Structure m-convexe dans l'espace à poids $L^p_\Omega(R^n)$

A. El Kinani A. Benazzouz

Abstract

We consider the space $L^p_\Omega(R^n)$, $1 \leq p < +\infty$, where Ω is a family of weights. We give a necessary and sufficient condition, on Ω, for $L^p_\Omega(R^n)$ to be locally m-convex algebra. Fundamental properties of this algebra are also obtained.

1 Préliminaires et introduction

Une algèbre localement multiplicativement convexe (*a.l.m.c.* en abrégé) est une algèbre localement convexe (E,τ) dont la topologie τ est définie par une famille $(|.|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$de semi-normes sous-multiplicatives ([1] et [4]). Pour $\lambda \in \Lambda$, on désigne par $E_\lambda = E/Ker\,|.|_\lambda$, où $Ker\,|.|_\lambda = \{x \in E : |x|_\lambda = 0\}$, l'algèbre quotient de E par $Ker\,|.|_\lambda$ et $\pi_\lambda : E \longrightarrow E/Ker\,|.|_\lambda$ la surjection canonique. Pour $x \in E$, la classe $\pi_\lambda(x)$ de x sera notée x_λ. On munit E_λ de la norme $\|.\|_\lambda$ définie par $\|x_\lambda\|_\lambda = |x|_\lambda$. Soit $\widehat{E_\lambda}$ l'algèbre complétée, pour $\|.\|_\lambda$, de E_λ. Dans toute la suite, la norme de l'algèbre $\widehat{E_\lambda}$ sera encore notée $\|.\|_\lambda$. Si $\left(E, (|.|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$ est séparée, alors E est isomorphe à une sous-algèbre du produit $\prod_{\lambda\in\Lambda} \widehat{E_\lambda}$. Si E est séparée et complète, alors E est algébriquement et topologiquement isomorphe à la limite projective d'algèbres de Banach $\widehat{E_\lambda}$. Dans toute la suite, on désigne par $\rho(x) = \sup\{|z| : z \in Spx\}$ le rayon spectral d'un élément x de E.

Received by the editors November 2001.
Communicated by F. Bastin.
1991 *Mathematics Subject Classification* : 46H20. 46E30.
Key words and phrases : Algèbre localement m-convexe, Q-algèbre, fonction p-ième intégrable, produit de convolution.

Pour $1 < p < +\infty$, $L^p(R^n)$ désignera l'espace des classes de fonctions complexes de puissance p-ième intégrables sur R^n. Dans la suite, nous ne ferons pas de différence entre deux fonctions égales presque partout. Pour $f \in L^p(R^n)$, posons

$$\|f\|_p = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les espaces $\left(L^p(R^n), \|.\|_p\right)$, $1 < p < +\infty$, sont des espaces de Banach. Ils ne sont pas des algèbres pour le produit ordinaire. Deux fonctions complexes f et g mesurables, sur R^n, sont dites "convolables" si la fonction $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable pour presque tout x; dans ce cas on peut définir presque partout

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y)dy.$$

La fonction $f*g$ est dite le produit de convolution de f et g. Les espaces $\left(L^p(R^n), \|.\|_p\right)$, $1 < p < +\infty$, ne sont pas des algèbres pour le produit de convolution. Pour $f \in L^1(R^n)$, $\mathcal{F}f$ désignera la transformation de Fourier de f, i.e.

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{R^n} f(y)e^{-2\pi ixy}dy; \quad x \in R^n.$$

Soit Ω une famille de poids sur R^n c'est à dire de fonctions ω positives, mesurables et localement intégrables sur R^n. Pour $1 < p < +\infty$, on définit les espaces fonctionnels suivants

$$L^p_\omega(R^n) = \left\{f : R^n \longrightarrow C : f \text{ mesurable et } |f|^p \omega \in L^1(R^n)\right\}$$

et

$$L^p_\Omega(R^n) = \left\{f : R^n \longrightarrow C : f \text{ mesurable et } |f|^p \omega \in L^1(R^n), \text{ pour tout } \omega \in \Omega.\right\}$$

