

Allgemeine Z. P. I.-Ringe.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 18. Mai 1940.)

In der allgemeinen Idealtheorie der kommutativen Ringe ist es bekanntlich eine grund-legende Frage, in wie weit der einfache Zerlegungssatz in Primideale (Z. P. I.),⁽¹⁾ der etwa im Bereich der ganzen Zahlen gilt, sich auf allgemeinere kommutative Ringe übertragen lässt. Zu dieser Frage haben die Untersuchungen von Herren M. Sono,⁽²⁾ E. Noether,⁽³⁾ W. Krull,⁽⁴⁾ u. a. schon sehr bemerkenswerte Resultate geliefert. Leider stützen alle diese Untersuchungen sich auf Grund der Voraussetzung, dass der zugrunde gelegte Ring ein O-Ring mit Einheitselement ist. Aber vor kurzem hat K. Kubo⁽⁵⁾ erst die angedeutete Frage zum Abschluss gebracht.

In der vorliegenden Arbeit sollen die wichtigen Struktursätze der Ringe (der allgemeinen Z. P. I.-Ringe), in denen die Eindeutigkeit für die Zerlegung in Primideale nicht vorausgesetzt wird, und die Theorie, welche alle obig angedeuteten Ergebnisse als einen speziellen Fall umfasst, stichhaltig untersucht werden. Zu diesem Zwecke dürfen wir niemals irgendwelche besondere Annahme über die zugrunde gelegten Ringe machen. Damit wird die Existenz des Einheitselementes hinfällig und die Nullteiler treten in die Grundringe frei ein. Mit dieser Tatsache würde unsere Untersuchung ungeheuer schwerfällig. Ich möchte in der Theorie der Ringe ohne Einheits-element, die seit beinahe zehn Jahren in meiner Arbeiten entwickelt wird,

(1) Zerlegungssatz in Primideale: Im Integritätsbereich $\mathfrak{S}$ der ganzen Zahlen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers kann jedes Ideal eindeutig als Produkt von Potenzen endlich vieler Primideale dargestellt werden.

(2) M. Sono, On Congruences. II., Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. **3** (1918), 113.

(3) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Ann., **96** (1926), 26.

Um aus der eindeutigen Zerlegung in Primideale ihre fünf Axiome zu erschliessen, ist folgende Bedingung vorausgesetzt:

Bedingung. Die Primideale in $\mathfrak{R}$ besitzen keinen von $\mathfrak{R}$ verschiedenen echten Teiler und umgekehrt sind alle Ideale, die keinen von $\mathfrak{R}$ verschiedenen Teiler besitzen, prim.

In Z. P. I.-Ringe ist aber diese Voraussetzung von Noether nur eine einfache Umformung der Voraussetzung des 0-Satzes, wie wir aus Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ leicht sehen können.

Beim Beweise von E. Noether wird die Existenz des Einheitselementes offenbar vorausgesetzt.

(4) W. Krull, Idealtheorie (1935), 12, 86. W. Krull, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. I, Heft 5, 28.

(5) K. Kubo, Über die Noetherschen fünf Axiome in kommutativen Ringen, dieses Jour. **10** (1940), 77.

einen Ausweg aus den entstandenen Schwierigkeit finden.

Um zu unserem Ziel zu gelangen werden wir folgendermassen vorgehen: Zuerst untersuchen wir die Eigenschaften der Primideale der allgemeinen Z. P. I.-Ringe: Zweitens bestimmen wir mit Hilfe dieser Eigenschaften die Struktur der in Rede stehenden allgemeinen Z. P. I.-Ringe. Dann werden die Bedingungen für die eineutige, oder nicht-eindeutige Produktzerlegung in Primideale gesucht. Nach dieser Anordnung des Beweisganges ist erstens bekannt, dass alle Ergebnisse der obig ausgesprochenen mehreren Untersuchungen aus dem Struktursatz der allgemeinen Z. P. I.-Ringe leicht folgen; zweitens, engster Zusammenhang zwischen allgemeinen Z. P. I.-Ringen und allgemeinen Multiplikationsringen; drittens, dass die Bedingung für Eindeutigkeit der Produktzerlegung in Primideale nur eine triviale Folge der Untersuchung der allgemeinen Z. P. I.-Ringe und nicht grundlegend ist.

Für das Folgende erinnern wir an die zugrunde liegenden Definitionen:

Ring $\mathfrak{R}$ bedeutet einen *kommutativen Ring*, in dem keine andere Bedingung vorausgesetzt wird.

Ein Ring $\mathfrak{R}$, für dessen Ideale die eindeutige Zerlegung in Primideale gilt, heisst „*Z. P. I.-Ring*“.

Ein Ring $\mathfrak{R}$, in dem jedes Ideal als Produkt von Potenzen endlich vieler Primideale dargestellt werden kann, heisst „*allgemeiner Z. P. I.-Ring*“.

Aufstellung von Hilfssätzen.

Es ist für das Folgende zweckmässig, zwei für den Beweis unseres Hauptsatzes sehr bequeme Sätze vorzuschicken:

Satz I. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring ohne Nullteiler, in welchem jedes Hauptideal als Produkt von Potenzen endlich vieler Primideale dargestellt werden kann. Dann ist jedes vom Einheitsideal⁽¹⁾ und (0) verschiedene Hauptideal als Produkt von Potenzen endlich vieler in $\mathfrak{R}$ minimaler Primideale darstellbar.⁽²⁾*

Es sei p ein beliebiges vom Einheitsselement und Nullelement verschiedenes Element aus $\mathfrak{R}$. Dann ist nach unserer Voraussetzung $(p) = p^k p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m} = p a$ und daher folgt

$$(1) \quad \mathfrak{R}(p) = \mathfrak{R} p^k p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m} = p a_1, \quad a_1 = \mathfrak{R} a.$$

Erstens sei p von $\mathfrak{R}$ verschieden. Ferner nehmen wir an, dass p ein echter Primideal-teiler eines Primideals $p' (\neq (0))$ ist. Wählen wir aus p'

(1) Unter „*Einheitsideal*“ verstehen wir den zugrunde gelegten Ring $\mathfrak{R}$, wenn $\mathfrak{R}$ das Einheitsselement besitzt. Wenn $\mathfrak{R}$ aber kein Einheitsselement hat, so brauchen wir nicht diese Bezeichnungsweise.

(2) Für den Fall, dass $\mathfrak{R}$ das Einheitsselement enthält, ist ein einfacher Beweis gegeben. Vgl. S. Mori, Zerlegung der Hauptideale aus Polynomringen in minimale Primideale. II, dieses Jour. 9 (1939), 5.

irgendein von Null verschiedenes Element p' , so wird nach unserer Voraussetzung auch

$$(2) \quad (p') = p''\alpha'' \quad (0) < p'' \subseteq p' < p.$$

Aus (1) folgt damit

$$(3) \quad (p)\alpha' = p''\mathfrak{p}_1,$$

wobei α' ein Ideal von $\mathfrak{R}$ bedeutet. Multiplizieren wir (3) mit p , so ergibt sich aus (1)

$$(4) \quad (p)pa' = (p)\mathfrak{R}p'', \quad pa' = \mathfrak{R}p'' \subseteq p'',$$

da $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler besitzt. Nach (2) muss damit $\alpha' \subseteq p''$ sein, und daraus folgt

$$(5) \quad \mathfrak{R}p'' \supseteq pp'' \supseteq pa'.$$

Aus (4) und (5) erhalten wir unmittelbar

$$(6) \quad \mathfrak{R}p'' = pp''.$$

Multiplizieren wir (6) mit α'' , so ergibt sich aus (2)

$$\mathfrak{R}(p') = p(p'), \quad \mathfrak{R} = p,$$

da $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler besitzt. Dies widerspricht unserer Annahme $\mathfrak{R} \neq p$. Also muss p minimal in $\mathfrak{R}$ sein.

Zweitens sei $\mathfrak{R} = p$. Ist $\mathfrak{R}(p) = (p)$, so wird $ep = p$ für ein Element e aus $\mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler besitzt, so folgt daraus $ea = a$ für jedes Element a aus $\mathfrak{R}$. Also ist e das Einheitsselement von $\mathfrak{R}$, und nach unserer Annahme muss $e \neq p$ sein. Damit können wir $\mathfrak{R}$ aus der Produktdarstellung von (p) weglassen, und folglich (p) als Produkt von Potenzen endlich vieler von $\mathfrak{R}$ verschiedener Primideale darstellen.

