Calcul fonctionnel harmonique dans les algèbres de Banach alternatives involutives et applications

A. Medbouhi A. Tajmouati

Abstract

The purpose of this paper is to extend the harmonic functional calculus and their applications to involutory alternative Banach algebras.

Résumé

L'objectif de ce travail est de généraliser le calcul fonctionnel harmonique et ses applications aux algèbres de Banach alternatives involutives.

Introduction

Dans [1] les auteurs ont construit un calcul fonctionnel harmonique dans une algèbre de Banach involutive, c'est à dire qu'ils ont donné un sens à l'élément $f(a)$ lorsque f est une fonction harmonique sur un ouvert de $\mathbb{C}$, et a est un élément de l'algèbre considérée vérifiant certaines conditions.
Dans [4], A.Elkinani a montré l'utilité de ce calcul en généralisant l'inégalité de Von Neumann à une algèbre de Banach hermitienne.
Dans le cadre de généraliser ce calcul et ses applications à une algèbre de Banach alternative involutive, nous organisons le présent travail en quatre parties.

Received by the editors January 2002.
Communicated by F. Bastin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 46H30, 46H70.
Key words and phrases : Alternative Banach Algebra, Harmonic Functional Calculus.

Dans la première partie, nous rassemblons quelques définitions et résultats sur les algèbres alternatives et nous établissons quelques lemmes utiles à cette étude. En général nous nous référons à [8] et [14].
Dans la deuxième partie, nous donnons le théorème fondamental du calcul fonctionnel harmonique, et contrairement à [1], nous montrons l'unicité de ce calcul sans faire appel à la continuité, puis nous montrons le "spectral mapping theorem" .
Dans la troisième partie nous définissons la fonction de Ptàk dans une algèbre de Banach alternative hermitienne, et nous montrons que c'est une semi-norme d'algèbre. Enfin, nous généralisons l'inégalité de Von Neumann aux algèbres de Banach alternatives hermitiennes.

1 Préliminaire sur les algèbres de Banach alternatives involutives.

Dans toute la suite, $\mathbb{C}$ désignera le corps des nombres complexes.
On appelle algèbre A sur $\mathbb{C}$, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une application bilinéaire de $A \times A$ dans A qui à (a, b) associe ab, cette application est appelée produit.
Les définitions d'algèbre unitaire, sous-algèbre, sous-algèbre engendrée par une partie de A, idéal, morphisme, algèbre pleine et involution sont les mêmes que dans le cas associatif.
Soient x, y et z trois éléments de A, on définit l'associateur (resp le commutateur) par :
$(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ (resp $[x, y] = xy - yx$).
Une partie M de A est dite associative (resp commutative) si $(x, y, z) = 0$ (resp $[x, y] = 0$) pour tout x, y et z dans M.
Une algèbre est dite alternative, si pour tout x et y dans A, $(x, x, y) = (y, x, x) = 0$.
Dans une algèbre alternative, deux éléments engendrent une sous-algèbre associative,(théorème d'Artin [14] théorème 2, p 36).
Si A est unitaire d'unité 1, on dit qu'un élément x de A est inversible s'il existe y dans A tel que $xy = yx = 1$. Un tel élément s'il existe est unique, on le note x^{-1} ([14] lemme 6, p 204).
Tout élément d'une algèbre alternative est contenu dans une sous-algèbre associative unitaire pleine.
Deux éléments x et y sont inversibles si, et seulement si, xy et yx sont inversibles.([14] lemme 9 p 205).
Deux éléments de A et leurs inverses lorsqu'ils existent, engendrent une sous-algèbre associative,([8] corollaire 5.10, p 39). Ce résultat joue un rôle essentiel dans la démonstration de certains résultats de ce travail.
Un élément x est dit quasi-inversible si $1 - x$ est inversible. Un idéal est dit quasi-inversible si tous ses éléments sont quasi-inversibles. Par définition, le radical de A qu'on note $RadA$ est la somme de tous les idéaux quasi-inversibles. $RadA$ est quasi-inversible et $Rad(A/RadA) = 0$ [13]. $RadA = \{x \in A/1 - ax$ est inversible $\forall a \in A\}$. ([11], p 540).
Une algèbre alternative est dite de Banach alternative, si l'espace vectoriel sous-jacent est muni d'une norme $||.||$ d'espace de Banach telle que $||xy|| \leq ||x||||y||$ pour tout x, y dans A. Dans une telle algèbre, on vérifie que tout élément est contenu dans