L' espace $L^p_\omega(R^n)$ est un espace de Banach pour la norme $|.|_\omega$ donnée par

$$|f|_\omega = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

et son dual s'identifie à l'espace $L^q_{\omega_1}(R^n)$, où $\omega_1 = \omega^{-\frac{q}{p}}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $1 < p < +\infty$, on munit $L^p_\Omega(R^n)$ de la topologie définie par la famille de normes $(|.|_\omega)_{\omega\in\Omega}$. L'espace $\left(L^p_\Omega(R^n), (|.|_\omega)_{\omega\in\Omega}\right)$ devient ainsi un espace localement convexe complet. Dans toute la suite, $p \in]1, +\infty[$ et Ω est une famille de poids sur R^n. Pour $r \in [1, +\infty[$ et ψ une fonction positive, on notera $\|f\|_{r,\psi}$, où f est une fonction complexe sur R^n, la quantité donnée par

$$\|f\|_{r,\psi} = \left(\int_{R^n} |f(x)|^r \psi(x)dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Dans ce papier, nous considérons le produit de convolution dans les espaces $L^p_\Omega(R^n)$, $1 < p < +\infty$. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes, sur Ω, pour que l'espace $\left(L^p_\Omega(R^n), (|.|_\omega)_{\omega\in\Omega}\right)$ soit une *a.l.m.c.* complète.

2 Structure m -convexe dans l'espace à poids $L_{\Omega}^{p}(R^n)$

Une condition nécessaire, sur Ω, pour que l'espace $\left(L_{\Omega}^{p}(R^n), (|.|_{\omega})_{\omega\in\Omega}\right)$ soit une *a.l.m.c.* complète est donnée par le résultat suivant.

Proposition 2.1. Soient $p \in]1, +\infty[$ et Ω une famille de poids sur R^n. Si, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}} \leq \omega^{\frac{1}{1-p}} \qquad (1),$$

alors l'espace $\left(L_{\Omega}^{p}(R^n), (|.|_{\omega})_{\omega\in\Omega}\right)$ est une *a.l.m.c.* complète.

Preuve. Il reste à montrer que

$$|f * g|_{\omega} \leq |f|_{\omega} |g|_{\omega}; \quad f, g \in L_{\Omega}^{p}(R^n).$$

Comme l'espace $\mathcal{K}(R^n)$ des fonctions continues à support compact dans R^n est dense dans $(L_{\omega}^{p}(R^n), |.|_{\omega})$, pour tout $\omega \in \Omega$, il suffit de montrer que

$$|f * g|_{\omega} \leq |f|_{\omega} |g|_{\omega}; \quad f, g \in \mathcal{K}(R^n).$$

Soient $f, g \in \mathcal{K}(R^n)$ et $h = f * g$. En écrivant

$$h(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y) \left|\frac{\omega(x-y)\omega(y)}{\omega(x-y)\omega(y)}\right|^{\frac{1}{p}} dy$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|h(x)| \leq \left(\int_{R^n} |f(x-y)|^p \omega(x-y) |g(y)|^p \omega(y) dy\right)^{\frac{1}{p}} W^{\frac{p-1}{p}}(x),$$

où $W = \omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}\left|\int_{R^n} |h(x)|^p W^{1-p}(x) dx\right| &\leq \int_{R^n} |f(x-y)|^p \omega(x-y) dx \int_{R^n} |g(y)|^p \omega(y) dy \\ &\leq |f|_{\omega}^{p} |g|_{\omega}^{p}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $1 - p < 0$, l'inégalité (1) entraîne que $\omega \leq W^{1-p}$. Donc

$$\begin{aligned}|f * g|_{\omega} &= \left(\left|\int_{R^n} |h(x)|^p \omega(x) dx\right|\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |f|_{\omega} |g|_{\omega}.\end{aligned}$$

Comme conséquence, on obtient ce qui suit.

Corollaire 2.2. ([2]). Soient $p \in]1, +\infty[$ et ω un poids sur R^n tel que $\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}} \leq \omega^{\frac{1}{1-p}}$. Alors l'espace $(L_{\omega}^{p}(R^n), |.|_{\omega})$ est une algèbre de Banach.