Drittens sei $\mathfrak{R} = p$, $\mathfrak{R}(p) \neq (p)$. Ist $\mathfrak{R}$ ein echter Teiler eines Primideals $p' (\neq (0))$, so ergibt sich ganz genau wie beim vorigen Falle $(p') = p''\alpha''$, $(0) < p'' \subseteq p' < \mathfrak{R}$ für irgendein von Null verschiedenes Element p' aus p' , und dabei ist p'' ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal. Wenn $\mathfrak{R}p'' = p''$ wäre, so folgte $\mathfrak{R}(p') = (p')$ und daraus ein Widerspruch $\mathfrak{R}(p) = (p)$, da $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler besitzt. Damit muss $\mathfrak{R}p'' < p''$ sein. Wählen wir danach ein durch $\mathfrak{R}p''$ unteilbares Element p'' aus p'' , so muss nach unserer Voraussetzung $(p'') = p''$ sein. Aus $(p) = \mathfrak{R}^k p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$, wo alle p_i ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal sind, folgt damit $(p) = \mathfrak{R}^k(a)$ für ein Element a aus $\mathfrak{R}$. Daraus ergibt sich $p = r_k a$ für ein Element r_k aus $\mathfrak{R}^k$ und ferner aus $(r_k a) = \mathfrak{R}^k(a)$ folgt $(r_k) = \mathfrak{R}^k$. Da aus $\mathfrak{R}(p) \neq (p)$ die Ungleichung $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}^2$ folgt, können wir ein Element r finden, so dass $r < \mathfrak{R}$, $r \not\subseteq \mathfrak{R}^2$ ist. Dann muss $(r) = \mathfrak{R}$, oder $(r) = p''' \neq \mathfrak{R}$ sein, dabei ist p''' ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal. Im ersten Falle ist $(p'') = p''$, $p'' = r(a + r')$, wo a eine ganze Zahl und r' ein

Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Daraus folgt $p''^2 = (p'')^2 = r(r(\alpha + r')(\alpha + r')) = \mathfrak{R}(p''(\alpha + r')) = \mathfrak{R}p''p_1 \dots p_n$, $p'' = \mathfrak{R}p_1 \dots p_n$. Dies ist offenbar unmöglich. Im zweiten Falle ist $p'''^k = (r)^k = (r_k(\beta + r''))$, $r^k = r_k(\beta + r'')$, wo β eine ganze Zahl und r'' ein Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet, und daraus folgt auch $p'''^{k+1} = (r_k)(r(\beta + r'')) = \mathfrak{R}^k p'''p_1 p_2 \dots p_m$. Also erhalten wir $p'''^k = \mathfrak{R}^k p_1 p_2 \dots p_m$; dies ist auch unmöglich. Aus diesen Tatsachen erhalten wir, dass $\mathfrak{R}$ kein Primideal ausser $\mathfrak{R}$ und (0) besitzt, wenn $\mathfrak{R} = p$, $\mathfrak{R}(p) \neq (p)$ ist.

Zusammenfassend haben wir also den im Rede stehenden Satz erreicht.

Zur Eindeutigkeit der Produkt-darstellung eines Hauptideals gilt der folgende

Satz 2. Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring ohne Nullteiler, in dem jedes Hauptideal als Produkt von Potenzen endlich vieler Primideale darstellbar ist. Dann ist die Produkt-darstellung eines vom Einheitsideal und Nullideal verschiedenen Hauptideals als ein Produkt von Potenzen endlich vieler in $\mathfrak{R}$ minimaler Primideale eindeutig bestimmt.

Nach dem Beweise des vorigen Satzes gilt für die Produkt-darstellung eines vom Einheitsideal und Nullideal verschiedenen Hauptideals (p) als Produkt von Potenzen endlich vieler in $\mathfrak{R}$ minimaler Primideale die Formel

$$(p) = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n} \quad \text{oder} \quad (p) = \mathfrak{R}^k,$$

wobei p_i ein in $\mathfrak{R}$ minimales, von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal bedeutet.

Im ersten Falle sei $(p) = p_1^{k'_1} p_2^{k'_2} \dots p_{n'}^{k'_{n'}}$ eine andere Darstellung als Produkt von Potenzen der in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideale p'_i . Dann muss jedes Primideal p'_i von $\mathfrak{R}$ verschieden sein. Aus $(p) = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} = p_1^{k'_1} \dots p_{n'}^{k'_{n'}}$ folgt damit $n = n'$, $p_1 = p'_1$, $p_2 = p'_2$, $\dots$, $p_n = p'_n$ und daher erhalten wir

$$(p) = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} = p_1^{k'_1} \dots p_n^{k'_n}.$$

Es sei nun k'_i das kleiner von k_i und k'_i ($i = 1, 2, \dots, n$), dann wird

$$(1) \quad (p) = p_1^{k_1 - k'_1} \dots p_n^{k_n - k'_n} p_1^{k'_1} \dots p_n^{k'_n} = p_1^{k'_1 - k'_1} \dots p_n^{k'_n - k'_n} p_1^{k'_1} \dots p_n^{k'_n}.$$

Wenn $k_1 - k'_1 \neq 0$ wäre, so würde $k'_1 - k'_1 = 0$ und durch Multiplikation mit $p_2^{k'_2 - k'_2} \dots p_n^{k'_n - k'_n}$ folgte aus (1)

$$(p) p_1^{k_1 - k'_1} p_2^{k'_2 - k'_2} \dots p_n^{k'_n - k'_n} = (p) p_2^{k'_2 - k'_2} \dots p_n^{k'_n - k'_n}.$$

Da $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler besitzt, hätten wir daraus einen Widerspruch

$$(r) p_1^{k_1 - k'_1} p_2^{k'_2 - k'_2} \dots p_n^{k'_n - k'_n} = (r) p_2^{k'_2 - k'_2} \dots p_n^{k'_n - k'_n} \quad k_1 - k'_1 \neq 0,$$

für ein durch p_1 unteilbares Element r aus $\mathfrak{R}$. Damit muss $k_1 = k'_1$ sein. Auf solche Weise können wir leicht $k_2 = k'_2, \dots, k_n = k'_n$ beweisen.

Im zweiten Falle gibt es in $\mathfrak{R}$ kein von $\mathfrak{R}$ und (0) verschiedenes Primideal. Hiermit nehmen wir $(p) = \mathfrak{R}^k = \mathfrak{R}^{k+l}$, $l > 0$ an. Dann wird $\mathfrak{R}^l(p) = (p)$, und folglich $rp = p$ für ein Element r aus $\mathfrak{R}$. Danach muss r das Einheits-element von $\mathfrak{R}$ und $(r) = (p)$ sein. Dies widerspricht unserer Voraussetzung, dass (p) kein Einheitsideal ist. Damit muss $l = 0$, und folglich die Darstellung von (p) als Produkt von Potenzen endlich vieler, in $\mathfrak{R}$ minimaler Primideale eindeutig sein.

Haupteigenschaften der allgemeinen Z. P. I.-Ringe.

Ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$, in dem die Existenz des Einheitselementes nicht vorausgesetzt wird, heiße „*allgemeiner Z. P. I.-Ring*“, wenn in ihm die folgende Bedingung erfüllt ist:⁽¹⁾

In $\mathfrak{R}$ kann jedes Ideal (ohne jede Ausnahme) als Produkt von Potenzen endlich vieler Primideale (einschliesslich $\mathfrak{R}$ und (0)) dargestellt werden.

Da wir im Ring $\mathfrak{R}$ keine Existenz des Einheitselementes annehmen, so soll in dieser Note unter einem „*Z. P. I.-Ring*“ ein Z. P. I.-Ring im Sinne von W. Krull, in dem die Existenz des Einheitselementes nicht vorausgesetzt wird, verstanden werden.

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring. Dann wird $\mathfrak{p}'\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p}'$ ein beliebiger echter Primideal-teiler (einschl. $\mathfrak{R} = \mathfrak{p}'$) eines Primideals $\mathfrak{p}$ und der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ kein Körper ist.*

Da $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring ist, lässt jedes Hauptideal im Restklassenring $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ sich als Produkt von Potenzen endlich vieler Primideale aus $\overline{\mathfrak{R}}$ darstellen. Nun müssen wir zwei verschiedene Fälle unterscheiden:

I. $\overline{\mathfrak{R}}$ besitze ein von $\overline{\mathfrak{R}}$ und (0) verschiedenes Primideal. Dann wird

$$(1) \quad (\bar{p}) + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^{k_1} \dots \mathfrak{p}_n^{k_n}$$

für ein von Null und Einheits-element verschiedenes Element $\bar{p}$ aus $\overline{\mathfrak{R}}$. Dabei können wir nach der obigen Voraussetzung annehmen, dass wenigstens eines aus $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ von $\mathfrak{R}$ verschieden ist. Verstehen wir unter $\bar{\mathfrak{p}}_i$ das dem Primideal $\bar{\mathfrak{p}}_i$ entsprechende Primideal aus $\overline{\mathfrak{R}}$, so erhalten wir in $\overline{\mathfrak{R}}$

$$(2) \quad (\bar{p}) = \bar{\mathfrak{p}}_1^{k_1} \dots \bar{\mathfrak{p}}_n^{k_n}.$$

Da wenigstens eines aus $\bar{\mathfrak{p}}, \dots, \bar{\mathfrak{p}}_n$ von $\overline{\mathfrak{R}}$ verschieden ist, können wir nach dem Beweise von Satz I behaupten, dass alle $\bar{\mathfrak{p}}_i$ von $\overline{\mathfrak{R}}$ verschieden und in $\overline{\mathfrak{R}}$ minimal sind. Folglich können wir auch voraussetzen, dass in (1) alle Primideale $\mathfrak{p}_i$ von $\mathfrak{R}$ verschieden sind. Auf gleicher Weise können wir auch voraussetzen, dass in der Darstellung

(1) Für die Definition von Z. P. I.-Ring braucht W. Krull die Eindeutigkeit der Produktdarstellung, aber ich setze keine Bedingung von Eindeutigkeit voraus. Vgl. W. Krull, *Enzyklopädie der Math. Wissenschaften*. I, Heft 5, 27.

$$(3) \quad (\bar{p}^2) + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1'^{l_1} \dots \mathfrak{p}_m'^{l_m}, \quad (\bar{p}^2) = \bar{\mathfrak{p}}_1'^{l_1} \dots \bar{\mathfrak{p}}_m'^{l_m}$$

alle Primideale $\mathfrak{p}_i'$ von $\mathfrak{R}$ verschieden sind. Ferner sind alle $\bar{\mathfrak{p}}_i'$ von $\bar{\mathfrak{R}}$ verschieden und in $\bar{\mathfrak{R}}$ minimal. Aus (2) und (3) folgt nach Satz 2

$$(4) \quad \bar{\mathfrak{p}}_1 = \bar{\mathfrak{p}}_1', \dots, \bar{\mathfrak{p}}_n = \bar{\mathfrak{p}}_n', \quad n = m, \quad l_1 = 2k_1, \dots, l_n = 2k_n.$$

Nach (1), (3) und (4) erhalten wir

$$(5) \quad ((\bar{p}) + \mathfrak{p})^2 = (\bar{p}^2) + \mathfrak{p}.$$

Ist p ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}$, so folgt aus (5) $p - r\bar{p} \in \mathfrak{p}^2$, wo r ein Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Da $\bar{p}$ durch $\mathfrak{p}$ unteilbar ist, muss danach $r \in \mathfrak{p}$ sein. Damit erhalten wir $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}((\bar{p}) + \mathfrak{p})$, also $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Da $\bar{\mathfrak{p}}_i$ ein in $\bar{\mathfrak{R}}$ minimales Primideal ist, gibt es kein Primideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_i$ und daher folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ für jeden echten Primideal-teiler $\mathfrak{p}'$ (einschl. $\mathfrak{R} = \mathfrak{p}'$) von $\mathfrak{p}$, weil wir in (1) $(\bar{p}) + \mathfrak{p}$ als ein durch $\mathfrak{p}'$ teilbares Ideal betrachten dürfen.

