Zerlegung der Hauptideale aus Polynomringen in minimale Primideale. III.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 21. Okt., 1939.)

In der Note II dieses Titels(1) zeigte ich als Hauptsatz:

Ist jedes Hauptideal im Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar, so lässt sich jedes Hauptideal in $\mathfrak{J}[x]$ auch als Potenzprodukt von endlich vielen, in $\mathfrak{J}[x]$ minimalen Primidealen darstellen.

Die vorliegende Note beschäftigt sich mit der Behauptung, dass dieser Satz auch dann noch gültig bleibt, wenn man den Polynomring $\mathfrak{J}[x]$ durch den Polynomring $\bar{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}[x_1, x_2, \ldots.]$ ersetzt, der aus Polynomen in einer Unbestimmtenmenge $x_1, x_2, \ldots.$ von beliebiger Mächtigkeit mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}$ besteht. Für diese Untersuchung nimmt der folgende Satz(2) eine wichtige Schlüsselstellung ein:

Ist jedes Hauptideal im Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar, so ist jedes höchste Primideal eines beliebigen Hauptideals aus $\mathfrak{J}$ stets umkehrbar.

Hilfssätze.

In diesem Paragraphen bedeutet $\mathfrak{J}$ einen Integritätsbereich mit Einselement, in dem jedes Hauptideal als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar ist, und $\bar{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}[x_1, x_2, \ldots.]$ bedeutet den Polynomring in einer Unbestimmten-menge $x_1, x_2, \ldots.$ von beliebiger Mächtigkeit.

Satz 8. *Ist $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal, so ist $\bar{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}[x_1, x_2, \ldots.]$ auch ein in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimales Primideal.*

Zunächst ist $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Primideal in $\bar{\mathfrak{J}}$.(3)

---

(1) S. Mori, Zerlegung der Hauptideale aus Polynomringen in minimale Primideale. II., dieses Journal **9** (1939), 1.

(2) S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale. II., dieses Journal **9** (1939), 153.

(3) $\mathfrak{p}[x_i]$ ist ein Primideal in $\mathfrak{J}[x_i]$. Wir können daher vollständige Induktion anwenden und voraussetzen, dass $\mathfrak{p}[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}]$ auch ein Primideal in $\mathfrak{J}[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}]$ ist. Ist für zwei Polynome $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})$, $f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})$ in $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}$ aus $\bar{\mathfrak{J}}$ $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}) f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}) \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}})$, so wird $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}) f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}) \equiv 0\ (\mathfrak{p}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}])$. Damit ist $f(n_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}) f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})$ ein Polynom in $x_{i_{n+1}}$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{p}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}]$. Nach unserer Voraussetzung ist aber $\mathfrak{p}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]$ ein Primideal in $\mathfrak{J}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]$ und folglich muss $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})$ oder $f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}})$ durch $\mathfrak{p}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}]$, oder $\bar{\mathfrak{p}}$ teilbar sein. Also muss $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Primideal in $\bar{\mathfrak{J}}$ sein.

Zweitens sei $\bar{\mathfrak{p}}$ ein echter Teiler eines Primideals $\bar{\mathfrak{p}}'$ aus $\mathfrak{J}$. Dann enthält $\bar{\mathfrak{p}}'$ kein Element aus $\mathfrak{J}$. Denn, sonst würde $\bar{\mathfrak{p}}=\bar{\mathfrak{p}}'$, da $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal ist. Es sei $\bar{a}=\bar{a}(x_{i_1},\ldots\ldots x_{i_m})$ ein Primelement[1] in $\bar{\mathfrak{p}}'$. Dann besitzen die Koezienten $a_j (j=0\ldots\ldots n)$ von $\bar{a}$ keinen gemeinsamen Teiler, und nach unserer Voraussetzung für $\mathfrak{J}$ erhalten wir

$$(1)\quad \begin{cases} (a_0)=\mathfrak{p}^{\alpha_0}\mathfrak{p}_1^{\beta_0}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{\lambda_0}\mathfrak{p}_{01}\mathfrak{p}_{02}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{0k_0} \\ (a_1)=\mathfrak{p}^{\alpha_1}\mathfrak{p}^{\beta_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{\lambda_1}\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{12}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{1k_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_n)=\mathfrak{p}^{\alpha_n}\mathfrak{p}_1^{\beta_n}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{\lambda_n}\mathfrak{p}_{n_1}\mathfrak{p}_{n_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{nk_n}\,. \end{cases}$$