Remarque 2.3. Soient $p \in]1, +\infty[$ et Ω une famille de poids, sur R^n, vérifiant (1) et $E = L_{\Omega}^{p}(R^n)$. Pour $\omega \in \Omega$, on désigne par E_{ω} l'algèbre $L_{\Omega}^{p}(R^n)$ munie de la norme $|.|_{\omega}$. Soit $\widehat{E}_{\omega}$ l'algèbre complétée, pour $|.|_{\omega}$, de E_{ω}. L'algèbre $\widehat{E}_{\omega}$ est exactement égale à $L^p_\omega(R^n)$. De plus la famille Ω est filtrante croissante ; et pour $\omega,\ \psi \in \Omega$ tel que $\omega \leq \psi$, on a $L^p_\psi(R^n) \subset L^p_\omega(R^n)$. Soit $I_{\omega,\psi} : L^p_\psi(R^n) \longrightarrow L^p_\omega(R^n)$ l'injection canonique. Alors $\left(L^p_\omega(R^n), I_{\omega,\psi}\right)_{\omega,\psi\in\Omega}$ est un système projectif d'algèbres de Banach. De plus, on a

$$\varprojlim_{\omega} L^p_\omega(R^n) = \bigcap_{\omega\in\Omega} L^p_\omega(R^n) = L^p_\Omega(R^n).$$

Avant d'établir la réciproque de la proposition 2.1, montrons d'abord les résultats suivants.

Soient $p \in \left]1, +\infty\right[$ et Ω une famille de poids sur R^n telle que l'espace $L^p_\Omega(R^n)$ muni de la topologie localement convexe donnée par la famille de normes $\left(|.|_\omega\right)_{\omega\in\Omega}$ est localement m-convexe, i.e. $|.|_\omega$ est sous multiplicative pour tout $\omega \in \Omega$. Dans ce cas, on dira que Ω est une famille m-convexe de poids sur R^n. Alors, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$|f * g|_\omega \leq |f|_\omega |g|_\omega ; \quad f, g \in L^p_\Omega(R^n).$$

Comme $L^p_\Omega(R^n)$ est dense dans $\left(L^p_\omega(R^n), |.|_\omega\right)$, on a

$$|f * g|_\omega \leq |f|_\omega |g|_\omega ; \quad f, g \in L^p_\omega(R^n).$$

Ainsi chaque $g \in L^p_\omega(R^n)$ définit un opérateur de multiplication $\mathcal{R}_g$ de $L^p_\omega(R^n)$ dans $L^p_\omega(R^n)$, par $\mathcal{R}_g(f) = f * g$. Considérons l'application $\mathcal{R}$ définie, sur $L^p_\omega(R^n)$, par $\mathcal{R}(g) = \mathcal{R}_g$. Alors, on a le résultat suivant.

Proposition 2.4. Soient $p \in \left]1, +\infty\right[$, Ω une famille m-convexe de poids sur R^n et $g \in L^p_\omega(R^n)$. Pour $\omega \in \Omega$, posons $W = \left(\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p}$. Si $\omega^{\frac{1}{1-p}} \in L^1(R^n)$, pour tout $\omega \in \Omega$, alors

1) l'application $\mathcal{R}_g$ est à valeurs dans $L^p_W(R^n)$.

2) l'application $\mathcal{R}$ est un isomorphisme injectif de $L^p_\omega(R^n)$ dans l'espace de Banach $\mathcal{L}\left(L^p_\omega(R^n), L^p_W(R^n)\right)$ pour la norme des opérateurs.

Preuve. 1) Soit $f \in L^p_\omega(R^n)$. Posons

$$F(x, y) = f(x)g(y)\left[\omega(x)\omega(y)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Alors $F \in L^p(R^n \times R^n)$. De plus $f * g = TF$, où

$$TF(x) = \int_{R^n} \frac{F(x-t, t)}{\left[\omega(x-t)\omega(t)\right]^{\frac{1}{p}}} dt. \qquad (2)$$

Pour $f \in L^q_{\omega^{\frac{1}{1-p}}}(R^n)$, on considère la fonction Sf définie, sur $R^n \times R^n$, par

$$Sf(x, y) = f(x+y)\omega^{-\frac{1}{p}}(x)\omega^{-\frac{1}{p}}(y).$$

Il est clair que TF et Sf sont des fonctions mesurables. De plus, pour tout $f \in L^q_{W^{\frac{1}{1-p}}}(R^n)$, on montre facilement que

$$\|Sf\|_q = \|f\|_{q,W^{\frac{1}{1-p}}},$$

Ainsi l'application S est une isométrie de $L^q_{W^{\frac{1}{1-p}}}(R^n)$ dans $L^q(R^n \times R^n)$. Un calcul simple montre que T est l'application transposée de S. Comme les espaces $L^p_W(R^n)$ et $L^p(R^n \times R^n)$ sont réflexifs, l'application S est aussi la transposée de T. Ainsi T est continue et surjective de $L^p(R^n \times R^n)$ sur $L^p_W(R^n)$.