II. $\bar{\mathfrak{R}}$ besitze kein Primideal ausser $\bar{\mathfrak{R}}$ und (0). Dann ist $(\bar{r}) = \bar{\mathfrak{R}}$ und daher $(\bar{r}) + \mathfrak{p} = \mathfrak{R}$ für ein Element $\bar{r}$ aus $\bar{\mathfrak{R}}$. Denn, da für ein beliebiges von Null verschiedenes Element $\bar{r}'$ $(\bar{r}') = \bar{\mathfrak{R}}^l$ und $\bar{\mathfrak{R}}$ kein Körper ist, so muss $\bar{\mathfrak{R}}^n \neq \bar{\mathfrak{R}}^{n+1}$ für jede n sein. Wählen wir in $\bar{\mathfrak{R}}$ damit ein durch $\bar{\mathfrak{R}}^2$ unteilbares Element $\bar{r}$, so wird offenbar $(\bar{r}) = \bar{\mathfrak{R}}$. Andererseits erhalten wir auch nach dem Beweise von Satz I

$$(\bar{r}^2) = \bar{\mathfrak{R}}^k, \quad (\bar{r}^2) + \mathfrak{p} = \mathfrak{R}^k,$$

da $\bar{\mathfrak{R}}$ kein Primideal ausser $\bar{\mathfrak{R}}$ und (0) besitzt. Hier ist $(\bar{r}^2) \neq \bar{\mathfrak{R}}$ und daher nach Satz 2 folgt

$$k = 2, \quad ((\bar{r}) + \mathfrak{p})^2 = (\bar{r}^2) + \mathfrak{p}.$$

Daraus erhalten wir ganz genau wie beim ersten Falle $\mathfrak{R}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$.

Auf Grund von Satz 3 ergibt sich mühelos

Satz 4. Ist $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring und ist $\mathfrak{p}$ ein von (0) verschiedenes Primideal, so ist der Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ einartig.⁽¹⁾

Besitzt $\mathfrak{p}$ keinen echten Primideal-teiler ausser $\mathfrak{R}$, so ist unsere Behauptung schon einleuchtend. Im anderen Falle sei $\mathfrak{p}'$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedener echter Primideal-teiler von $\mathfrak{p}$. Ist $\bar{p}'$ ein von 0 verschiedenes Element aus $\bar{\mathfrak{p}}'$, so wird $(\bar{p}') = \bar{\mathfrak{p}}''^k \bar{\mathfrak{p}}_1'^{k_1} \dots \bar{\mathfrak{p}}_m'^{k_m}$ in $\bar{\mathfrak{R}}$ und für das $\bar{\mathfrak{p}}''$ entsprechen-

(1) Ein Ring $\mathfrak{R}$ heisst „einartig“, wenn in $\mathfrak{R}$ kein Primideal (ausser $\mathfrak{R}$) Oberideal eines anderen vom Nullideal verschiedenen Primideals ist. Vgl. W. Krull, *Idealtheorie*, 22. Bei Krull bedeutet $\mathfrak{R}$ einen Ring mit Einheitsselement. Aber in unserem Fall ist keine Existenz des Einheitselementes vorausgesetzt.

ende Primideal p'' aus $\mathfrak{R}$ gilt $p' \supseteq p'' \supset p$. Wenn $p' \supset p''$ ist, so folgt nach Satz 3

$$p'p'' = p'', \quad p''p = p, \quad p'p = p.$$

Danach ist im Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}}$

$$\bar{p}'\bar{p}'' = \bar{p}'' \quad \text{also} \quad \bar{p}'(\bar{p}') = (\bar{p}').$$

Da $\bar{\mathfrak{R}}$ keinen Nullteiler besitzt, ergibt sich daraus ein Widerspruch $\bar{p}' = \bar{\mathfrak{R}}$. Nämlich es muss $p' = p''$ sein und folglich gibt es nach Satz 1 kein Primideal zwischen p' und p . Aus dieser Tatsache folgt leicht unsere Behauptung.

Nun sind wir in der Lage, den Fall, in dem $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/p$ ein Körper ist, zu untersuchen:

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring. Ist der Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/p$ durch ein Primideal p ein Körper und $\mathfrak{R}p \neq p$, so existiert kein echtes Zwischenideal zwischen p und p^2 und es wird $\mathfrak{R} = m + p$, wobei m einen Körper bedeutet.*

Aus $p \supseteq \mathfrak{R}p \supseteq p^2$ und $\mathfrak{R}p \neq p$ folgt leicht $p \neq p^2$. Da $\bar{\mathfrak{R}}$ das Einheits-element $\bar{e}$ besitzt, so wird $\bar{e} - \bar{e}^4 = 0$ in $\bar{\mathfrak{R}}$. Im Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/p^2$ ist daher $(\bar{e} - \bar{e}^4)^2 = 0$, $\bar{e}^2 = \bar{e}^4\bar{r}$, $\bar{e}^2\bar{r} = (\bar{e}^2\bar{r})^2$. Setzen wir $\bar{e} = \bar{e}^2\bar{r}$, so wird $\bar{e} = \bar{e}^2 \neq 0$ in $\bar{\mathfrak{R}}$ und daher folgt

$$(1) \quad \bar{\mathfrak{R}} = \bar{m} + \bar{n}, \quad \bar{m} = \bar{m}^2 \neq (0), \quad \bar{n} \neq (0), \quad \bar{n}^2 = (0), \quad \bar{n} + p^2 \subseteq p,$$

da $\mathfrak{R}p \neq p$, $p \neq p^2$ ist. Wäre $\bar{n} + p^2 \subset p$, so sollte nach (1) $\bar{m}_1 = \bar{m} \cap \bar{p} \neq (0)$ in $\bar{\mathfrak{R}}$ und $\bar{n} + p^2 = \mathfrak{R}^k p$ $k \geq 1$ sein, da $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring ist. Aus (1) folgte damit ein Widerspruch $\bar{n} + p^2 = \bar{m}_1 + p^2$. Also muss $\bar{n} + p^2 = p$ nämlich $\mathfrak{R}p = p^2$ sein. Nach den Eigenschaften des allgemeinen Z. P. I.-Ringes $\mathfrak{R}$ gibt es damit kein Zwischenideal zwischen p und p^2 .

Zum Beweise des zweiten Teils obigen Satzes nehmen wir nun nach Satz 4 an, dass p ein echter Teiler eines Primideals p' ist, und dass kein echtes Primideal zwischen p und p' existiert. Dann ist $(p) + p' = p^k p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ ($k \geq 1$) für ein durch p' unteilbares Element p aus p und aus $\mathfrak{R}p = p^2$ folgt $\mathfrak{R}((p) + p') = p^{k+1} p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} = p((p) + p')$. Für ein durch p unteilbares Element r aus $\mathfrak{R}$ ist danach $rp - p_1 p \subset p'$, $p_1 \subset p$. Also erhalten wir einen Widerspruch $r \subset p$. Damit muss p kein Teiler eines Primideals (einschl. (0)) sein und in $\mathfrak{R}$ ist (0) kein Primideal. Da $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring ist, folgt daher $(0) = p^k p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ ($k \geq 1$). Da $\mathfrak{R}/p$ aber ein Körper ist, so wird $r - r^{k+3} \subset p$ für ein durch p unteilbares Element r und daraus folgt

$$r(r - r^{k+3})^k = 0, \quad r^{k+1} = r^{2k+2} r' \not\subset p, \quad \text{wenn} \quad (0) = p^k \dots p_m^{k_m} \quad (m \geq 1) \quad \text{ist,}$$

$$(r - r^{k+3})^{k+1} = 0, \quad r^{k+1} = r^{2k+2} r' \not\subset p, \quad \text{wenn} \quad (0) = p^k \quad \text{ist.}$$

Setzen wir $e = r^{k+1} r'$ so ist $e = e^2$ und ferner

$$(2) \quad \mathfrak{R} = m + n, \quad m = m^2 \not\subseteq p,$$

wobei e das Einheitselement von m ist. Wäre $n = (0)$, so würde $\mathfrak{R}p = p$. Hiermit muss $n \neq (0)$, $n \subseteq p$ sein. Setzen wir $\delta = m \cap p$, so folgt aus $\mathfrak{R}p = p^2$ und (2)

$$(3) \quad \delta + n^2 = \delta^2 + n^2, \quad \delta = \delta^2.$$

Da aber jedes von p verschiedene Primideal das Ideal m enthält, muss $p^{k_1} p^{k_2} \dots p^{k_m}$ im Falle $m \geq 1$ auch δ enthalten und daraus folgt $\delta = (0)$. Im Falle $(0) = p^k$ muss δ nilpotent und nach (3) $\delta = (0)$ sein. Also erhalten wir schliesslich $\mathfrak{R} = m + p$, und dabei ist m ein Körper, da der Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/p$ ein Körper ist.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, die eingangs aufgestellten wichtigen Eigenschaften der allgemeinen Z. P. I.-Ringe zu erhärten:

