal{H}(\Omega)$ est tout comme Ω^u et Ω^v aussi un ouvert connexe dans $\mathbb{C}^{2p}$contenant Ω, alors l'égalité (2) entraîne a fortiori les deux inclusions : $\Omega^u \supset \mathcal{H}(\Omega)$ et $\Omega^v \supset \mathcal{H}(\Omega)$; et par suite $\mathcal{H}(\Omega) \subset W$. Rappelant que $\mathcal{H}(\Omega) \cap \mathbb{R}^{2p} = \Omega$ et que $W_0 \supset \Omega$, on déduit que $\mathcal{H}(\Omega) \subset W_0$. Posant $\widetilde{\Omega} = W_0$ et $\widetilde{f} = \widetilde{u} + i\,\widetilde{v}$, on obtient le résultat. ■

Soit maintenant une transformation analytique réelle $g = (g_1, ..., g_n) : D \to \mathbb{R}^n$, où D est un domaine non vide de $\mathbb{R}^n$. Si D^{g_j} est le domaine (maximal au sens de l'inclusion) de $\mathbb{C}^n, j = 1, ..., n, D^{g_j} \cap \mathbb{R}^n = D$, et $\widetilde{g_j}$ le prolongement holomorphe de g_j au domaine D^{g_j}, alors en procédant de manière analogue au lemme 2.1, il existe un domaine D^g de $\mathbb{C}^n$ contenant D et une transformation analytique complexe $\widetilde{g} : D^g \to \mathbb{C}^n$ dont la restriction à D coincide avec g.

Considérons alors une transformation $f : D \subset \mathbb{R}^n \to D' \subset \mathbb{R}^n$, bijective bianalytique réelle. Les conditions de son prolongement holomorphe aux cellules d'harmonicité de D et D' se déduit du lemme suivant :

Lemme 2.2.

Soient D et D' deux domaines non vides de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, avec $\partial D \neq \emptyset$ et $\partial D' \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe un homéomorphisme analytique réel $f : D \to D'$ satisfaisant :

(i) f^{-1} est analytique sur D',

(ii) $D^f \supset \mathcal{H}(D)$ et $D'^{f^{-1}} \supset \mathcal{H}(D')$,

(iii) Pour tous $w \in \mathcal{H}(D)$ et $w' \in \mathcal{H}(D')$ on a :

$$T\left[\left(\widetilde{f}\right)(w)\right] = f\left[T\left(w\right)\right] \quad et \quad f^{-1}\left[T\left(w'\right)\right] = T[\left(\widetilde{f^{-1}}\right)(w')].$$

Alors $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme holomorphe envoyant $\mathcal{H}(D)$ sur $\mathcal{H}(D')$.

Démonstration. Avec les notations précédentes nous avons :

• D'une part, du fait que l'application $f : D \to D'$ est analytique sur D, il existe un domaine $D^f \subset \mathbb{C}^n$ tel que $D^f \cap \mathbb{R}^n = D$ et une application analytique complexe $\tilde{f} : D^f \to \mathbb{C}^n$ qui prolonge f à $\mathbb{C}^n$. D'autre part, puisque par (i) sa réciproque f^{-1}est supposée également analytique, nous avons une application holomorphe $(f^{-1})^{\sim}$: $(D')^{f^{-1}} \to \mathbb{C}^n$, avec $(D')^{f^{-1}} \subset \mathbb{C}^n, (D')^{f^{-1}} \cap \mathbb{R}^n = D'$, et $(f^{-1})^{\sim} \mid D' = f^{-1}$. Grâce au théorème d'unicité du prolongement holomorphe dans $\mathbb{C}^n$, appliqué à $f^{-1} \circ f = Id_D$ et $f \circ f^{-1} = Id_{D'}$, on prouve que l' homéomorphisme donné $f : D \to D'$ s'étend en un homéomorphisme analytique complexe $\tilde{f} : D^f \to (D')^{f^{-1}}$, avec $(f^{-1})^{\sim} = (f^{\sim})^{-1}$. Par (ii), les applications $\tilde{f}$ et $(f^{-1})^{\sim}$ sont définies sur $\mathcal{H}(D)$ et $\mathcal{H}(D')$ respectivement.