une sous-algèbre de Banach associative pleine, ainsi le spectre de tout élément x de A, noté spx, est une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$, et $\rho(x) = \sup\{|\lambda|/\lambda \in spx\}$ pour tout x dans A, où $\rho(x)$ désigne le rayon spectral de x. On vérifie aussi que si f est une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ à valeurs dans A, alors $\rho(f)$ est sous harmonique [2].
Dans toute la suite A désigne une algèbre de Banach alternative unitaire d'unité 1. Si A est munie d'une involution $\star$, on définit la partie réelle d'un élément a dans A par $\Re a = \frac{a+a^*}{2}$. Un élément a de A est dit unitaire si $aa^* = a^*a = 1$, il est dit normal si $aa^* = a^*a$, et il est dit hermitien si $a^* = a$. Une partie M de A est dite auto-adjointe si pour tout x dans M, x^* appartient aussi à M. Une sous-algèbre engendrée par une partie auto-adjointe est auto-adjointe. A est dite involutive si l'involution est continue, et elle est dite hermitienne si pour tout élément x tel que $x^* = x$, $spx \subset \mathbb{R}$. Si A est hermitienne et si x et y sont deux éléments hermitiens de A on note $x > y$ (resp $x \geq y$) pour dire que $sp(x-y) \subset]0, \infty[$ (resp $sp(x-y) \subset [0, \infty[$).
De la même façon que dans le cas associatif , on peut montrer que toute sous-algèbre fermée d'une algèbre de Banach alternative hermitienne, est hermitienne.
Pour la suite, nous avons besoin des deux lemmes suivants dont les démonstrations découlent du cas associatif et du théorème d'Artin :

Lemme 1.1 (J.W.M. Ford dans le cas alternatif). *Soient A une algèbre de Banach alternative hermitienne, h un élément hermitien de A tel que $h > 0$, alors il existe un unique u hermitien tel que $u > 0$ et $u^2 = h$.*

Lemme 1.2 (Shirali dans le cas alternatif). *Soit A une algèbre de Banach alternative hermitienne, alors pour tout x dans A on a $xx^* \geq 0$.*

2 Calcul fonctionnel harmonique dans une algèbre de Banach alternative involutive.

Soient A une algèbre de Banach alternative, Une fonction f de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ à valeurs dans A est dite harmonique, si $\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On note par $h(U, A)$ (resp $H(U, A)$) l'espace vectoriel (resp l'algèbre) des fonctions harmoniques (resp holomorphes) de U à valeurs dans A. Muni de la topologie de la convergence compacte, $h(U, A)$ (resp $H(U, A)$) est un espace (resp algèbre) de Fréchet.

2.1 Construction du calcul fonctionnel harmonique

Soient A une algèbre de Banach alternative involutive, a un élément de A, et f une fonction harmonique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ à valeurs dans A tel que $spa \subset B(z_\circ, R) \subset \bar{B}(z_\circ, R) \subset U$ ($z_\circ \in U, R > 0$), on définit alors l'élément $f(a)$ de A par la formule intégrale de Poisson :
$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_\circ|=R} f(z) \Re[(z + a - 2z_\circ)(z - a)^{-1}] \frac{|dz|}{R}$.
$f(a)$ a un sens car la fonction sous le signe intégral est continue.

Théorème 2.1. *Soient A une algèbre de Banach alternative involutive, a un élément de A, et U un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $spa \subset B(z_\circ, R) \subset \bar{B}(z_\circ, R) \subset U$ ($z_\circ \in U, R > 0.$), alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} \phi_a \ : \ h(U,A) & \longrightarrow & A \\ f & \longrightarrow & f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)\Re[(z+a-2z_\circ)(z-a)^{-1}]\frac{|dz|}{R}. \end{array}$$

est un morphisme d'espace vectoriel continu, vérifiant $f^*(a) = f(a)^*$pour tout f telle que a commute avec f^* et f ; i.e. $af(z) = f(z)a$ et $af^*(z) = f^*(z)a$ pour tout z dans U.

Preuve

Analogue au cas associatif.

Lemme 2.1. *Soient a un élément d'une algèbre de Banach alternative involutive A et U un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $spa \subset B(z_\circ, R) \subset \bar{B}(z_\circ, R) \subset U$ ($z_\circ \in U, R > 0.$), alors $\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{(\overline{z-z_\circ})(\bar{z}-a^*)^{-1}}{z'-z}\frac{|dz|}{R} = \frac{1}{z'-z_\circ}$ pour tout z' tel que $|z'-z_\circ| > R$.*

Preuve

$\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{(\overline{z-z_\circ})(\bar{z}-a^*)^{-1}}{z'-z}\frac{|dz|}{R} = (\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{(z-z_\circ)(z-a)^{-1}}{\overline{z'-z}}\frac{|dz|}{R})^*$ car l'involution est continue.