Satz 6. *Ist $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring, so gibt es bei einem beliebigen Primideal p (einschl. $\mathfrak{R}$) kein echtes Zwischenideal zwischen p und p^2 . Ferner ist jede Potenz von p primär, wenn wir den Fall, in dem $\mathfrak{R}p = p^2 \neq p$ und $\mathfrak{R}/p$ ein Körper ist, ausnehmen.*

Erstens sei für ein Primideal p $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/p$ ein Körper. Ist $p = p^2$, so ist unsere Behauptung schon einleuchtend. Deshalb müssen wir den Fall $p \neq p^2$ untersuchen. Infolge dessen können wir nach dem Beweis von Satz 5 nur zwei verschiedene Fälle $\mathfrak{R}p = p$, $\mathfrak{R}p = p^2$ betrachten:

I. $\mathfrak{R}p = p$. Wäre α ein solches Ideal, dass $p \supset \alpha \supset p^2$ wäre, so müsste $\alpha = \mathfrak{R}^k p$ sein, da $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring ist. Aus $\mathfrak{R}p = p$ hätten wir damit einen Widerspruch $\alpha = p$. Es gibt damit kein echtes Zwischenideal zwischen p und p^2 . Danach erhalten wir aus $\mathfrak{R}p = p$

$$(1) \quad p = (p) + p^2 = (p)\mathfrak{R} + p^2.$$

Daraus folgt ohne weiteres

$$(2) \quad p^i = (p^i)\mathfrak{R} + p^{i+1} \quad \text{für jede ganze Zahl } i \geq 1.$$

Ist $p^{l-1} \neq p^l$, so muss $p^{k-1} \neq p^k$ für jede $k (\leq l)$ sein. Nun nehmen wir an, dass p^l nicht primär ist. Dann wird

$$p'r' \subset p^l, \quad r' \not\subset p, \quad p' \subset p^{k-1}, \quad p' \not\subset p^k \quad (k \leq l).$$

Da aus (2) für ein durch p unteilbares Element r $p' - p^{k-1}r \subset p^k$ ist, so erhalten wir daraus $p'r' - p^{k-1}rr' \subset p^k$, $rr' \not\subset p$. Da aber $\mathfrak{R}/p$ ein Körper ist, ergibt sich daraus ein Widerspruch $p^{k-1} = p^k$ ($k \leq l$). Also ist unsere Annahme falsch, dass p^l nicht primär ist.

II. $\mathfrak{R}p = p^2 \neq p$. Nach dem Beweise von Satz 5 ist $\mathfrak{R} = m + p$, wobei m ein Körper ist und ferner gibt es kein echtes Zwischenideal zwischen p und p^2 . Aber es ist möglich, dass eine Potenz von p nicht primär ist.

Zweitens sei der Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/p$ kein Körper und es gebe in

$\bar{\mathfrak{R}}$ kein Primideal ausser $\bar{\mathfrak{R}}$ und (0) . Dann ist nach Satz 3 $\mathfrak{R}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Folglich gibt es kein Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$. Ist $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$, so folgt daraus $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}) + \mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}^2$ und nach $\mathfrak{R}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ erhalten wir

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}r) + \mathfrak{p}^2 = (\mathfrak{p}rr') + \mathfrak{p}^2, \quad rr' \subsetneq \mathfrak{p}$$

für zwei passend gewählte Elemente r und r' . Daraus folgt

$$\mathfrak{p}r - \mathfrak{p}rr' \subsetneq \mathfrak{p}^2, \quad \mathfrak{p}(r - rr') \subsetneq \mathfrak{p}^2$$

Wenn $r - rr' \subsetneq \mathfrak{p}$ ist, so wird $(r - rr') + \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{R}^i$ ($i \geq 1$), da $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring ist. Aus $\mathfrak{R}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ folgt damit ein Widerspruch $\mathfrak{p} = \mathfrak{R}^i\mathfrak{p} = ((\mathfrak{p}) + \mathfrak{p}^2)((r - rr') + \mathfrak{p}^2) \subseteq \mathfrak{p}^2$. Wenn $r - rr' \subsetneq \mathfrak{p}$ ist, so folgt auch ein Widerspruch, dass $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ein Körper ist. Zusammenfassend ist unsere Annahme $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ falsch; also muss in diesem Fall $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ und folglich jede Potenz von $\mathfrak{p}$ primär sein.

Zuletzt sei $\mathfrak{p}'$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal und ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$. Dann ist nach Satz 3 $\mathfrak{p}'\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ und nach Satz 4 ist $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal. Da $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring ist, gibt es danach kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}^k$ und $\mathfrak{p}^{k+1}$ für jede k . Wenn $\mathfrak{p}^{k-1} \neq \mathfrak{p}^k$ ($k \geq 2$) ist, so folgt daraus $\mathfrak{p}^{k-1} = (\mathfrak{p}') + \mathfrak{p}^k$ für ein beliebiges Element $\mathfrak{p}'$ derart, dass $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}^{k-1}$, $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}^k$ ist. Wäre

$$\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}^l, \quad r \subsetneq \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}^{k-1}, \quad \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}^k \quad (l \geq k \geq 2),$$

so würden alle Primideale $\mathfrak{p}_i$ in der Darstellung $(r) + \mathfrak{p}^k = \mathfrak{p}_1^{k_1} \dots \mathfrak{p}_n^{k_n}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_i\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ ($i=1, \dots, n$). Durch Multiplikation mit $\mathfrak{p}^{k-1}$ hätten wir daraus einen Widerspruch $\mathfrak{p}^{k-1} = \mathfrak{p}^{k-1}((r) + \mathfrak{p}^k) = ((\mathfrak{p}') + \mathfrak{p}^k)((r) + \mathfrak{p}^k) \subseteq \mathfrak{p}^k$. Damit muss jede Potenz von $\mathfrak{p}$ primär sein.

Schliesslich müssen wir noch bemerken, dass kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{R}^i$ und $\mathfrak{R}^{i+1}$ auch existiert. Dies ist aber ganz klar und unser Satz ist bewiesen.

Satz 7. Ist $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring, so gilt in $\mathfrak{R}$ der Teilerkettensatz.

Es sei $\alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \alpha_3 \subset \dots$ eine Teilerkette von Idealen aus $\mathfrak{R}$. Dann ist nach der Eigenschaft von allgemeinem Z. P. I.-Ring

$$(1) \quad \alpha_1 = \mathfrak{R}^a \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \mathfrak{p}_2^{\alpha_2} \dots \mathfrak{p}_n^{\alpha_n}.$$

Dabei können wir nach Satz 3 annehmen, dass die von $\mathfrak{R}$ verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n$ durch einander unteilbar sind. Hier müssen wir zwei verschiedene Fälle unterscheiden:

I. Für alle Primideale $\mathfrak{p}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) seien $\mathfrak{R}\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i$. Dann wird nach (1)

$$(2) \quad \alpha_1 = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \dots \mathfrak{p}_s^{\alpha_s} \dots \mathfrak{p}_n^{\alpha_n}$$

und jede Potenz $p_i^{a_i}$ ist nach Satz 6 primär. Sind $a_1, \dots, a_s, \dots, a_n$ die kleinsten Potenzen in solcher Darstellung von α_1 wie (2), so ist damit die Darstellung (2) mit dieser Bedingung eindeutig. In gleicher Weise erhalten wir

$$(3) \quad \alpha_2 = p_1^{a'_1} \dots p_{s'}^{a'_{s'}} \dots p_{n'}^{a'_{n'}} \quad \text{oder} \quad \alpha_2 = \mathfrak{R}^{a'},$$

wo p' von $\mathfrak{R}$ verschieden und durch einander unteilbar und $\mathfrak{R}p'_i = p'_i$ ($i=1, \dots, n'$) sind. Denn, wenn $\mathfrak{R}/p'_1$ kein Körper ist, so wird nach Satz 3 $\mathfrak{R}p'_1 = p_1^2$. Wäre $\mathfrak{R}/p'_1$ ein Körper und $\mathfrak{R}p'_1 = p_1^2 \neq p_1$, so würde nach Satz 5 $\mathfrak{R} = m + p'_1$ und m wäre ein Körper. Dabei wäre p'_1 kein echter Teiler eines Primideals aus $\mathfrak{R}$ und folglich müsste aus $\alpha_1 < \alpha_2$ etwa $p_1 = p'_1$ sein. Nun ist aber ein Widerspruch da. Damit müssen $\mathfrak{R}p'_i = p'_i$ für alle Primideale p'_i ($i=1, 2, \dots, n'$) sein. Also können wir damit ganz genau wie beim obigen Falle hier auch annehmen, dass in (3) $a'_1, a'_2, \dots, a'_{n'}$ die kleinsten Potenzen in solcher Darstellung von α_2 wie (3) bedeuten. Ferner ist nach Satz 6 jede Potenz $p_i^{a'_i}$ primär. Sind $p_1, \dots, p_s; p'_1, \dots, p'_{s'}$ alle in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideale in den Darstellungen (2) und (3), so erhalten wir aus $\alpha_1 < \alpha_2$

$$s \geq s', \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s \geq \alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_{s'}.$$

Wenn $s = s'$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_{s'}$ ist, so muss $p_1 = p'_1 \dots p_s = p'_{s'}$, $\alpha_2 = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s} p_{s+1}^{a'_{s+1}} \dots p_{n'}^{a'_{n'}}$ sein. Da p'_i durch einander unteilbar und $p_i^{a'_i}$ primär sind, so muss nach Satz 4 jedes p'_j ($j=1, 2, \dots, n'$) unter den Primidealen $p_{s+1}, \dots, p_n$ vorkommen. Aus $\alpha_1 < \alpha_2$ folgt damit $a_{s+1} + \dots + a_n > a'_{s+1} + \dots + a'_{n'}$. Aus dieser Tatsache können wir leicht behaupten, dass die Teilerkette $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$ im Endlichen abbrechen muss.