• Montrons qu'en fait on a : $\tilde{f}\left[\mathcal{H}(D)\right] = \mathcal{H}(D')$. En effet, par $[L_1]$ (voir aussi $[A_2]$ p.73), tout point $w \in \mathcal{H}(D)$ peut être joint à un certain point $a \in D$ par un D-chemin de Lelong $\mathcal{L}^w_{a,D}$ complètement inclus dans $\mathcal{H}(D)$, i.e : $\mathcal{L}^w_{a,D} : [0, 1] \to \mathbb{C}^n$ est une application continue telle que $\mathcal{L}^w_{a,D}(0) = w$, $\mathcal{L}^w_{a,D}(1) = a$ et $\cup_{0\leq\tau\leq1}T[\mathcal{L}^w_{a,D}(\tau)] \subset D$. L'application composée : $\tau \mapsto \gamma'(\tau) = \tilde{f}\left[\mathcal{L}^w_{a,D}(\tau)\right]$ est un chemin continu qui joint $\gamma'(0) = \tilde{f}\left[\mathcal{L}^w_{a,D}(0)\right] = \tilde{f}\left(w\right) \in (D')^{f^{-1}}$ au point $\gamma'(1) = \tilde{f}\left[\mathcal{L}^w_{a,D}(1)\right] = f\left[\mathcal{L}^w_{a,D}(1)\right] = \tilde{f}\left(a\right) = \tilde{f}\left(a\right) \in D'$. Pour montrer que γ' est aussi un D'-chemin de Lelong nous écrivons : $T\left[\gamma'\right] = \cup_{0\leq\tau\leq1}T\left[\gamma'\left(\tau\right)\right] = \cup_{0\leq\tau\leq1}T\{\tilde{f}\left[\mathcal{L}^w_{a,D}(\tau)\right]\}$, puis utilisant l'égalité (de gauche) donnée dans (i i i), nous obtenons : $T\{\tilde{f}\left[\mathcal{L}^w_{a,D}(\tau)\right]\} = f\{T\left[\mathcal{L}^w_{a,D}(\tau)\right]\}$ pour tout $0 \leq \tau \leq 1$. Ainsi, $T\left[\gamma'\right] = f\{\cup_{0\leq\tau\leq1}T[\mathcal{L}^w_{a,D}(\tau)]\} \subset f(D) = D'$, et par conséquent $\tilde{f}\left(w\right)$ peut être joint à un point de D' par le D'-chemin de Lelong $\gamma' = \mathcal{L}^{\tilde{f}(w)}_{f(a),D'}$. D'où : $\tilde{f}\left(w\right) \in \mathcal{H}(D')$; et par suite : $\tilde{f}\left[\mathcal{H}(D)\right] \subset \mathcal{H}(D')$.

• Un raisonnement similaire appliqué à f^{-1} permet d'obtenir l'inclusion inverse grâce à la commutativité de T avec $(f^{-1})^{\sim}$ donnée par l'égalité de droite dans (iii) ∎