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{(z-z_\circ)(z-a)^{-1}}{\overline{z'-z}}\frac{|dz|}{R} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{(z-a)^{-1}}{\overline{z'-z}}dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{1}{\overline{z'-z_\circ}}\frac{(z-a)^{-1}}{1-\frac{\overline{z-z_\circ}}{\overline{z'-z_\circ}}}dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{z-z_\circ}^n}{\overline{z'-z_\circ}^{n+1}}(z-a)^{-1}dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{2n}}{\overline{z'-z_\circ}^{n+1}}\int_{|z-z_\circ|=R}\frac{(z-a)^{-1}}{(z-z_\circ)^n}dz \end{aligned}$$

Soit $R' > R$ tel que $||a-z_\circ|| < R'$, donc

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_\circ|=R}\frac{(z-a)^{-1}}{(z-z_\circ)^n}dz &= \int_{|z-z_\circ|=R'}\frac{(z-a)^{-1}}{(z-z_\circ)^n}dz \\ &= \int_{|z-z_\circ|=R'}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a-z_\circ)^k}{(z-z_\circ)^{k+n+1}}dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(a-z_\circ)^k\int_{|z-z_\circ|=R'}\frac{1}{(z-z_\circ)^{k+n+1}}dz = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{(z-z_\circ)(z-a)^{-1}}{\overline{z'-z}}\frac{|dz|}{R} = \frac{1}{\overline{z'-z_\circ}}$ ■

Remarque 2.1. *Puisque les fonctions holomorphes sont des fonctions harmoniques, il est donc naturel de se demander si $\phi_a(f)$ est donnée par la formule classique du calcul fonctionnel holomorphe, lorsque f est holomorphe. La réponse est affirmative, comme le montre la proposition suivante :*

Proposition 2.1. *Avec les mêmes notations du théorème précédent, si f est holomorphe alors :*
$\phi_a(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)(z-a)^{-1}dz.$

Preuve
$\phi_a(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)\Re[(z+a-2z_\circ)(z-a)^{-1}]\frac{|dz|}{R}.$
Or
$\Re[(z+a-2z_\circ)(z-a)^{-1}] = -1 + (z-z_\circ)(z-a)^{-1} + (\bar{z}-\bar{z}_\circ)(\bar{z}-a^*)^{-1}$
D'où

$$\begin{aligned}\phi_a(f) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)\frac{|dz|}{R} + \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)(z-z_\circ)(z-a)^{-1}\frac{|dz|}{R}\\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)(\bar{z}-\bar{z}_\circ)(\bar{z}-a^*)^{-1}\frac{|dz|}{R}\end{aligned}$$

Soit $R' > R$ tel que $B(z_\circ, R') \subset \bar{B}(z_\circ, R') \subset U$. Puisque f est holomorphe sur U alors $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'} \frac{f(z')}{z'-z}dz'$ pour tout z dans $B(z_\circ, R')$.
D'où

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)(\bar{z}-\bar{z}_\circ)(\bar{z}-a^*)^{-1}\frac{|dz|}{R}\\ =\ &\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'}\frac{f(z')}{z'-z}dz')(\bar{z}-\bar{z}_\circ)(\bar{z}-a^*)^{-1}\frac{|dz|}{R}\\ =\ &\frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'} f(z')(\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}\frac{\bar{z}-\bar{z}_\circ}{z'-z}(\bar{z}-a^*)^{-1}\frac{|dz|}{R})dz'\end{aligned}$$

D'après le lemme précédent

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)(\bar{z}-\bar{z}_\circ)(\bar{z}-a^*)^{-1}\frac{|dz|}{R} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'}\frac{f(z')}{z'-z_\circ}dz'$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'}\frac{f(z')}{z'-z_\circ}dz' &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}\frac{f(z)}{z-z_\circ}dz\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)\frac{|dz|}{R}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\phi_a(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)(z-z_\circ)(z-a)^{-1}\frac{|dz|}{R}\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)(z-a)^{-1}dz.\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2. *Puisque le calcul fonctionnel harmonique coïncide avec le calcul fonctionnel holomorphe, alors on vérifie de la même façon que dans le cas associatif que :*
$\phi_a(1) = 1$.
$\phi_a(z) = a$ *et alors* $\phi_a(\bar{z}) = a^*$.
$\phi_a(b) = b$ *pour tout* b *dans* A.