2) Comme $\omega^{\frac{1}{1-p}}$ et $W^{\frac{1}{1-p}}$ sont dans $L^1(R^n)$, les espaces $L^p_\omega(R^n)$ et $L^p_W(R^n)$ sont contenus dans $L^1(R^n)$. Par ailleurs, l'application $\mathcal{R}$ est injectif. De plus, on a

$$\|\mathcal{R}(g)\| = \sup\left\{\|f * g\|_{p,W} : \|f\|_{p,\omega} \leq 1\right\} \leq \|g\|_{p,\omega}.$$

D'où la continuité de $\mathcal{R}$. Ainsi $\mathcal{R}$ est une bijection continue de $L^p_\omega(R^n)$ sur $\mathcal{R}(L^p_\omega(R^n))$. Pour finir montrons que $\mathcal{R}(L^p_\omega(R^n))$ est un fermé dans l'espace $\mathcal{L}(L^p_\omega(R^n),\ L^p_W(R^n))$; et on conclut par le théorème de Banach. Soit $(g_n)_n \subset L^p_\omega(R^n)$ une suite telle que $\mathcal{R}(g_n)$ converge, dans $\mathcal{L}(L^p_\omega(R^n),\ L^p_W(R^n))$, vers un opérateur U. Pour tout $f \in L^p_\omega(R^n)$, $f * g_n$ converge, dans $L^p_W(R^n)$, vers $U(f)$. Et comme la norme de $L^1(R^n)$ est majorée par celle de $L^p_W(R^n)$, on obtient que $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g_n)$ converge uniformément vers $\mathcal{F}(U(f))$. Il en résulte que $\mathcal{F}(g_n)$ converge ponctuellement vers une fonction h. Par ailleurs, pour tout $f \in L^p_\omega(R^n)$, il existe $V(f) \in L^p(R^n \times R^n)$, tel que $U(f) = T(V(f))$, où T est l'application donné par (2). Mais $\mathcal{F}(U(f)) = h\mathcal{F}(f)$, pour tout $f \in L^p_\omega(R^n)$. Donc $V(f) = g \otimes f\omega^{\frac{-1}{p}}$, où $g \in L^p(R^n)$ et $\mathcal{F}(g\omega^{\frac{-1}{p}}) = h$. Ainsi $U(f) = g\omega^{\frac{-1}{p}} * f$, pour tout $f \in L^p_\omega(R^n)$, i.e. $U = \mathcal{R}_{g\omega^{\frac{-1}{p}}} \in \mathcal{R}(L^p_\omega(R^n))$. D'où la fermeture de $\mathcal{R}(L^p_\omega(R^n))$ dans l'espace $\mathcal{L}(L^p_\omega(R^n),\ L^p_W(R^n))$.

Proposition 2.5. Soient $p \in \left]1, +\infty\right[$, Ω une famille m-convexe de poids sur R^n, $\omega \in \Omega$ et W qui vérifient les conditions de la proposition 2.4. Alors l'espace $L^p_W(R^n)$ est un module sur $L^p(R^n)$.

Preuve. Supposons d'abord que $f \in L^p_\omega(R^n \times R^n)$ et $g \in L^p_{W^{-\frac{q}{p}}}(R^n \times R^n)$. En utilisant le fait que $(L^p_\omega(R^n), |.|_\omega)$ est une algèbre de Banach, on vérifie facilement que $\overset{\vee}{f} * g \in L^q_{W^{-\frac{q}{p}}}(R^n \times R^n)$; où $\overset{\vee}{f}(x) = f(-x)$, pour tout $x \in R^n$. De plus, on a

$$\left\|\overset{\vee}{f} * g\right\|_{q,W^{-\frac{q}{p}}} \leq \|g\|_{q,W^{-\frac{q}{p}}} \|f\|_{p,\omega}.$$