3 Démonstration du théorème 1

• Si D et D' sont regardés en tant que domaines de $\mathbb{R}^{2n}$ alors f est un homéomorphisme analytique réel de D sur D' . En outre, l'application réciproque f^{-1} étant holomorphe sur $D' \subset \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, f^{-1} est aussi analytique réel sur D'; ainsi f satisfait (i) du lemme 2.2 . Pour prouver (ii), nous écrivons $f = (f_1, ..., f_n)$, $z = (z_1, ..., z_n) \in D$, $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$, $f_j = u_j + iv_j$, où $j = 1, ..., n$. Comme f est holomorphe sur D, pour tout $j = 1, ..., n$, les composantes u_j et v_j sont des fonctions pluriharmoniques sur D. Par application du lemme 1, aux n composantes holomorphes $f_1, ..., f_n$ de f, sont associés 2n domaines D^{u_j}, D^{v_j} dans $\mathbb{C}^{2n}$ et 2n fonctions $\widetilde{u_1}, ..., \widetilde{u_n}, \widetilde{v_1}, ..., \widetilde{v_n}$ qui sont respectivement holomorphes sur $D^{u_1}, ..., D^{u_n}$, $D^{v_1}, ..., D^{v_n}$ tels que $D^{u_j} \cap \mathbb{R}^{2n} = D^{v_j} \cap \mathbb{R}^{2n} = D$ et $\widetilde{u_j} \mid D = u_j$, $\widetilde{v_j} \mid D = v_j$. Posant $W_j = D^{u_j} \cap D^{v_j}$ et $W = \bigcap_{j=1}^{n} W_j$, on obtient : $W \cap \mathbb{R}^{2n} = D$. Raisonnant comme dans le lemme 1, nous avons, grâce à l'harmonicité réelle des u_j et v_j sur D, les inclusions $D^{u_j} \supset \mathcal{H}(D)$ et $D^{v_j} \supset \mathcal{H}(D)$; par suite : pour tout $j = 1, ..., n$, on a $\mathcal{H}(D) \subset W_j$ et $\mathcal{H}(D) \subset W$. De même, comme l'ouvert W peut ne pas être connexe, nous prenons la composante connexe W_0 contenant $\mathcal{H}(D)$. Par conséquent, de l'application holomorphe donnée $f : D \to D'$, nous avons construit une autre application holomorphe $\widetilde{f} : W_0 \to \mathbb{C}^{2n}$ avec $W_0 \cap \mathbb{R}^{2n} = D$, $\widetilde{f} \mid D = f$, $W_0 \supset \mathcal{H}(D)$ et $\widetilde{f} = (\widetilde{u_1}, \widetilde{v_1}, ..., \widetilde{u_n}, \widetilde{v_n})$.

• La même construction appliquée à $h = f^{-1} : D' \to D$ donne un domaine W_0' dans $\mathbb{C}^{2n}$, avec $W_0' \supset \mathcal{H}(D')$, $W_0' \cap \mathbb{R}^{2n} = D'$ et une application holomorphe $\widetilde{h} : W_0' \to \mathbb{C}^{2n}$ qui prolonge h dans $\mathbb{C}^{2n}$. Grâce au théorème général d'unicité du prolongement holomorphe dans $\mathbb{C}^p$ $(p \geq 1)$ des fonctions analytiques réelles sur un domaine de $\mathbb{R}^p$ on a : $\widetilde{h} = \left(\widetilde{f}\right)^{-1}$. Finalement, posant $D^f = W_0$, $(D')^{f^{-1}} = W_0'$, nous déduisons que f satisfait aussi (ii) du lemme 2.2. Enfin, la condition de commutativité des deux diagrammes mentionnés ci-dessus équivaut à (iii).

• Concernant les transformations usuelles sus-indiquées, le tout est de montrer qu'elles constituent des exemples d'applications $f : D \to D'$ satisfaisant les conditions du théorème. En effet, si $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ est une translation τ_α $(\alpha \in \mathbb{R}^{2n})$, une homothétie h_t $(t \in \mathbb{R}^*)$, une rotation $\rho \in SO(2n)$, ou une symétrie orthogonale du type $\sigma_{2n} : x \mapsto (x_1, ..., x_{2n-1}, -x_{2n})$, alors f satisfait (i) et (i i) du lemme 2.2. Par ailleurs, toutes ces applications s' étendent en des automorphismes holomorphes de $\mathbb{C}^{2n}$ en posant pour tout $w = (w_1, ..., w_{2n}) = x + iy$: $\widetilde{\tau_\alpha}(w) = w + \alpha$, $\widetilde{h_t}(w) = tw$, $\widetilde{\rho}(w) = \rho x + i\rho y$ et $\widetilde{\sigma_{2n}}(w) = (w_1, ..., w_{2n-1}, -w_{2n})$. Il reste à vérifier que (iii) est aussi satisfaite ; pour cela, il suffit de remarquer que si $w \in \mathcal{H}(D)$ on a :

a) $\xi \in T\left[\widetilde{\tau_\alpha}(w)\right] \Longleftrightarrow [< \xi - (x+\alpha), y >= 0$ et $\| \xi - \alpha - x \| = \| y \|] \Longleftrightarrow \xi - \alpha \in T(w)$ i.e. $\xi \in \tau_\alpha\left[T(w)\right]$;

b) $\xi \in T\left[\widetilde{h_t}(w)\right] \Longleftrightarrow [< \xi - tx, ty >= 0$ et $\| \xi - tx \| = \| ty \|]$