Proposition 2.2 ("spectral mapping theorem"). *Avec les mêmes notations du théorème précédent, si* f *est une fonction harmonique à valeurs scalaires, et si* a *est normal (ie* $aa^* = a^*a$*), alors* $spf(a) = f(spa)$

Preuve
$\{a, a^*\}$ est un ensemble commutatif auto-adjoint. En appliquant le lemme de Zorn, on montre qu'il existe un ensemble M commutatif auto-adjoint maximal contenant $\{a, a^*\}$. Or d'après ([8] chpV 1.16, 1.18 et 1.21, p 130-131) M est une sous-algèbre commutative auto-adjointe pleine et fermée. Comme M est alternatif et commutatif, alors M est associatif ([14] corollaire 2, p 137). Soit donc χ un caractère sur M.
On a : $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)\Re[(z+a-2z_\circ)(z-a)^{-1}]\frac{|dz|}{R} \in M$, et donc

$$\begin{aligned}\chi f(a) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)\Re[(z+\chi a-2z_\circ)(z-\chi a)^{-1}]\frac{|dz|}{R}\\ &= f(\chi a)\end{aligned}$$

D'où $spf(a) = sp_M f(a) = f(sp_M a) = f(spa)$, où sp_M désigne le spectre dans l'algèbre M.

Remarque 2.3. *En général si* a *n'est pas normal, alors le "spectral mapping theorem" n'est pas toujours valable. Un contre exemple à ce propos a été établi dans le cas associatif dans [1].*

2.2 Unicité du calcul fonctionnel harmonique.

Dans [1] les auteurs ont montré l'unicité du calcul fonctionnel harmonique en se servant de la continuité. Or en suivant des techniques de J.McClure [10], nous montrons que la condition de la continuité peut être omise dans le cas du calcul fonctionnel harmonique à valeurs vectorielles. Comme conséquence, nous établissons un résultat de la continuité automatique(corollaire 2.1).

Proposition 2.3. *Le morphisme* ϕ_a *du théorème 2.1 est caractérisé de manière unique par les conditions suivantes :*
1)La restriction de ϕ_a *à l'algèbre* $H(U, A)$ *des fonctions holomorphes, coïncide avec le calcul fonctionnel holomorphe.*
2)$\phi_a(f(z-a)) = 0$ *et* $\phi_a(((z-a)f)^*) = 0$ *pour toute fonction* f *holomorphe de* U *à valeurs dans* A.

Preuve
ϕ_a vérifie 1) proposition 2.1.
2) Montrons que $\phi_a(((z-a)f)^*) = 0$.
On a : $(\phi_a((z-a)f)^*)^* = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}\Re[(z+a-2z_\circ)(z-a)^{-1}]((z-a)f)\frac{|dz|}{R}$.

Or $\Re[(a+z-2z_\circ)(z-a)^{-1}] = -1 + (z-z_\circ)(z-a)^{-1} + (\bar{z}-\bar{z}_\circ)(\bar{z}-a^*)^{-1}$,
d'où

$$\begin{aligned}(\phi_a((z-a)f)^*)^* &= -\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}(z-a)f\frac{|dz|}{R}\\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}(z-z_\circ)(z-a)^{-1}((z-a)f)\frac{|dz|}{R}\\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}(\bar{z}-\bar{z}_\circ)(\bar{z}-a^*)^{-1}((z-a)f)\frac{|dz|}{R}.\end{aligned}$$

Or $(z-a, z-a, f(z)) = 0$ pour tout $|z-z_\circ| = R$ car A est alternative.
D'où $((z-a)^{-1}, z-a, f(z)) = 0$ [14] p 205 .
D'où $\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}(z-z_\circ)(z-a)^{-1}((z-a)f(z))\frac{|dz|}{R} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)dz = 0$; car f est holomorphe sur U.
D'autre part, posons $(z-a)f(z) = g(z)$ pour tout z dans U. Il existe $R' > R$ tel que $B(z_\circ, R') \subset \bar{B}(z_\circ, R') \subset U$, puisque g est holomorphe sur U, alors
$g(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'}\frac{g(z')}{z'-z}dz'$ pour tout z dans $B(z_\circ, R')$.
Donc

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}((\bar{z}-\bar{z}_\circ)(\bar{z}-a^*)^{-1})g(z)\frac{|dz|}{R}\\ =\ &\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}((\bar{z}-\bar{z}_\circ)(\bar{z}-a^*)^{-1})\frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'}\frac{g(z')}{z'-z}dz'\frac{|dz|}{R}\\ =\ &\frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'}g(z')\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}\frac{(\bar{z}-\bar{z}_\circ)(\bar{z}-a^*)^{-1}}{z'-z}\frac{|dz|}{R}dz'.\end{aligned}$$