Soit maintenant $f \in L^p(R^n)$ et $g \in L^p_W(R^n)$. Alors, pour tout $h \in L^q_{W^{-\frac{q}{p}}}(R^n)$, on montre que

$$\int_{R^n} f * g(x)h(x)dx \leq \|g\|_{p,W} \|f\|_{p,\omega} \|h\|_{q,W^{-\frac{q}{p}}}.$$

Comme

$$\|f * g\|_{p,W} = \sup\left\{\left|\int_{R^n} f * g(x)h(x)dx\right| : \|h\|_{q,W^{-\frac{q}{p}}} \leq 1\right\},$$

on a

$$\|f * g\|_{p,W} \leq \|g\|_{p,W} \|f\|_{p,\omega}.$$

La réciproque de la proposition 2.1 est vraie comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.6. Soient $p \in \left]1, +\infty\right[$ et Ω une famille m-convexe de poids sur R^n. Si

$$\omega^{\frac{1}{1-p}} \in L^1(R^n), \text{ pour tout } \omega \in \Omega,$$

alors, pour tout $\omega \in \Omega$, il existe une constante $c(\omega) > 0$ telle que

$$\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}} \leq c(\omega)\omega^{\frac{1}{1-p}}.$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que, pour $\omega \in \Omega$, l'espace $L^p_\omega(R^n) \bigcap L^p_W(R^n)$ est dense dans $L^p_W(R^n)$, où $W = \left(\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p}$. En effet comme $L^p_\omega(R^n)$ est une algèbre, on a

$$T(f \otimes g) = f\omega^{\frac{-1}{p}} * g\omega^{\frac{-1}{p}}, \text{ pour tous } f, g \in L^p(R^n)$$

De plus $T(f \otimes g) \in L^p_\omega(R^n)$. Par conséquent

$$T(L^p(R^n)) \overset{\wedge}{\otimes} L^p(R^n) \subset L^p_\omega(R^n).$$

D'où le résultat vu que $T(L^p(R^n \times R^n)) = L^p_W(R^n)$. Soit maintenant I l'application identique définie dans $L^p_\omega(R^n) \bigcap L^p_W(R^n)$ muni de la norme de $L^p_W(R^n)$. Par la proposition 2.4, il existe une constante $k(\omega) > 0$ telle que

$$\|f\|_{p,\omega} \leq k(\omega) \sup\left\{\|f * g\|_{p,W} : \|g\|_{p,\omega} \leq 1\right\}.$$

Comme, par la proposition 2.5, l'espace $L^p_W(R^n)$ est un module sur $L^p(R^n)$, on a

$$\sup\left\{\|f * g\|_{p,W} : \|g\|_{p,\omega} \leq 1\right\} \leq k(\omega)\|f\|_{p,W}; \text{ pour tout } f \in L^p_\omega(R^n) \bigcap L^p_W(R^n).$$

Donc I est continu de $L^p_\omega(R^n) \bigcap L^p_W(R^n)$ dans $L^p_\omega(R^n)$. Par suite I se prolonge en une application continu sur $L^p_W(R^n)$ tout entier. Autrement dit $L^p_W(R^n) \subset L^p_\omega(R^n)$. Ainsi il existe une constante $k(\omega) > 0$ telle que

$$\|f\|_{p,\omega} \leq k(\omega)\|f\|_{p,W}; \quad \text{pour tout } f \in L^p_W(R^n).$$

Ceci entraîne que $\omega \leq k(\omega)W$; et donc

$$\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}} \leq c(\omega)\omega^{\frac{1}{1-p}},$$

où $c(\omega) = k(\omega)^{\frac{q}{p}}$.

Comme conséquence, on obtient ce qui suit.

Corollaire 2.7. ([2]). Soient $p \in]1, +\infty[$ et ω un poids, sur R^n, tel que l'espace $(L^p_\omega(R^n), |.|_\omega)$ soit une algèbre de Banach. Si $\omega^{\frac{1}{1-p}} \in L^1(R^n)$, alors il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}} \leq k\omega^{\frac{1}{1-p}}. \qquad (3)$$