$\Longleftrightarrow [< \frac{1}{t}\xi - x, y >= 0$ et $\| \frac{1}{t}\xi - x \| = \| y \|] \Longleftrightarrow \frac{1}{t}\xi \in T(w)$; ainsi $T\left[\widetilde{h_t}(w)\right] = h_t\left[T(w)\right]$;

c) Pour toute isométrie vectorielle f de $\mathbb{R}^{2n}$, nous avons les équivalences :

$T\left[\widetilde{f}(w)\right] = T\left[f(x) + if(y)\right] \Longleftrightarrow < \xi - f(x), f(y) >= 0, \| \xi - f(x) \| = \| f(y) \|$

$\Longleftrightarrow [< f^{-1}(\xi) - x \ , \ y >= 0$ et $\| f^{-1}(\xi) - x \| = \| y \|] \Longleftrightarrow f^{-1}(\xi) \in T(x + iy)$ ou $\xi \in f[T(w)]$. Par suite, puisque toutes ces transformations usuelles commutent avec l'application de Lelong T , les deux cellules $\mathcal{H}(D)$ et $\mathcal{H}(D')$ sont analytiquement homéomorphes dans $\mathbb{C}^{2n}$; plus précisément : $\widetilde{\tau_\alpha}\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}(\tau_\alpha D)$,

$\widetilde{h_t}\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}(h_t D)$, $\widetilde{\rho}\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}(\rho D)$ et $\widetilde{\sigma_n}\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}(\sigma_n D)$. ■

Remarques :

1 Si $D' = \sigma_n(D)$, où $\sigma_n : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$ de $\mathbb{R}^n$ alors la cellule d'harmonicité $\mathcal{H}(D')$ de D' est aussi le domaine symétrique de $\mathcal{H}(D)$ par rapport à l'hyperplan complexe $w_n = 0$ de $\mathbb{C}^n(w_1, ..., w_n)$ où $w_j = x_j + iy_j$, $j = 1, ..., n$. De plus, si $n = 2$, nous observons par un calcul direct que l'extension de Jarnicki J (définie en section 1) preserve les rotations, translations, et les homothéties euclidiennes de $\mathbb{R}^2$: $J\rho = \widetilde{\rho}$, $J\tau_\alpha = \widetilde{\tau_\alpha}$, $Jh_t = \widetilde{h_t}$, où $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{\tau_\alpha}$, $\widetilde{h_t}$ sont définies plus haut. Toutefois, concernant σ_2 , un calcul formel de $J\sigma_2$ donnerait :
$J\sigma_2 : (w_1, w_2) \mapsto \left(\frac{\sigma_2(w_1+iw_2)+\overline{\sigma_2(\overline{w_1}+i\overline{w_2})}}{2}, \frac{\sigma_2(w_1+iw_2)-\overline{\sigma_2(\overline{w_1}+i\overline{w_2})}}{2i}\right) = (\overline{w_1}, -\overline{w_2})$.
Ainsi $J\sigma_2 \neq \widetilde{\sigma_2}$; et par conséquent, le théorème de Jarnicki [J] ne s'applique pas en général aux homéomorphismes non holomorphes.

2 L'application C^∞ $\sigma_2 : z \mapsto \overline{z}$ s'étend holomorphiquement aux cellules d'harmonicité en : $\widetilde{\sigma_2}(w_1, w_2) = (w_1, -w_2)$. L'exemple suivant [B] montre que ce n'est pas toujours le cas. L'application $f : x \mapsto s = \frac{2x}{1+x_1^2+...+x_n^2}$ est un C^∞difféomorphisme de la boule unité euclidienne B_n^r de $\mathbb{R}^n$. L'extension formelle F de f - i.e. celle obtenue par substitution directe des variables complexes $z_1, ..., z_n$ aux variables réelles $x_1, ..., x_n$ - est un C^∞ difféomorphisme réel envoyant la boule de Lie :