II. Für die Primideale p_i ($i=1, 2, \dots, s$) $s \geq 1$ seien $\mathfrak{R}p_i = p_i^2 \neq p_i$ ($i=1, 2, \dots, s$). Dann ist nach Sätzen 3 und 5

$$\mathfrak{R} = m_i + p_i \quad (i=1, 2, \dots, s),$$

wo m_i einen Körper bedeutet. Daher erhalten wir leicht nach (1)

$$(4) \quad \mathfrak{R} = m_1 + \dots + m_s + \mathfrak{d}, \quad \mathfrak{d} = p_1 \cap p_2 \cap \dots \cap p_s \neq (0), \quad \mathfrak{d} \neq \mathfrak{d}^2,$$

$$\alpha_1 = \mathfrak{d}^{a+a_1+\dots+a_s} p_{s+1}^{a_{s+1}} \dots p_n^{a_n}.$$

Setzen wir $p_j \cap \mathfrak{d} = \bar{p}_j$ ($j=s+1, \dots, n$), so ergibt sich daraus

$$(4) \quad \alpha_1 = \mathfrak{d}^{a+a_1+\dots+a_s} \bar{p}_{s+1}^{a_{s+1}} \dots \bar{p}_n^{a_n}$$

und $\bar{p}_j$ ist ein von $\mathfrak{d}$ verschiedenes Primideal aus dem Ring $\mathfrak{d}$. Aber aus der allgemeinen Z. P. I.-Eigenschaft von $\mathfrak{R}$ folgt unmittelbar, dass $\mathfrak{d}$ auch ein allgemeiner Z. P. I.-Ring sein muss.⁽¹⁾ Wäre $\mathfrak{d}/\bar{p}_{s+1}$ ein Körper und

(1) Aus (4) können wir leicht erkennen, dass $s=1$ sein muss, da $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{d}^2$ und $\mathfrak{d}$ als ein Produkt von Potenzen endlich vieler Primideale aus $\mathfrak{R}$ darstellbar ist.

$\delta \bar{p}_{s+1} = \bar{p}_{s+1}^2 \neq \bar{p}_{s+1}$, so würde nach Satz 5 auch $\delta = m_{s+1} + \bar{p}_{s+1}$ und daher folgte ein Widerspruch $\Re \bar{p}_{s+1} = \bar{p}_{s+1}^2 \neq \bar{p}_{s+1}$. Aus (5) folgt damit nach Satz 3

$$a_1 = \bar{p}_{s+1}^{a_{s+1}} \dots \bar{p}_n^{a_n}$$

und dabei dürfen wir annehmen, dass $\bar{p}_{s+1}, \dots, \bar{p}_n$ durch einander unteilbar sind. Setzen wir nun $\bar{a}_i = a_i \cap \delta$, so wird $\bar{a}_2 \supseteq a_1$ und $\bar{a}_2 = \bar{p}_{s'+1}^{a_{s'+1}} \dots \bar{p}_n^{a_n}$. Auf gleicher Weise wie beim vorigen Falle muss die Teilerkette $a_1 < \bar{a}_2 < \dots$ im Endlichen abbrechen. Da aber alle $m_1, m_2, \dots, m_s$ Körper sind, so muss die Teilerkette $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ auch im Endlichen abbrechen.

Die bisher durchgeführten Betrachtungen geben uns die Möglichkeit, die notwendigen Bedingungen für einen allgemeinen Z. P. I.-Ring anzugeben. Zu diesem Zwecke wollen wir nun festsetzen:

Definition. Ist der Restklassenring $\Re/\mathfrak{p}$ nach ein Ideal $\mathfrak{p}$ aus $\Re$ ein Körper (nicht Nullkörper), so heisst $\mathfrak{p}$ ein „Primmaximalideal“ aus $\Re$.⁽¹⁾

Stellen wir unsere Ergebnisse zusammen, so haben wir als das Ziel dieses Abschnitts:

Satz 8. Ist $\Re$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring, so sind in $\Re$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. In $\Re$ gilt der Teilerkettensatz.
2. Für jedes Primmaximalideal $\mathfrak{p}$ aus $\Re$ existiert kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.
3. Kein echtes Zwischenideal existiert zwischen $\Re$ und $\Re^2$.

Struktur der O-Ringe, in denen bei keinem Primmaximalideal $\mathfrak{p}$ zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ kein echtes Zwischenideal existiert.

Ein kommutativer Ring, in dem die Existenz des Einheitslements nicht vorausgesetzt wird, heisst „0-Ring“ oder „Ring mit Maximalbedingung“, wenn in ihm jedes Ideal eine endliche Basis besitzt.

Nun ist unser Ziel dieses Abschnitts der Nachweis des Satzes:

Satz 9. Es sei $\Re$ ein 0-Ring, in dem bei keinem Primmaximalideal $\mathfrak{p}$ zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ ein echtes Zwischenideal und auch kein Ideal zwischen $\Re$ und $\Re^2$ existiert. Dann hat $\Re$ die Eigenschaft, dass

I. im Falle $\Re = \Re^2$

$$\Re = \Re_1 + \Re_2 + \dots + \Re_n,$$

wobei $\Re_i$ einen Körper oder einen direkt unzerlegbaren einartigen O-Ring mit Einheitslement bedeutet und ferner in $\Re_i$ bei keinem Primmaximalideal $\mathfrak{p}_i$ zwischen $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_i^2$ ein echtes Zwischenideal existiert.

(1) In der Sonoschen Ausdrucksweise sind die Primmaximalideale je nach den Umständen „maximale Ideale erster Art“ oder „maximal ideals of the first kind“. M. Sono, On the reduction of Ideals, Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. A, 7 (1924).

II. im Falle $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}^2$,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_k + \mathfrak{m},$$

wobei $\mathfrak{R}_i$ ein Körper und $\mathfrak{m}$ ein direkt unzerlegbarer 0-Ring ohne Einheits-
element bedeutet, und $\mathfrak{m}$ ein einziges, von (0) verschiedenes Primideal $\mathfrak{m}$
besitzt, bei dem kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^2$ existiert.

Erstens sei $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^2$. Dann existiert in $\mathfrak{R}$ das Einheits-
element e , da $\mathfrak{R}$ ein 0-Ring ist.⁽¹⁾ Hier müssen wir noch zwei verschiedene Fälle unter-
scheiden:

I. Es sei $\mathfrak{R}$ einartig. Dann wird nach der Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ und
nach dem in der Fussnote gezeichneten Satz⁽²⁾

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_n,$$

wobei jedes $\mathfrak{R}_i$ einen Körper, oder einen direkt unzerlegbaren 0-Ring mit
Einheits-
element bedeutet, und bei keinem Primmaximalideal $\mathfrak{p}_i$ aus $\mathfrak{R}$ zwischen
 $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_i^2$ ein echtes Zwischenideal existiert.

II. Es sei $\mathfrak{R}$ nicht einartig. Es sei $\mathfrak{p}'$ ein Primmaximalideal und sei
 $\mathfrak{p}' > \mathfrak{p} > (0)$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$. Da es kein echtes Zwischenideal
zwischen $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}^2$ gibt, und da $\mathfrak{R}$ das Einheits-
element e hat, gilt, dass für
jede ganze Zahl k auch kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}'^k$ und $\mathfrak{p}'^{k+1}$
existiert. Daraus dürfen wir schliessen, dass jede Potenz von $\mathfrak{p}'$ stets $\mathfrak{p}$
enthält. Denn, wäre

$$\mathfrak{p} < \mathfrak{p}'^k, \quad \mathfrak{p} \not\leq \mathfrak{p}'^{k+1}$$

für eine ganze Zahl k , so würde damit

$$(1) \quad \mathfrak{p}'^k = \mathfrak{p} + \mathfrak{p}'^{k+1} \quad \text{und daher} \quad \mathfrak{p}'^k = \mathfrak{p} + \mathfrak{p}'^{2k}.$$

Da aber $\mathfrak{R}$ ein 0-Ring ist, so folgt daraus $\mathfrak{p}'^k = (\mathfrak{p}'_1) + (\mathfrak{p}'_2) + \dots + (\mathfrak{p}'_s) + \mathfrak{p}$
 $s \geq 1$, weil $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'^k$ ist. Aus (1) hätten wir damit

$$\mathfrak{p}'_i \equiv \mathfrak{p}'_{i1}\mathfrak{p}'_1 + \mathfrak{p}'_{i2}\mathfrak{p}'_2 + \dots + \mathfrak{p}'_{is}\mathfrak{p}'_s \pmod{\mathfrak{p}} \quad (i=1, 2, \dots, s),$$

wobei $\mathfrak{p}'_{ij} < \mathfrak{p}'$ ist. Durch Elimination von $\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \dots, \mathfrak{p}'_s$ folgte daraus

$$(e - \mathfrak{p}')\mathfrak{p}'^k < \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p}' < \mathfrak{p}'$$

und wir hätten aus $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}'^k$ einen Widerspruch $e - \mathfrak{p}' < \mathfrak{p}$, $e > \mathfrak{p}'$. Wir er-
kennen demnach, dass jede Potenz eines beliebigen Primmaximalideals, das
 $\mathfrak{p}$ enthält, immer auch ein Teiler von $\mathfrak{p}$ sein muss. Nach 0-Satz können
wir ein Primideal $\mathfrak{p}_1$ finden, so dass $\mathfrak{p}' > \mathfrak{p}_1 \geq \mathfrak{p}$ ist und kein Primideal
zwischen $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}_1$ geschaltet werden kann. Wenn $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_1$ nicht einartig ist,
so wird $\mathfrak{R} > \mathfrak{p}'' > \mathfrak{p}_2 > \mathfrak{p}_1$ für ein anderes Primmaximalideal $\mathfrak{p}''$ und zwischen

(1), (2) S. Mori, Über Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals
eindeutig bestimmt sind, dieses Journal, 1 (1931), 174.