Donc d'après le lemme (2.1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}(\bar{z}-\bar{z}_\circ)(\bar{z}-a^*)^{-1})g(z)\frac{|dz|}{R} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'}\frac{g(z')}{z'-z_\circ}dz'\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}\frac{g(z)}{z-z_\circ}dz\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}(z-a)f(z)\frac{|dz|}{R}\end{aligned}$$

Finalement $(\phi_a((z-a)f)^*)^* = 0$ c-à-d $\phi_a(((z-a)f)^*) = 0$.
Pour montrer que $\phi_a(f(z-a)) = 0$ on suit le même raisonnement.
Inversement, supposons qu'il existe un morphisme d'espace vectoriel Ψ qui vérifie 1) et 2). Soit $R' > R$ tel que $B(z_\circ, R') \subset \bar{B}(z_\circ, R') \subset U$, alors
$\phi_a(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R'} f(z)\Re[(z+a-2z_\circ)(z-a)^{-1}]\frac{|dz|}{R}$,
et $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R'} f(z)\Re[(z+\lambda-2z_\circ)(z-\lambda)^{-1}]\frac{|dz|}{R}$ pour tout λ dans $B(z_\circ, R')$.
Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned}
\phi_(a) - f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R'} f(z)\Re 2(z-z_\circ)(a-\lambda)(z-a)^{-1}(z-\lambda)^{-1}\frac{|dz|}{R'} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R'} f(z)\frac{(z-z_\circ)}{(z-\lambda)}(z-a)^{-1}\frac{|dz|}{R'}(a-\lambda) \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R'} f(z)\frac{(\bar{z}-\bar{z}_\circ)}{(\bar{z}-\bar{\lambda})}(\bar{z}-a^*)^{-1}\frac{|dz|}{R'}(a^*-\bar{\lambda}) \\
&= h(\lambda)(a-\lambda) + ((a-\lambda)g(\lambda))^*,
\end{aligned}$$

où
$h(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R'} f(z)\frac{(z-z_\circ)}{(z-\lambda)}(z-a)^{-1}\frac{|dz|}{R'}$ et $g(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R'} \frac{(z-z_\circ)}{(z-\lambda)}(z-a)^{-1}f^*(z)\frac{|dz|}{R'}$ pour tout λ dans $B(z_\circ, R')$.
Il est clair que h et g sont deux fonctions holomorphes sur $B(z_\circ, R')$. D'où d'après 2), $\Psi(\phi_a(f) - f) = 0 = \Psi(\phi_a(f)) - \Psi(f)$. Or d'après 1) et la remarque (2.2), $\Psi(\phi_a(f)) = \phi_a(f)$ donc $\Psi(f) = \phi(f)$ et ceci pour tout f dans $h(U, A)$. ∎

Corollaire 2.1. *Soient A une algèbre de Banach commutative involutive, $z_\circ \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, et soit Ψ un morphisme d'espaces vectoriels involutifs de $h(B(z_\circ, R), A)$ à valeurs dans A, tel que la restriction de Ψ à $H(B(z_\circ, R), A)$ soit un morphisme d'algèbre vérifiant $\Psi(b) = b$ pour tout b dans A, alors Ψ est un morphisme d'espaces vectoriels involutifs continu.*

Preuve
Posons $\Psi(z) = a$ et $\Psi' = \Psi/H(B(z_\circ, R), A)$. $\Psi'(b) = b$ pour tout b dans A et Ψ' est un morphisme d'algèbre, donc ([10] lemme 1.3) implique que *spa* $\subset B(z_\circ, R)$ et Ψ' coïncide avec le calcul fonctionnel holomorphe. D'autre part $\Psi(f(z-a)) = \Psi(f)\Psi(a-z) = 0$ pour tout f holomorphe, et puisque Ψ est involutive alors $\Psi(((z-a)f)^*) = (\Psi((z-a)f))^* = 0$ pour tout f holomorphe. D'où d'après la proposition (2.3), $\Psi \equiv \phi_a$ et le théorème 2.1 permet de conclure. ∎

3 Fonction de Ptàk dans une algèbre de Banach alternative hermitienne

Soit A une algèbre de Banach alternative hermitienne, on définit la fonction de Ptàk pour un élément x de A par la quantité $|x| = \rho(xx^*)^{\frac{1}{2}}$. Les techniques utilisées dans [12] pour montrer la sous-multiplicativité de cette fonction dans le cas associatif, ne peuvent être utilisées dans le cas alternatif, c'est pourquoi nous nous proposons pour ce fait de suivre des méthodes de L. Harris [7], qui se basent sur la sous harmonicité du rayon spectral.