Dabei sind alle $\mathfrak{p}$ nach Satz 7 ein in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal, und die Primideal $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_k$ sind alle gemeinsamen Primideale von (a_j) $(j=a, 1, \ldots\ldots, n)$. Nun können wir annehmen, dass $\alpha_0 \leqq \alpha_i$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ ist, und ein Element p finden,[2] so dass

$$p\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{\alpha_0}),\quad \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{\alpha_0+1}),\quad \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)\ (i=1, 2, \ldots\ldots, k),\quad \not\equiv 0\ \mathfrak{p}_{0j} (j=1, 2, \ldots\ldots, k_0)$$

ist. Nach unserer Voraussetzung ist aber $(p)=\mathfrak{p}^{\alpha_0}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''\ldots\ldots$, wobei alle $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''\ldots\ldots$ von $\mathfrak{p}$ verschieden sind. Ferner muss $(p)\neq\mathfrak{p}^{\alpha_0}$ sein, sonst hätten $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ einen gemeinsamen Teiler p. Wenn wir beide Seiten von (1) mit $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''\ldots\ldots$ multiplizieren, so ergibt sich

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{p}'\mathfrak{p}''\ldots\ldots(a_0)=(p)\,\mathfrak{p}_1^{\beta_0}\mathfrak{p}_2^{\gamma_0}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{\lambda_0}\mathfrak{p}_{01}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{0k_0} \\ \mathfrak{p}'\mathfrak{p}''\ldots\ldots(a_1)=(p)\,\mathfrak{p}^{\alpha_1-\alpha_0}\mathfrak{p}_1^{\beta_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{\lambda_1}\mathfrak{p}_{11}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{1k_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{p}'\mathfrak{p}''\ldots\ldots(a_n)=(p)\,\mathfrak{p}^{\alpha_n-\alpha_0}\mathfrak{p}_1^{\beta_n}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{\lambda_n}\mathfrak{p}_{n1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{nk_n}\,. \end{cases}$$

Ist p' ein solches Element aus $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''\ldots\ldots$, dass $(p')\not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ ist, so ist

$$(3)\qquad (p'a_0)=(pa_0'),\quad (p'a_1)=(pa_1'),\ \ldots\ldots (p'a_n)=(pa_n')\,.$$

Da nach dem am Anfang ausgesprochenen Satz $\mathfrak{p}$ umkehrbar ist, so ergibt sich aus (3)

$$(4)\qquad a_0'\not\equiv 0\ (\mathfrak{p})\,.$$

Anderseits folgt aus (3) $p'\bar{a}(x_{i_1}, \ldots\ldots, x_{i_m})=p\bar{a}'(x_{i_1}, \ldots\ldots, x_{i_m})$, wobei $\bar{a}'(x_{i_1}, \ldots\ldots, x_{i_m})$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_0', a_1', \ldots\ldots, a_n'$ bedeutet. Da $\bar{\mathfrak{p}}'$ aber kein Element aus $\mathfrak{J}$ enthält, so muss $\bar{a}'(x_{i_1}, \ldots\ldots, x_{i_m})\equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}}')$ sein. Aus $\bar{\mathfrak{p}}'<\bar{\mathfrak{p}}$ folgt

---

(1) Ein element $\bar{a}(x_{i_1}, \ldots\ldots, x_{i_m})$ aus $\bar{\mathfrak{J}}$ heisst *Primelement in* $\bar{\mathfrak{J}}$, wenn die Koeffizienten von $\bar{a}(x_{i_1}, \ldots\ldots, x_{i_m})$ keinen gemeinsamen Teiler in $\mathfrak{J}$ haben und wenn das Produkt von $\bar{a}(x_{i_1}, \ldots\ldots, x_{i_m})$ mit irgendwelchem Element aus $\mathfrak{J}$ stets irreduzibel in $\bar{\mathfrak{J}}$ bis auf konstante Faktoren ist.