$$BL = \{z \in \mathbb{C}^n; L(z) = [| z |^2 + \sqrt{| z |^4 - | z_1^2 + ... + z_n^2 |^2}]^{\frac{1}{2}} < 1\} = \mathcal{H}(B_n^r)$$

sur le domaine suivant U de $\mathbb{C}^n$:

$$U = \{\zeta = s + it; \| \zeta \|^2 < 2, \left(1 - \| s \|^2\right)\left(1 - \| t \|^2\right) - < s, t >^2 > 0\}$$

avec $U \cap \mathbb{R}^n = B_n^r$ et :

$$F(w) = \frac{2}{\left(1 - | \sum_{j=1}^n w_j^2 |^2\right)} \left[\overline{w} - \sum_{j=1}^n (\overline{w_j})^2 w\right].$$

Notons que le prolongement F n'est pas holomorphe sur $\mathcal{H}(B_n^r)$ et que : $\mathcal{H}(B_n^r) \neq U$.

Applications : Détermination de cellules d'harmonicité

Bien que les cellules d'harmonicité soient intimement liées à la complexification des fonctions harmoniques $[L_1]$ $[L_2]$ $[S]$, p-polyharmoniques (i.e. $\Delta^p h = 0$, $p = 2, 3, ...$) $[A_1]$ $[Ar\ T\ L]$, ou même harmoniques d'ordre infini $[L_3]$ $[A_1]$ i.e :

$$f \in C^\infty_{\mathbb{R}}(D) \text{ et } \limsup_{m\to\infty} \left[\frac{\sup_{x\in K} | \Delta^m f(x) |}{(2m)!}\right]^{\frac{1}{m}} = 0, \text{ pour tout compact } K \subset D,$$

(fonctions initialement étudiées pour des calculs d'élasticité des plaques, cf [N]), leur utilisation demeure encore relativement limitée vu que ces cellules présentent l'inconvénient de se prêter difficilement au calcul explicite, même dans le cas du plan complexe. En effet, la construction de la cellule d'harmonicité d'un domaine convexe U de $\mathbb{R}^n$ passe par la détermination de trois maximas liés ([A$_2$] [C Ja]) :

$$\mathcal{H}(U) = \{w = x + iy \in \mathbb{C}^n; \max_{t \in T(iy)} \left[\max_{\xi \in S^{n-1}} \left(< x + t, \xi > - \sup_{u \in U} < \xi, u > \right) \right] < 0\}.$$

Le théorème de Jarnicki $[J]$, combiné avec sa généralisation donnée par le théorème 1 (et par le lemme 2.2) peuvent être utiles dans ce sens :

Exemple 1 : cellule d'harmonicité d'une pyramide (Fig 1)