Satz. Ist $\mathfrak{R}$ ein 0-Ring und ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$ für ein von (0) verschiedenes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$, so
gibt es in $\mathfrak{a}$ das Einheits-
element in bezug auf $\mathfrak{a}$.

p'' und p_2 existiert kein Primideal. Ist $\mathfrak{R}/p_2$ noch nicht einartig, so ergibt sich wieder $\mathfrak{R} \supset p''' \supset p_3 \supset p_2 \supset p_1$ für ein Primmaximalideal p''' . Indem wir so fortfahren, erhalten wir nach 0-Satz schliesslich ein Primideal p_n derart, dass $p_n \supset p_{n+1} \supset \dots \supset p_2 \supset p_1$ und $\mathfrak{R}/p_n$ einartig ist. Nach dem soeben gewonnenen Resultate muss jede Potenz jedes Primmaximalideals, welches p_n enthält, stets auch ein Teiler von p_n sein. Nach dem Durchschnittssatz von Noether⁽¹⁾ folgt damit, dass jede Potenz vom beliebigen echten Teiler von p_n stets ein Teiler von p_n ist. Nach dem in der Fussnote geschriebenen Satz⁽²⁾ folgt damit

$$p_n = p_n^2 \quad \text{und daher} \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + p_n.$$

Da aber p ein durch p_n teilbares Primideal ist, folgt daraus auch

$$p = p_n, \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + p,$$

wo $\mathfrak{R}_1$ einen einartigen, direkt unzerlegbaren Ring mit Einheitsselement bedeutet, in dem für jedes Primmaximalideal p_i zwischen p_i und p_i^2 kein echtes Zwischenideal existiert. Auf solcher Weise erhalten wir schliesslich, dass $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_n$ ist, wobei $\mathfrak{R}_i$ ein Körper oder einartiger, direkt unzerlegbarer 0-Ring mit Einheitsselement ist, in dem bei keinem Primmaximalideal p_i aus $\mathfrak{R}_i$ zwischen p_i und p_i^2 ein echtes Zwischenideal existiert.

Zweitens sei $\mathfrak{R} \ncong \mathfrak{R}^2$. In diesem Falle besitzt $\mathfrak{R}$ kein Einheitsselement. Ist p ein von $\mathfrak{R}$ und (0) verschiedenes maximales Primideal, so müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem p ein Primmaximalideal ist oder nicht.

I. Es sei p ein Primmaximalideal. Da zwischen p und p^2 kein echtes Zwischenideal existiert, ist

$$\mathfrak{R}p = p \ncong p^2 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{R}p = p^2.$$

Der erste Fall ist aber unmöglich. Denn, aus $\mathfrak{R}p = p$ folgt in $\mathfrak{R}$ die Existenz eines Elementes r von der Art, dass immer $rp = p$ ist, wenn p alle Elemente aus p durchläuft.⁽³⁾ Folglich ist $(r - r^4)p = (0)$ und dabei ist $r \not\in p$. Sonst ergäbe sich ein Widerspruch $\mathfrak{R} = m + p$, $m = m^2$, $p = p^2$. Wenn $r - r^4 \in p$ ist, so wird $(r - r^4)^2 = 0$, und daher folgt $\mathfrak{R} = m + n$, $m = m^2$, $n \ncong n^2$, da $\mathfrak{R}$ kein Einheitsselement hat. Da aber kein echtes Zwischenideal zwischen p und p^2 existiert, folgt daraus mit Rücksicht auf den in der Fussnote (S. 128) ge-

(1) Durchschnittssatz: In einem 0-Ring lässt sich jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen darstellen, $\alpha = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \dots \cap \alpha_n$.

(2) S. Mori, Überproduktzerlegung der Ideale, dieses Jour. 2 (1932), 6.

Satz. Ist p ein vom Einheitsideal verschiedenes Primideal, so ist p dann und nur dann teilbar durch jede Potenz von jedem echten Teiler von p , wenn $p = p^2$ oder p ein maximales Primideal vom Ring mit Einheitsselement ist.

(3) S. Mori, Über Produktzerlegung der Ideale, dieses Jour. 2 (1932), 1.

Satz. Ist α ein beliebiges Ideal vom 0-Ring $\mathfrak{R}$ und ist $\mathfrak{b}$ auch ein Ideal aus $\mathfrak{R}$, so wird dann und nur dann $\alpha\mathfrak{b} = \alpha$, wenn es in $\mathfrak{b}$ ein Element b gibt, derart, dass für jedes Element a aus α immer $ab = a$ ist.

zeichneten Satz $\mathfrak{R} = \mathfrak{m}' + \mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}'^2$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$. Dies widerspricht gegen $\mathfrak{R}\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$. Wenn $r - r^4 \notin \mathfrak{p}$ ist, so wird $\mathfrak{R} = (r - r^4) + \mathfrak{p}$ und daher folgt auch ein Widerspruch $\mathfrak{R}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}$. Damit muss $\mathfrak{R}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ sein. Da $\mathfrak{p}$ eine endliche Basis besitzt, folgt daher⁽¹⁾ $(r)\mathfrak{p} = (0)$, $r \notin \mathfrak{p}$ für ein Element r aus $\mathfrak{R}$. Damit erhalten wir $\mathfrak{R} = (r) + \mathfrak{p}$, $r - r^2 r' \in \mathfrak{p}$ für ein Element r' aus $\mathfrak{R}$, da $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ein Körper ist. Aus $(r - r^2 r')\mathfrak{p} = (0)$ folgt damit

$$(r - r^2 r')^2 = 0, \quad r^2 = r^3 r'', \quad r^2 = r^4 r''^2, \quad r^2 r''^2 = r^4 r''^4 \notin \mathfrak{p}.$$

Daraus erhalten wir ganz genau wie beim vorigen Fall $\mathfrak{R} = \mathfrak{R} + \mathfrak{p}$, wo $\mathfrak{R}$ einen Körper bedeutet.

II. Es sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal, aber kein Primmaximalideal. Da es kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^2$ gibt, existiert auch kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{R}^k$ und $\mathfrak{R}^{k+1}$ für jede ganze Zahl k . Wäre $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{R}^i$, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{R}^{i+1}$, so würde damit $\mathfrak{R}^i = \mathfrak{p} + \mathfrak{R}^{i+1} = \mathfrak{p} + \mathfrak{R}^{2i}$ und daher⁽²⁾ $\mathfrak{R}^i/\mathfrak{p}$ ein Körper, da $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal aus $\mathfrak{R}$ ist. Dies widerspricht der Annahme, dass $\mathfrak{p}$ kein Primmaximalideal ist. Hiermit muss $\mathfrak{p}$ durch jede Potenz von $\mathfrak{R}$ teilbar sein. Da $\mathfrak{R}$ kein Einheitsselement besitzt, so folgt daraus nach dem in der Fussnote (S. 129) beschriebenen Satz $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$. Nämlich ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{m} + \mathfrak{p}$, wo $\mathfrak{m}$ ein direkt unzerlegbarer 0-Ring ohne Einheitsselement ist und $\mathfrak{m}$ kein Primideal ausser (0) und $\mathfrak{m}$ besitzt, und ferner kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^2$ existiert. Zusammenfassend die beiden Fälle, erhalten wir schliesslich, dass im Falle $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}^2$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_k + \mathfrak{m}$$

ist, und dabei ist $\mathfrak{R}_i$ ein Körper und $\mathfrak{m}$ ein direkt unzerlegbarer 0-Ring ohne Einheitsselement. Ferner gibt es in $\mathfrak{m}$ kein Primideal ausser (0) und $\mathfrak{m}$, bei dem kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^2$ existiert.

Drittens sei $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}^2$ und es gebe kein Primideal ausser (0) und $\mathfrak{R}$. Wäre $\mathfrak{R}$ in die direkte Summe $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_n$ zerlegbar, so sollte $\mathfrak{R}_i \neq \mathfrak{R}_i^2$ ($i=1, \dots, n$) sein. Denn, aus $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_i^2$ folgte die Existenz eines von (0) und $\mathfrak{R}$ verschiedenen Primideals aus $\mathfrak{R}$. Daher ergabe sich ein Widerspruch gegen die Annahme, dass zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^2$ kein echtes Zwischenideal existiert.

Also ist unser Satz in allen Teilen vollständig bewiesen.

Aus Satz 9 folgt mühelos

(1) Denn, da nach Basissatz $\mathfrak{p} = (p_1) + \dots + (p_m)$ ist, so wird für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r' aus $\mathfrak{R}$

$$r' p_i = p_{i1} p_1 + \dots + p_{im} p_m \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad p_{ij} \in \mathfrak{p}.$$

Durch Elimination von $p_1, \dots, p_m$ folgt daraus $(r'^m - p') p_i = 0$ ($i=1, \dots, m$) $p' \in \mathfrak{p}$, $(r'^m - p') \mathfrak{p} = (0)$.

(2) S. Mori, Über Ringe, loc. cit., 176.

Satz. Ist $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$ vom 0-Ring, und ist $\mathfrak{b}^n + \mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{n+1} + \mathfrak{a} = \dots \neq \mathfrak{a}$, so existiert ein Element e in $\mathfrak{b}^n + \mathfrak{a}$, derart, dass für alle Elemente b aus $\mathfrak{b}^n + \mathfrak{a}$ immer $be - b < \mathfrak{a}$ ist.