Lemme 3.1. *Soit A une algèbre de Banach alternative hermitienne, alors pour tout x dans A on a $\rho(x) \leq |x|$.*

Preuve
Soit x dans A tel que $|x| < 1$, par un raisonnement classique [12],[2] et [3] on montre que $(1+x^*)(1-x)$ et $(1-x)(1+x^*)$ sont inversibles, d'où $1-x$ est inversible [14].
∎

Remarque 3.1. *Si x est normal alors $\rho(x) = |x|$.*
En effet, $\rho(x)^2 \leq |x|^2 = \rho(xx^*) \leq \rho(x)\rho(x^*) = \rho(x)^2$

Lemme 3.2. *Soient A une algèbre de Banach alternative hermitienne, x un élément de A tel que $|x| < 1$, alors pour tout λ dans $\mathbb{C}$ tel que $-1 \notin sp\lambda x$, les éléments $(1-xx^*)^{-\frac{1}{2}}$, $(1-x^*x)^{\frac{1}{2}}$, $\lambda+x$ et $(1+\lambda x^*)^{-1}$ appartiennent à une même sous-algèbre associative.*

Preuve
Soit $M = \{1+\overline{\lambda}x, 1+\lambda x^*, (1+\overline{\lambda}x)^{-1}, (1+\lambda x^*)^{-1}\}$. La sous-algèbre unitaire B engendrée par M est associative [8], de plus B est auto-adjointe car M l'est. D'où $\bar{B}$ est une algèbre de Banach associative hermitienne. Comme $1-xx^* \in \bar{B}$, $1-x^*x \in \bar{B}$ et $\rho(xx^*) = \rho(x^*x) < 1$ alors $(1-xx^*)^{\frac{1}{2}}$ et $(1-x^*x)^{\frac{1}{2}}$ existent et appartiennent à $\bar{B}$ (lemme 1.1). Comme $\bar{B}$ est hermitienne et $(1-xx^*)^{\frac{1}{2}}$ est hermitien et inversible, alors $(1-xx^*)^{-\frac{1}{2}} \in \bar{B}$. ∎

Soit x un élément de A tel que $|x| < 1$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $-1 \notin sp\lambda x$ on définit la transformé de Mobius pour un élément x de A par :
$f_x(\lambda) = (1-xx^*)^{-\frac{1}{2}}(\lambda+x)(1+\lambda x^*)^{-1}(1-x^*x)^{\frac{1}{2}}$. Cette écriture est bien justifiée par le lemme précédent. Le même raisonnement que dans [7] montre que f_x est une fonction holomorphe aux voisinage de la boule unité fermée, et que pour $|\lambda| = 1$, $f_x(\lambda)$ est un élément unitaire et $f_x(0) = x$.

Lemme 3.3. *Soient A une algèbre de Banach alternative hermitienne et x un élément de A. Alors $|x| = \sup\limits_{u\in U} \rho(ux)$, où U est l'ensemble des éléments unitaires de A.*

Preuve
Soit x dans A tel que $|x| < 1$, alors $\rho(ux) = \rho(uf_x(o)) \leq \sup\limits_{|\lambda|=1} \rho(uf_x(\lambda))$.(Principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques)
Or $f_x(\lambda)$ est unitaire pour tout $|\lambda| = 1$. D'où $uf_x(\lambda)$ est unitaire, car le produit de deux éléments unitaires est unitaire [8]. D'où $\rho(uf_x(\lambda)) \leq 1$ pour tout $|\lambda| = 1$. Donc $\rho(ux) \leq \sup\limits_{|\lambda|=1} \rho(uf_x(\lambda)) \leq 1$. Donc $\rho(ux) \leq |x|$ pour tout x dans A et pour tout u dans U, c-à-d $\sup\limits_{u\in U} \rho(ux) \leq |x|$ pour tout x dans A.

Inversement, soit x dans A tel que $|x| < 1$, alors
$|x|^2 = \rho(xx^*) = \rho(xf_{x^*}(0)) \leq \sup\limits_{|\lambda|=1} \rho(xf_{x^*}(\lambda)) \leq \sup\limits_{u\in U} \rho(xu) = \sup\limits_{u\in U} \rho(ux)$

D'où pour tout x dans A, $|x|^2 \leq |x| \sup\limits_{u\in U} \rho(ux)$ c-à-d $|x| \leq \sup\limits_{u\in U} \rho(ux)$. ∎

Proposition 3.1. *Soit A une algèbre de Banach alternative hermitienne, alors la fonction de Ptàk est une semi-norme d'algèbre sur A.*

Preuve
Soient x et y deux éléments de A tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$, alors $|xy| = \sup\limits_{u\in U} \rho(u(xy))$.