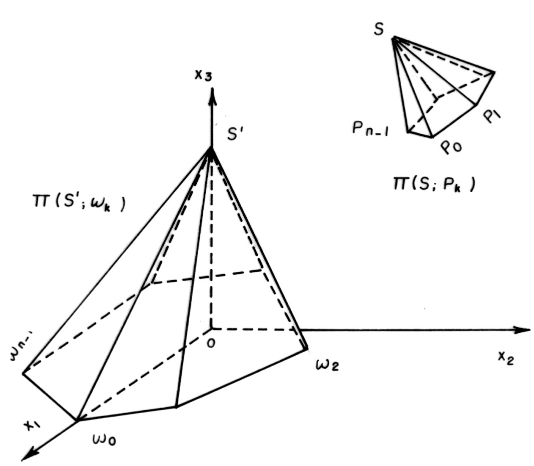

Fig I

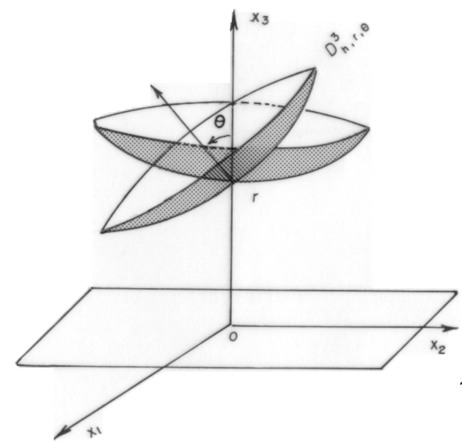

Fig. 2

Soit $\Pi = \Pi(S; P_k)$ la pyramide régulière de $\mathbb{R}^3$, de hauteur h, de base un domaine plan polygonal à n sommets $P_0, ..., P_{n-1}$. Grâce à une transformation adéquate du type $f : x \mapsto tAx + \alpha$, où $A \in \mathbf{O(3)}$, $\alpha \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}^*$, il suffit de déterminer la cellule $\mathcal{H}[\Pi'(S'; \omega_k)]$, avec $S' = (0, 0, h)$, et $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k = 0, 1, ..., n-1$; ici on fait l'identification : $\mathbb{R}^2(x_1, x_2) \simeq \mathbb{C}$.
Le plan affine passant par les sommets S', ω_k, ω_{k+1} est défini par :

$$\begin{vmatrix} x_1 & \cos\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2(k+1)\pi}{n} \\ x_2 & \sin\frac{2k\pi}{n} & \sin\frac{2(k+1)\pi}{n} \\ x_3 - h & -h & -h \end{vmatrix} = 0.$$

Comme $n > 2$, on a $\cos\frac{\pi}{n} > 0$; la pyramide Π' est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \Pi' &= \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0, hx_1 \cos\frac{2(k+1)\pi}{n} + hx_2 \sin\frac{2(k+1)\pi}{n} + x_3 \cos\frac{\pi}{n} < h\cos\frac{\pi}{n}, \\ k &= 0, 1, ..., n-1\}. \end{aligned}$$

Par $[A_1]$ ou $[C\ Ja]$, le domaine Π' étant convexe, on a :
$z \in \mathcal{H}(\Pi') \iff x + T(iy) \subset \Pi' \iff [x + \xi \in \Pi', \forall \xi \in T(iy)] \iff \forall \xi \in T(iy)$:

$$\begin{cases} x_3 + \xi_3 > 0 \\ h(x_1 + \xi_1)\cos\frac{2(k+1)\pi}{n} + h(x_2 + \xi_2)\sin\frac{2(k+1)\pi}{n} + (x_3 + \xi_3)\cos\frac{\pi}{n} < h\cos\frac{\pi}{n} \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow [\min_{\xi\in T(iy)}\xi_3 > -x_3$ et $\max_{\xi\in T(iy)} < \xi, V_k > < h\cos\frac{\pi}{n}]$,
où $V_k = (\ h\cos\frac{2(k+1)\pi}{n},\ h\sin\frac{2(k+1)\pi}{n}, \cos\frac{\pi}{n}\ )$. Par utilisation des multiplicateurs de Lagrange $[A_2]$, on détermine les extrema de : $\xi \mapsto \xi_3$ et $\xi \mapsto < \xi, V_k >$, où ξ est assujetti aux deux contraintes : $< \xi, y >= 0$, $\| \xi \| - \| y \|= 0$. Nous déduisons ainsi que la cellule d'harmonicité de la pyramide Π' s'exprime par :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\Pi') &= \{z = x+iy \in \mathbb{C}^3; x_3 > \sqrt{y_1^2+y_2^2},\\ &\quad hx_1\cos\tfrac{2(k+1)\pi}{n} + hx_2\sin\tfrac{2(k+1)\pi}{n} + x_3\cos\tfrac{\pi}{n}\end{aligned}$$

$$+\sqrt{(h^2+\cos^2\tfrac{\pi}{n}) \| y \|^2 - [hy_1\cos\tfrac{2(k+1)\pi}{n} + hy_2\sin\tfrac{2(k+1)\pi}{n} + y_3\cos\tfrac{\pi}{n}]^2} < h\cos\tfrac{\pi}{n},$$
$$k = 0,...,n-1\ \}.$$

Finalement, l'égalité $f(\Pi') = \Pi$ entraîne $\mathcal{H}(\Pi) = \widetilde{f}[\mathcal{H}(\Pi')]$ où $\widetilde{f}$ est l'automorphisme holomorphe de $\mathbb{C}^3$ défini par $\widetilde{f}(z) = tAz + \alpha$.