3 Spectre de Gelfand de $\left(L^p_\Omega(R^n), (|.|_\omega)_{\omega\in\Omega}\right)$

Soient $p \in]1, +\infty[$ et Ω une famille m-convexe de poids sur R^n. Soit $\mathcal{M}(L^p_\Omega(R^n))$ (resp. $\mathcal{M}(L^p_\omega(R^n))$) l'ensemble des caractères non nuls de $L^p_\Omega(R^n)$ (resp. de $L^p_\omega(R^n)$). En utilisant (2) et le lemme 6.3 de [3, p. 172], on obtient que

$$\mathcal{M}(L^p_\Omega(R^n)) = \varprojlim_\omega \mathcal{M}(L^p_\omega(R^n)).$$

Par conséquent

$$\mathcal{M}(L^p_\Omega(R^n)) = \bigcup_{\omega\in\Omega} \mathcal{M}(L^p_\omega(R^n)).$$

Déterminons maintenant $\mathcal{M}(L^p_\omega(R^n))$, pour $\omega \in \Omega$. Soit χ un caractère non nul de l'algèbre $L^p_\omega(R^n)$, c'est à dire une forme linéaire continue satisfaisant la relation

$$\chi(f * g) = \chi(f)\chi(g); \quad f, g \in L^p_\omega(R^n). \tag{4}$$

Comme $(L^p_\omega(R^n))' = L^q_{\omega^{-\frac{q}{p}}}(R^n)$, il existe $\beta \in L^q_{\omega^{-\frac{q}{p}}}(R^n)$ telle que

$$\chi(f) = \int_{R^n} f(x)\beta(x)dx; \quad f \in L^p_\omega(R^n).$$

Exploitons maintenant la relation (4). D'une part, pour $f, g \in \mathcal{K}(R^n)$, on a

$$\chi(f * g) = \int_{R^n} f * g(x)\beta(x)dx = \int_{R^n}\int_{R^n} f(t)g(x)\beta(x+t)dtdx. \tag{5}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\chi(f)\chi(g) &= \int_{R^n} f(t)\beta(t)dt \int_{R^n} f(x)\beta(x)dx \\ &= \int_{R^n}\int_{R^n} f(t)g(x)\beta(t)\beta(x)dtdx. \qquad (6)\end{aligned}$$

Comme l'espace des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $u \otimes v$, où $u, v \in \mathcal{K}(R^n)$, est dense dans $L^p_{\omega\otimes\omega}(R^n \times R^n)$, on déduit de (5) et (6) que l'application $(x, y) \longmapsto \beta(x + y)$ est dans $L^q_{(\omega\otimes\omega)^{\frac{-q}{p}}}(R^n \times R^n)$ et que $\beta(x + y) = \beta(x)\beta(y)$ presque partout. Et l'on a ce qui suit.

Proposition 3.1. Soient $p \in]1, +\infty[$, Ω une famille m-convexe de poids sur R^n et $\omega \in \Omega$. Alors une forme linéaire, sur $L^p_\omega(R^n)$, est un caractère si, et seulement si, il existe une fonction $\beta \in L^q_{\omega^{-\frac{q}{p}}}(R^n)$ vérifiant

$$\beta(x + y) = \beta(x)\beta(y); \text{ presque partout}$$

et telle que

$$\chi(f) = \int_{R^n} f(x)\beta(x)dx; \text{ pour tout } f \in L^p_\omega(R^n).$$

Preuve. Il reste à montrer que s'il existe $\beta \in L^q_{\omega^{-\frac{q}{p}}}(R^n)$ telle que

$$\chi(f) = \int_{R^n} f(x)\beta(x)dx; \text{ pour tout } f \in L^p_\omega(R^n)$$

et

$$\beta(x+y)=\beta(x)\beta(y) \text{ pour presque tous } x \text{ et } y,$$

alors $\chi \in \mathcal{M}\left(L^p_\omega\left(R^n\right)\right)$. La relation (5) montre que, pour tous $u, v \in \mathcal{K}(R^n)$, on a

$$\chi(u*v) = \int_{R^n}\int_{R^n} u(t)v(x)\beta(x+t)dtdx$$
$$= \int_{R^n}\int_{R^n} u(t)v(x)\beta(t)\beta(x)dtdx = \chi(u)\chi(v).$$

Et on conclut par le fait que $\mathcal{K}(R^n)$ est dense dans $L^p_\omega\left(R^n\right)$.