Or $\rho(u(xy)) = \rho(u(f_x(0)f_y(0)) \leq \sup_{|\lambda|=1} \rho(u(f_x(\lambda)f_y(\lambda))) \leq 1$.

D'où $\sup_{u\in U} \rho(u(xy)) \leq 1$ pour tout x et y de A tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$, c-à-d $|xy| \leq |x||y|$ pour tout x et y dans A.
D'autre part montrons que $|.|$ est sous-additive :
Soient u, v dans U, alors pour tout $t \geq 0$ $\rho(u + tv) = \rho(u(1 + tu^*v)) \leq |1 + tu^*v|$. Posons $w = u^*v$. Comme $1+tw$ est normal alors d'après la remarque (3.1) $|1+tw| = \rho(1 + tw) \leq 1 + t$. D'où pour tout u, v dans U, $\rho(u + tv) \leq 1 + t$ pour tout $t \geq 0$.
Si $|x| < 1$ et $|y| < 1$, alors
$|x + ty| = \sup_{u\in U} \rho((uf_x(0) + tf_y(0)) \leq \sup_{u\in U} \sup_{|\lambda|=1} \rho(u(f_x(\lambda) + tf_y(\lambda)) \leq 1 + t$ pour tout $t \geq 0$. ■

Corollaire 3.1. *Soit A une algèbre de Banach alternative hermitienne, alors $RadA = \{x \in A/|x| = 0\}$*

Preuve
$RadA = \{x \in A/1 - ax$ est inversible $\forall a \in A\}$[11]
Si $|x| = 0$, alors pour tout a dans A, $\rho(ax) \leq |ax| \leq |a||x| = 0$, donc $1 - ax$ est inversible pour tout a dans A.
Inversement, si $x \in RadA$ alors $\alpha - x^*x$ est inversible pour tout α dans $\mathbb{R}^*$, comme xx^* est hermitien alors $spxx^* = \{0\}$, d'où $\rho(xx^*) = |x|^2 = 0$. ■

Proposition 3.2. *Soit A une algèbre de Banach alternative hermitienne, alors :*
1) Pour tout x dans A on a :
a)$1 - xx^* > 0$ si, et seulement si, $|x| < 1$.
b)$1 - xx^* \geq 0$ si, et seulement si, $|x| \leq 1$.
2)L'ensemble $H = \{h \in A/h \geq 0\}$ est un cône fermé.

La preuve est identiquement la même que dans le cas associatif.

4 Application du calcul fonctionnel harmonique dans une algèbre de Banach alternative hermitienne.

Le but de cette partie est de généraliser au cas alternatif, l'inégalité de Von Neumann à savoir :
Si f est une fonction holomorphe au voisinage de la boule unité fermée telle que $|f| \leq 1$, et si $a \in A$ tel que $|a| \leq 1$, alors $|f(a)| \leq 1$. Pour cela nous établissons d'abord la proposition de Ky-Fan (4.1).
Notations
$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$
$\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1\}$
$B(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D})/|f(z)| < 1\ \forall z \in \mathbb{D}\}$
$P(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D})/\Re f(z) > 0\ \forall z \in \mathbb{D}\}$

Proposition 4.1 (Ky-Fan). *Soient A une algèbre de Banach alternative hermitienne, et a un élément de A tel que $|a| < 1$, alors :*

1)Pour tout f dans $B(\mathbb{D})$, $|f(a)| < 1$.
2)Pour tout f dans $P(\mathbb{D})$, $\Re f(a) > 0$.