Exemple 2 Cellule d'harmonicité d'une portion de boule (Fig 2)

Remarquons que si D et D' sont deux domaines non vides de $\mathbb{R}^n(\partial D \neq \emptyset, \partial D' \neq \emptyset)$ tels que $D \cap D'$ est connexe alors $\mathcal{H}(D \cap D') = \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{H}(D')$.

Soit $D_h^n = \{x \in \mathbb{R}^n; -1 < x_n < -h\ ,\ \| x \| < 1\}$, $0 < h < 1$, une portion de la boule unité euclidienne $B_n^r = \{x \in \mathbb{R}^n; \| x \| < 1\}$. Par un calcul variationnel usuel on obtient directement $\mathcal{H}(D_h^n)$; puis translatant D_h^n de vecteur $\alpha = (0, ..., 0, 1+h) \in \mathbb{R}^n$, nous trouvons $\mathcal{H}(\tau_\alpha D_h^n)$. Prenant en particulier $n = 3$ et appliquant une rotation ρ_θ à $\tau_\alpha D_h^3$ nous obtenons la cellule d'harmonicité de $D_{h,r,\theta}^3 = \rho_\theta\tau_\alpha D_h^3$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(D_{h,r,\theta}^3) &= \{z = x+iy \in \mathbb{C}^3; x_2\sin\theta - (x_3-r)\cos\theta < -\sqrt{y_1^2 + (y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)^2}\\ &\leq \sqrt{y_1^2 + (y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)^2} < 1 - h + x_2\sin\theta - (x_3-r)\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\| x-c \|^2 + \| y \|^2 + 2\sqrt{\| x-c \|^2 \| y \|^2 - < x-c, y >^2} < 1\};$$
où $c = (0, -\sin\theta, r+\cos\theta)$.
Enfin, on trouve : $\mathcal{H}(D_h^3) = \widetilde{\rho_{-\theta}}\ \widetilde{\tau_{-\alpha}}\ \mathcal{H}(D_{h,r,\theta}^3)$.

Références

[Ar] N. Aronzajn : Sur les décompositions des fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications, Acta. math. 65 (1935) 1-156.

[ArTL] N. Aronzajn, M. C. Thomas, J. L.Leonard : Polyharmonic functions, Clarendon. Press. Oxford (1983).

[A$_1$] V. Avanissian : Sur les fonctions harmoniques d'ordre quelconque et leur prolongement analytique dans $\mathbb{C}^n$. Séminaire P.Lelong - H.Skoda, Lecture Notes in Math, $n^0$919, Springer-Verlag, Berlin (1981) 192-281.

[A$_2$] V. Avanissian : Cellule d'harmonicité et prolongement analytique complexe, Travaux en cours, Hermann, Paris 1985.

[B] M.Boutaleb : Sur la cellule d'harmonicité de la boule unité de $\mathbb{R}^n$- Doctorat de $3^{\text{ème}}$ cycle, U.L.P. Strasbourg-France-1983.

[CJa] R.Coquereaux, A.Jadczyk : Conformal Theories, Curved phase spaces, Relativistic wavelets and the Geometry of complex domains, Centre de physique théorique, Section 2, Case 907. Luminy, 13288. Marseille. France. 1990.

[J] M. Jarnicki : Analytic Continuation of harmonic functions, Zesz. Nauk. U J, Pr. Mat 17, (1975) 93-104.

[K] C. O. Kiselman, Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants, Bull. Soc. Math. France 97 (4) (1969) 328-356.

[L_1] P. Lelong : Sur les singularités complexes d'une fonction harmonique, C. R. Acad. Sci. Paris 232 (1951) 1895-1897.

[L_2] P. Lelong : Prolongement analytique et singularités complexes des fonctions harmoniques, Bull. Soc. Math. Belg.7 (1954-55) 10-23.

[L_3] P. Lelong : Sur la définition des fonctions harmoniques d'ordre infini, C. R. Acad. Sci. Paris 223 (1946) 372-374.

[N] M. Nicolesco : Les fonctions polyharmoniques, Hermann Paris(1936).

[S] J. Siciak : Holomorphic continuation of harmonic functions. Ann. Pol. Math. XXIX (1974) 67-73.1.

Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences Dhar-Mahraz
B.P 1796 Atlas Fès, Maroc
e-mail : mboutalebmoh@yahoo.fr