Remarque 3.2. La condition $\omega^{\frac{1}{1-p}} \in L^1\left(R^n\right)$, pour tout $\omega \in \Omega$, est superflue dans la proposition 2.5. En effet, s'il existe $\omega \in \Omega$ telle que $\omega^{\frac{1}{1-p}} \notin L^1\left(R^n\right)$. Soit $\chi \in \mathcal{M}\left(L^p_\omega\left(R^n\right)\right)$. Alors, d'après la proposition précédente, il existe une fonction $\beta \in L^q_{\omega^{-\frac{q}{p}}}\left(R^n\right)$ vérifiant $\beta(x+y)=\beta(x)\beta(y)$ presque partout et telle que

$$\chi(f) = \int_{R^n} f(x)\beta(x)dx; \text{ pour tout } f \in L^p_\omega\left(R^n\right).$$

Posons $\psi = |\beta|^{-p}\omega$. Alors $\psi^{\frac{1}{1-p}} \in L^1\left(R^n\right)$. Par ailleurs

$$\beta(f*g) = (\beta f)*(\beta g); \text{ pour tous } f, g \in L^p_\omega\left(R^n\right)$$

De plus $L^p_\psi\left(R^n\right) = \Phi\left(L^p_\omega\left(R^n\right)\right)$, où $\Phi(f) = f\beta$, pour tout $f \in L^p_\omega\left(R^n\right)$. Il s'ensuit que $\left(L^p_\psi\left(R^n\right), |.|_\psi\right)$ est une algèbre de Banach. Donc, d'après la proposition 2.5., il existe une constante $c(\psi) > 0$ telle que

$$\psi^{\frac{1}{1-p}} * \psi^{\frac{1}{1-p}} \leq c(\psi)\psi^{\frac{1}{1-p}}.$$

Mais

$$\psi^{\frac{1}{1-p}} * \psi^{\frac{1}{1-p}} = |\beta|^q\left(\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}}\right).$$

Donc

$$\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}} \leq c(\psi)\omega^{\frac{1}{1-p}}.$$

Remarque 3.3. Pour $\alpha > \frac{n}{2}$, posons

$$\omega_\alpha(x) = \left(1+|x|^2\right)^\alpha \text{ and } \Omega = \left\{\omega_\alpha : \alpha > \frac{n}{2}\right\}.$$

Un calcul simple montre que, pour $\alpha > \frac{n}{2}$, il existe une constante $c(\alpha) > 0$ telle que

$$\omega_\alpha^{-1} * \omega_\alpha^{-1} \leq c(\alpha)\omega_\alpha^{-1}.$$

Comme dans la proposition 2.1, on montre que

$$|f*g|_{\omega_\alpha} \leq c(\alpha)^{\frac{1}{p}}|f|_{\omega_\alpha}|g|_{\omega_\alpha}; \quad f,\ g \in L^p_\Omega\left(R^n\right).$$

Donc, sans perte de généralité, on peut supposer que $\left(L^p_\Omega\left(R^n\right), \left(|.|_{\omega_\alpha}\right)_{\alpha>\frac{n}{2}}\right)$ est une *a.l.m.c.* complète. Comme $K(R^n)$ est dense dans $L^1\left(R^n\right)$ et $K(R^n) \subset L^p_\Omega\left(R^n\right) \subset L^1\left(R^n\right)$, pour $\alpha > \frac{n}{2}$, le spectre global $\mathcal{M}\left(L^p_\Omega\left(R^n\right)\right)$, de $L^p_\Omega\left(R^n\right)$, est homéomorphe à R^n. Plus précisément, comme pour $L^1\left(R^n\right)$, à tout caractère continu non nul de χ, de $L^p_\Omega\left(R^n\right)$, correspond un unique $t \in R^n$ tel que $\chi(f) = \mathcal{F}f(t)$, où $\mathcal{F}f$ est la transformée de Fourier de f.

Références

[1] R. Arens, Dense inverse limit rings, Michigan Math. J. 5 (1958), 169-182.

[2] A. Benazzouz. Contribution à l'analyse harmonique des algèbres de Beurling généralisées, Thèse de 3éme cycle, Faculté des sciences de Rabat (1984).

[3] A. Mallios. Topological algebras, Selected topics, North -Holland, Amsterdam, 1986.

[4] E. A. Michael, Locally multiplicatively convex topological algebras, Memoirs Amer. Math. Soc. 11 (1952).

Ecole Normale Supérieure,
B. P. 5118-Takaddoum,
10105 Rabat, Maroc.