Satz 10. *Ist $\mathfrak{R}$ ein 0-Ring, in dem kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^2$ und bei jedem Primmaximalideal $\mathfrak{p}$ auch kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ existiert, so ist jedes Primärideal aus $\mathfrak{R}$ gleich eine Potenz von zugehörigen Primideal.*

Zum Beweise nehmen wir zunächst an, dass ein Primideal $\mathfrak{p}$ von (0) und $\mathfrak{R}$ verschieden ist. Dann können wir zwei verschiedene Fälle unterscheiden, da nach Satz 9 jedes von $\mathfrak{R}$ verschiedene Primideal, das kein Primmaximalideal ist, idempotent ist:

I. Es sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$. In diesem Falle ist jedes zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal offenbar gleich $\mathfrak{p}$.

II. Es sei $\mathfrak{p}$ ein nicht-idempotentes Primmaximalideal. Dann gibt es nach Satz 9 kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}^k$ und $\mathfrak{p}^{k+1}$ für jede ganze Zahl k . Nun sei es $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primideal, dann wird

$$\mathfrak{p}^m \supseteq \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{p}^{m+1} \not\supseteq \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}^n, \quad \mathfrak{q} \not\supseteq \mathfrak{p}^{n-1}, \quad n \geq m \geq 1.$$

Wenn $\mathfrak{q}$ eine Potenz von $\mathfrak{p}$ gleich ist, so ist unsere Behauptung schon klar. Damit sei $\mathfrak{q} \not\supseteq \mathfrak{p}^k$ für jede ganze Zahl k . Dann folgt $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{q} + \mathfrak{p}^{m+1}$ und daher $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{q} + \mathfrak{p}^{m+2}$, da $\mathfrak{p}^{m+1} = \mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{p}^{m+2}$ ist. Auf solcher Weise ergibt sich ein Widerspruch $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{q} + \mathfrak{p}^n = \mathfrak{q}$. Also muss jedes zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal gleich eine Potenz von $\mathfrak{p}$ sein.

Zweitens sei $\mathfrak{R} = \mathfrak{p}$. Da es kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^2$ gibt, folgt ganz genau wie beim obigen Fall, dass jedes zu $\mathfrak{R}$ gehörige Primärideal gleich einer Potenz von $\mathfrak{R}$ ist.

Nachweis des Hauptsatzes.

Nach diesen Vorbereitungen in den vorigen Paragraphen sind wir nun imstande, die eingangs aufgestellte Behauptung zu beweisen:

Hauptsatz. *Ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann ein allgemeiner Z. P. I.-Ring, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Es gilt in $\mathfrak{R}$ der 0-Satz.*
2. *Für jede Primmaximalideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ existiert kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}$ (einschl. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$).*
3. *Kein echtes Zwischenideal existiert zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^2$.*

Wenn $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring ist, so sind nach Satz 8 in $\mathfrak{R}$ die Bedingungen 1 und 3 erfüllt. Um die Gültigkeit von Bedingung 2 zu zeigen, genügt es auch nach Satz 8 zu beweisen, dass im Fall $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{p}'$ zwischen $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}$ kein echtes Zwischenideal existiert. Ist $\mathfrak{p}\mathfrak{p}' < \mathfrak{a} < \mathfrak{p}$ für zwei verschiedene Primmaximalideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, so wird

$$(1) \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{R}, \quad \mathfrak{p}\mathfrak{p}' < \mathfrak{p}\mathfrak{R} < \mathfrak{p},$$

da $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring und $\mathfrak{R} = \mathfrak{p} + \mathfrak{p}'$ ist. Da aber nach Satz 8 zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ kein echtes Zwischenideal existiert, so muss $\mathfrak{p}\mathfrak{R} = \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}\mathfrak{R} = \mathfrak{p}^2 \not\supseteq \mathfrak{p}$ sein. Der erste Fall widerspricht (1). Im zweiten Fall ist nach

dem Beweis von Satz 6 $\mathfrak{R} = \mathfrak{m} + \mathfrak{p}$, wo $\mathfrak{m}$ ein Körper ist. Daher folgt $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m} + \mathfrak{d}$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{d}^2$, da $\mathfrak{p}'$ ein Primmaximalideal und $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist. Daraus erhalten wir auch nach Satz 8 $\mathfrak{p}'\mathfrak{R} = \mathfrak{p}'^2 \neq \mathfrak{p}'$ und folglich ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{m}' + \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}' + \mathfrak{d}$, $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{d}^2$, wo $\mathfrak{m}'$ ein Körper ist. Daraus ergibt sich ein Widerspruch, dass $\mathfrak{d}$ als Produkt von Potenzen endlich vieler Primideale nicht darstellbar ist. Also ist in $\mathfrak{R}$ die Bedingung 2 auch erfüllt.

Nehmen wir umgekehrt in $\mathfrak{R}$ die Gültigkeit der Bedingungen an, so folgt nach dem Durchschnittssatz von Noether,⁽¹⁾ dass für ein beliebiges Ideal α aus $\mathfrak{R}$

$$(1) \quad \alpha = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$$

ist. Dabei bedeutet $\mathfrak{q}_i$ ein zu Primideal $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal. Im Falle $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^2$ ist $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{R}$ und nach Satz 10 ergibt sich $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{\alpha_i}$ und aus Satz 9 folgt leicht, dass für $\mathfrak{p}_j \supset \mathfrak{p}_i$ die Formel

$$(2) \quad \mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{q}_j \cap \mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_i$$

besteht. Aus (1) und (2) folgt unmittelbar

$$\alpha = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cap \mathfrak{p}_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_m^{\alpha_m},$$

wo die Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_m$ durch einander unteilbar sind. Daher erhalten wir nach Satz 9

$$\alpha = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \mathfrak{p}_2^{\alpha_2} \dots \mathfrak{p}_m^{\alpha_m},$$

da jedes von $\mathfrak{R}$ verschiedene Primideal, welches kein Primmaximalideal ist, idempotent ist.

Im Fall $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}^2$ folgt nach Bedingung 2 und nach Satz 9, dass

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R} + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2, \quad \text{oder} \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$$

ist, wo $\mathfrak{R}$ ein Körper und $\mathfrak{m}$ ein direkt unzerlegbarer 0-Ring ohne Einheits-element ist. Ferner existiert in $\mathfrak{m}$ kein Primideal ausser $\mathfrak{m}$ und (0) und kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^2$. Daraus folgt unmittelbar für ein beliebiges Ideal α

$$\alpha = \mathfrak{R}^i \mathfrak{m}^j \quad \text{oder} \quad \alpha = \mathfrak{R}^k \mathfrak{m}^l$$

und damit ist unser Hauptsatz bewiesen.

Da im Ring mit Einheits-element jedes maximale Ideal ein Primmaximalideal ist und umgekehrt, folgt aus Hauptsatz und Satz 9 leicht

Hauptsatz II. Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring mit Einheits-element, so ist $\mathfrak{R}$ dann und nur dann ein allgemeiner Z. P. I.-Ring mit Einheits-element, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. In $\mathfrak{R}$ gilt der 0-Satz.
2. Für jedes maximale Ideal α aus $\mathfrak{R}$ existiert zwischen α und α^2 kein echtes Zwischenideal.

(1) E. Noether, a. a. O.

Zum Schluss dieses Paragraphen stellen wir die bisherigen gewonnenen Ergebnisse zusammen:

Struktur der allgemeinen Z. P. I.-Ringe. *Ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann ein allgemeiner Z. P. I.-Ring, wenn $\mathfrak{R}$ die folgende Struktur hat:*

1. Im Falle $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^2$ ist

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_n,$$

wo $\mathfrak{R}_i$ ein Körper oder ein direkt unzerlegbarer 0-Ring mit Einheitsselement ist, in welchem bei jedem maximalen Ideal α kein echtes Zwischenideal zwischen α und α^2 existiert.

II. Im Falle $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}^2$ ist

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R} + \mathfrak{m} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{m},$$

wo $\mathfrak{R}$ ein Körper und $\mathfrak{m}$ ein direkt unzerlegbarer 0-Ring ohne Einheitsselement ist, in dem es kein Primideal ausser (0) und $\mathfrak{m}$ gibt, und zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^2$ kein echtes Zwischenideal existiert.

Unabhängigkeit der Bedingungen.

In diesem Paragraphen werden wir an Beispielen zeigen, dass die im Hauptsatz gestellten Bedingungen allerdings untereinander unabhängig sind.

Beispiel 1. Es sei $\mathfrak{R}$ der Körper aller rationalen Zahlen und $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}[x, y]$ der Polynomring. Dann sind in $\mathfrak{R}$ Bedingungen 1 und 3, aber nicht Bedingung 2 erfüllt.

Beispiel 2. Es sei $\mathfrak{J}$ der Integritätsbereich aller geraden ganzen rationalen Zahlen und $\mathfrak{R} = \mathfrak{J}[x]$ ein Polynomring. Dann ist $\alpha = (2^3, x^2)$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}$ und der Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\alpha$ ist nilpotent. In $\bar{\mathfrak{R}}$ sind Bedingungen 1 und 2, aber nicht Bedingung 3 erfüllt.

Beispiel 3. Es sei $\mathfrak{J}$ der Integritätsbereich aller reellen ganzen algebraischen Zahlen. Dann ist offenbar Bedingung 3, aber nicht Bedingung 1 erfüllt. Nun müssen wir zeigen, dass in $\mathfrak{J}$ Bedingung 2 auch gültig ist. Zu diesem Zwecke sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal⁽¹⁾ und p ein beliebiges von 0 verschiedenes Element von $\mathfrak{p}$. Dann ist p oder $-p$ ein positives Element aus $\mathfrak{p}$ und daher ist $\sqrt{p}$ oder $\sqrt{-p}$ eine reelle ganze algebraische Zahl und in $\mathfrak{p}$ enthalten. Damit ist $p < \mathfrak{p}^2$. Da p aber ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}$ ist, so muss $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ sein.