Preuve
Supposons $f \in P(\mathbb{D})$. Soient r et r' tels que $|a| < r < r' < 1$; il existe $\delta > 0$ tel que $\Re f - \delta > 0$ sur $\bar{D}(0, r')$. Posons $h = \Re f - \delta$ sur $D(0, r')$.
$h(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} h(z) \Re[(z+a)(z-a)^{-1}] \frac{|dz|}{r}$.
Or pour tout $|z| = r$ l'algèbre fermée B engendrée par la partie
$M = \{z - a, (z-a)^{-1}, \bar{z} - a^*, (\bar{z} - a^*)^{-1}\}$ est une algèbre de Banach associative hermitienne, et $r^2 - aa^* \in B$. Un calcul direct montre que
$\Re[(z+a)(z-a)^{-1}] = (\bar{z} - a^*)^{-1}(r^2 - aa^*)(z-a)^{-1}$. Comme $(r^2 - aa^*) > 0$ (proposition 3.2), il existe u hermitien et inversible dans B tel que $u^2 = (r^2 - aa^*)$. D'où $\Re[(z+a)(z-a)^{-1}] = (u(z-a)^{-1})^*(u(z-a)^{-1}) \geq 0$ (lemme 3.2). D'où
$h(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} h(z)(u(z-a)^{-1})^*(u(z-a)^{-1}) \frac{|dz|}{r} \geq 0$; car le cône des éléments positifs est fermé. Et donc $\Re f(a) > 0$.
2) Soit $f \in B(\mathbb{D})$, alors $g = \frac{1+f}{1-f} \in P(\mathbb{D})$. La sous-algèbre fermée B engendrée par $\{1 - f(a), (1-f(a))^{-1}, 1 - f(a)^*, (1-f(a)^*)^{-1}\}$ est une algèbre de Banach associative hermitienne , donc $2\Re g(a) > 0$, et alors (lemme 1.1) implique qu'il existe u hermitien dans B tel que $u^2 = 2\Re g(a)$. D'où $(u(1-f(a))^*(u(1-f(a)) = 1 - f(a)^* f(a) \geq 0$.
Or u et $1 - f(a)$ sont inversibles, donc $1 - f(a)^* f(a)$ est inversible, d'où $1 - f(a)^* f(a) > 0$, donc $|f(a)| < 1$ (proposition 3.2). ∎

Proposition 4.2 (Inégalité de Von Neumann). *Soient A une algèbre de Banach alternative hermitienne et a un élément de A tel que $|a| \leq 1$, et f une fonction holomorphe au voisinage du disque unité fermé $\bar{\mathbb{D}}$ telle que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$,*
alors $|f(a)| \leq 1$.

Preuve
Si f est constante, alors la preuve est élémentaire. Sinon d'après le principe du maximum, on peut supposer que $|f| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Soit r tel que $0 < r < 1$, alors d'après la proposition précédente $|f(ra)| < 1$ i.e. $1 - f(ra)^* f(ra) > 0$. Or $f(rz)$ tend vers $f(z)$ quand r tend vers 1. Puisque le calcul fonctionnel harmonique est continu, alors $1 - f(ra)^* f(ra)$ tend vers $1 - f(a)^* f(a)$ quand r tend vers 1. Comme le cône positif est fermé alors $1 - f(a)^* f(a) \geq 0$ c-à-d $|f(a)| \leq 1$. ∎

Références

[1] M. Akkar, A. El Kinani, M Oudadess : *Calculs fonctionnels harmonique et analytique réel,* Ann. Sc math. Quebec, (1988), vol 12, n 2, pp 151-169.

[2] B.Aupetit : *Propriétés spectrales des algèbres de Banach,* Lecture Notes in Mathematics, 735, Springer-Verlag, (1979).

[3] F.F. Bonsall and J. Duncan : *Complete normed algebras,* Springer-Verlag, (1973).

[4] A. Elkinani : *Holomorphic functions operating in hermitian Banach algebras,* Proc. Amer. Math. Soc, vol 111, n4 (1991), pp 931-939.

[5] J.W.M.Ford : *A square root lemma for Banach *-algebras,* J. London. Math. Soc, 42, pp 521-522. (1967).

[6] J.W.M.Ford and S.Shirali : *Symmetry in complex involutory Banach algebras,* Duke, Math. J, 37, pp 275-280. (1970)

[7] L. Harris : *Banach algebras with involution and Mobius Transformations,* J.Functional Analysis, 11, 4, (1972), pp 1-16.

[8] A. M. Kaidi : *Bases para una teoria de las algebras no-associativas normadas,* Thèse doctorale. Université de Granada. Granada (1977).

[9] Ky Fan : *Analytic functions of proper contraction,* Math. Zeitschrift, 160, 275-290, (1978).

[10] J. P. McClure : *Automatic continuity of functional calculus for vector-valued functions,* J. London. Math. Soc, (2), 5, (1972), 154-158.

[11] K. McCrimmon : *A characterization of the Jacobson-Smiley radical,* J. of algebra,18, (1971).

[12] V.Ptàk : *Banach algebras with involution,* Manuscripta-Math, 6, pp 245-290, (1972).

[13] M.F.Smiley : *The radical of an alternative ring,* Annal of Math, 49, 3, (1948), pp 702-709.

[14] K.A Zhevlakov, A.M Slin'ko, I.P Sheslakov, A.I Shirshov : *Ring that are nearly associative,* Acad. Press, New-York, London, (1982).

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Dhar El Mehraz,
Université S.M Ben Abdellah, B.P 1796, Atlas-Fès, Maroc.
e.mail : atajmouati@yahoo.fr