Es sei nun $\mathfrak{J} \supset \alpha \supset \mathfrak{p}$ für ein Ideal α und a ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element aus α . Da a eine ganze algebraische Zahl ist, gilt

(1) Die Existenz eines von (0) und $\mathfrak{J}$ verschiedenen Primideals ist trivial nach dem folgenden Beispiel: $\mathfrak{p}$ sei ein Primidealteiler von (2). Da $\mathfrak{J}$ eine abzählbare Menge ist, können wir nach Krull die Existenz von $\mathfrak{p}$ zeigen. W. Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, Math. Annalen **101** (1929), 732.

$$(1) \quad a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

wo a_i eine ganze rationale Zahl bedeutet. Ist p die positive kleinste ganze rationale Zahl in $\mathfrak{p}$, so muss p prim sein. Wenn a_n durch p unteilbar ist, so folgt aus $a_n < a$, $p < a$ ein Widerspruch $a = \mathfrak{P}$. Wenn $a_s \not\equiv 0 (p)$, $a_{s+1} \equiv 0, \dots, a_n \equiv 0 (p)$ ist, so muss aus $a^{n-s}(a^s + a_1 a^{s-1} + \dots + a_s) < \mathfrak{p}$ die Beziehung $a^s + a_1 a^{s-1} + \dots + a_s < p$ folgen. Also ist $a_s < a$, $p < a$ und folglich erhalten wir auch einen Widerspruch $a = \mathfrak{P}$. Damit muss $\mathfrak{p}$ ein Primmaximalideal sein, da $\mathfrak{S}/\mathfrak{p}$ ein Körper ist. Für zwei Primmaximalideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ kommt es danach vor, dass zwischen $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}$ kein echtes Zwischenideal existiert.

Z. P. I.-Ringe im engeren Sinne.

Um den Struktursatz der Z. P. I.-Ringe, d. h. der Ringe, in denen die eindeutige Zerlegung jedes Ideals in Primideale gilt, als eine Folgerung unseres Hauptsatzes zu beweisen, ziehen wir die Resultate des vorherigen Paragraphen heran. Ist $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Z. P. I.-Ring, dann gilt in $\mathfrak{R}$ der 0-Satz und $\mathfrak{R}$ ist die direkte Summe von endlich vielen, direkt unzerlegbaren 0-Ringen. Aber beim eindeutigen Zerlegungssatz in Primideale müssen wir voraussetzen, dass *jedes Ideal in die endlich vielen, von Null und Ring verschiedenen Primideale zerlegbar ist*. Nach dieser Annahme muss $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^2$ sein, und daher folgt nach dem 0-Satz die Existenz des Einheitselementes.⁽¹⁾ Aus der Eindeutigkeit der Produktdarstellung können wir leicht schliessen, dass die Z. P. I.-Ringe in direkte Summen unzerlegbar sein müssen.

Zusammenfassend haben wir somit folgendes Ergebnis:

Satz 11. *Ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann ein Z. P. I.-Ring, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *In $\mathfrak{R}$ gilt der 0-Satz.*
2. *In $\mathfrak{R}$ existiert das Einheitselement.*
3. *Bei jedem maximalen Ideal α existiert kein echtes Zwischenideal zwischen α und α^2 .*
4. *$\mathfrak{R}$ ist in eine direkte Summe unzerlegbar.*

Im Satz von K. Kubo⁽²⁾ ist die aller letzte Bedingung durch die Be-

(1) Vgl. die Fussnote in S. 128.

(2) K. Kubo, Über die Noetherschen fünf Axiome in kommutativen Ringen, dieses Jour. **10** (1940), 77.

Satz. *Im kommutativen Ringe $\mathfrak{R}$ ist notwendig und hinreichend dafür, dass jedes von (0) und $\mathfrak{R}$ verschiedenes Ideal von $\mathfrak{R}$ sich eindeutig als Potenzprodukt von endlich vielen, von (0) und $\mathfrak{R}$ verschiedenen Primidealen darstellen lässt, dass in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Der abgeschwächte Vielfachenkettensatz.*
2. *Existenz des Einheitselementes.*
3. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.*
4. *Das Radikal von $\mathfrak{R}$ ist prim.*

dingung, dass das Radikal von $\mathfrak{R}$ prim ist, ersetzt. Die Äquivalenz dieser beiden Bedingungen ist schon in seiner Arbeit gezeigt. Ferner folgt im Ring mit Einheitselement die Gültigkeit des 0-Satzes aus dem abgeschwächten U-Satz.⁽¹⁾ Damit ist Bedingung I in Satz II durch die Bedingung, dass in $\mathfrak{R}$ der abgeschwächte U-Satz gilt, ersetzbar.

Als eine Folgerung aus Satz 11 wollen wir noch formulieren

Satz 12. *Es sei $\mathfrak{S}$ ein Integritätsbereich, in dem die Existenz des Einheitselement und die Gültigkeit des 0-Satzes nicht vorausgesetzt werden. Für $\mathfrak{S}$ gilt dann und nur dann der Z. P. I., wenn $\mathfrak{S}$ ein 0-Ring mit Einheitselement ist, in dem bei jedem maximalen Ideale α kein echtes Zwischenideal zwischen α und α^2 existiert.⁽²⁾*

Allgemeine Z. P. I.-Ringe und allgemeine Multiplikationsringe.

Wir wollen in diesem letzten Abschnitt eine Übersicht über die Relationen zwischen den allgemeinen Z. P. I.-Ringen und den allgemeinen Multiplikationsringen erhalten.

Definition. Ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$ heisst ein „*allgemeiner Multiplikationsring*“, wenn in $\mathfrak{R}$ aus $a < b$ stets die Gültigkeit einer Gleichung $a = bc$ folgt.

Satz 13. *Die Bezeichnungen „allgemeiner Z. P. I.-Ring“ und „allgemeiner Multiplikationsring“ haben in kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ dann und nur dann gleiche Bedeutung, wenn $\mathfrak{R}$ ein 0-Ring mit Einheitselement oder ein 0-Ring ohne Primideal ist.*

Damit ein allgemeiner Multiplikationsring $\mathfrak{R}$ zugleich ein allgemeiner Z. P. I.-Ring sein kann, ist es notwendig nach Hauptsatz, dass $\mathfrak{R}$ ein 0-Ring ist. Aber nach Satz 9 haben in einem 0-Ring $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen dieselbe Gültigkeit:

Für jedes Primmaximalideal $\mathfrak{p}'$ existiert kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}'^2$ und ferner existiert kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^2$.

Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ (einschl. $\mathfrak{R}$) existiert kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.

Damit können wir auf dem Grund von 0-Ring nach Hauptsatz, Satz 9

(1) Y. Akizuki, Teilerkettensatz und Vielfachenkettensatz, Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3) **17** (1935), 333.

(2) Der von E. Noether stammende Fundamentalsatz ist nur ein einfacher Fall dieses Satzes.

Fundamentalsatz: Für den Integritätsbereich $\mathfrak{S}$ gilt dann und nur dann der Z. P. I., wenn $\mathfrak{S}$ ein ganz abgeschlossener U-Ring ist.

W. Krull, Enzyklopädie. loc. cit., 30.

und dem in der Fussnote besprochenen Satz⁽¹⁾ leicht zeigen, dass $\mathfrak{R}$ ein 0-Ring mit Einheitsselement, oder ein 0-Ring ohne Primideal sein muss.

Ist umgekehrt $\mathfrak{R}$ ein 0-Ring, welcher Einheitsselement hat, oder kein Primideal ausser (0) und $\mathfrak{R}$ besitzt, so ist $\mathfrak{R}$ nach Hauptsatz und dem in der Fussnote besprochenen Satz zugleich ein allgemeiner Z. P. I.-Ring und ein allgemeiner Multiplikationsring, oder zugleich keines von beiden.

Nach W. Krull⁽²⁾ heisst ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheitsselement ein „Multiplikationsring“, wenn in $\mathfrak{R}$ aus $a \leq b$ stets die Gültigkeit der Gleichung $a = bc$ folgt.

Aus dieser Definition folgt mühelos

Satz 14. *In einem kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheitsselement sind die beiden Bezeichnungen „allgemeiner Z. P. I.-Ring“ und „Multiplikationsring“ dann und nur dann gleichgültig, wenn $\mathfrak{R}$ ein 0-Ring ist.*

(1) S. Mori, Über allgemeine Multiplikationsringe. I. dieses Jour. 4 (1934), 25.

Satz. Ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$, in dem jeder Kern eine kürzeste Darstellung ist, ist dann und nur dann ein allgemeiner Multiplikationsring, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden, von einander unabhängigen Bedingungen erfüllt sind:

1. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ (einschl. $\mathfrak{R}$) gibt es kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.

2. Ist b ein echter Teiler eines Ideals a , und ist $a + b^n = a + b^{n+1} \neq a$, so gibt es in b ein Element b' derart, dass $b - b' \leq a$, $b \not\leq a$ ist.

3. Jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist stets mit seinem Kern identisch.

(2) W. Krull, Enzyklopädie. loc. cit., 28. Es findet sich dort, dass ein Multiplikationsring, für den der 0-Satz gilt, ein allgemeiner Z. P. I.-Ring ist. Aber die Notwendigkeit der Bedingung, dass $\mathfrak{R}$ ein 0-Ring sein solle, ist allerdings noch nicht bewiesen.