(2) Da in $\mathfrak{J}$ $\mathfrak{p}^{\alpha_0}\neq\mathfrak{p}^{\alpha_0+1}$ ist, so können wir ein Element p finden, so dass $p'\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{\alpha_0})$, $\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{\alpha_0+1})$ ist. Nach unserer Voraussetzung ist aber $(p')=\mathfrak{p}^{\alpha_0}\mathfrak{p}_1'\ldots\ldots\mathfrak{p}_l'\mathfrak{p}_1''\ldots\ldots\mathfrak{p}_s''$, da $\mathfrak{p}^{\alpha_0}$ primär ist. Dabei bedeutet $\mathfrak{p}_i'$ eines aus $\mathfrak{p}_i (i=1, \ldots\ldots, k)$, $\mathfrak{p}_{0j} (j=1, 2, \ldots\ldots, k_0)$ und $\mathfrak{p}_j''$ keines aus $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_{0j}$. Nun sei p'' ein solches Element, dass

$$p''\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{\alpha_0'})\ (\alpha_0'>\alpha_0),\quad \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i')\ (i=1, 2, \ldots\ldots, l)\quad \text{und}\quad p''\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i), (\mathfrak{p}_{0j})$$

mit Ausnahme von $\mathfrak{p}_i' (i=1, 2, \ldots\ldots, l)$ ist. Setzen wir $p=p'+p''$, so wird

$$p\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{\alpha_0}),\quad \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{\alpha_0+1}),\quad \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)\ (i=1\ldots\ldots, k),\quad \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_{0j})\ (j=1, 2, \ldots\ldots, k_0)\,.$$

damit $a_0' \equiv 0,\ a_1' \equiv 0, \ldots\ldots, a_n' \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ und wir erhalten einen Widerspruch gegen (4). Also muss $\bar{\mathfrak{p}}$ ein in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimales Primideal sein.

Dieser Satz erleichtert die Auffindung eines in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimalen Primideals $\bar{\mathfrak{p}}$, welches ein Element aus $\mathfrak{J}$ enthält. Ein solches Primideal $\bar{\mathfrak{p}}$ heisst ein *in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimales Primideal von erster Art.* Enthält dagegen ein in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimales Primideal $\bar{\mathfrak{p}}'$ kein Element aus $\mathfrak{J}$, so heisst $\bar{\mathfrak{p}}'$ ein *in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimales Primideal von zweiter Art.* Dann gilt

Satz 9. *Es sei $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}}$ die Gesamtheit aller Elemente aus $\bar{\mathfrak{J}}$, deren Produkt mit irgendeinem Element aus $\mathfrak{J}$ durch ein Primelement $\bar{\pi}$ aus $\bar{\mathfrak{J}}$ teilbar ist. Dann ist $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}}$ ein in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimales Primideal von zweiter Art.*

Erstens müssen wir beweisen, dass $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}}$ ein Primideal in $\bar{\mathfrak{J}}$ ist. Zu diesem Zwecke werden wir zeigen, dass das Produkt von $\bar{\alpha}$, oder $\bar{\beta}$, mit einem Element aus $\mathfrak{J}$ durch $\bar{\pi}$ teilbar ist, wenn für zwei Elemente $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ von $\bar{\mathfrak{J}}$ $a\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\pi}\bar{\varphi}$ gilt, dabei bedeutet a ein Element aus $\mathfrak{J}$ und $\bar{\varphi}$ ein Element aus $\bar{\mathfrak{J}}$. Die Behauptung ist richtig in $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}[x_{i_1}]$, welches aus der Menge aller Polynome in einen Veränderlichen x_{i_1} mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}$ besteht. Wir können daher vollständige Induktion anwenden und die Behauptung für den Polynomring $\mathfrak{J}_n$ voraussetzen, welcher aus der Menge aller Polynome in n Veränderlichen $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\ldots, x_{i_n}$ mit Koefflzienten aus $\mathfrak{J}$ besteht. Es seien $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\ldots, x_{i_{n+1}}$ aller Variablen, die in die Darstellung $a\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\pi}\bar{\varphi}$ auftreten. Dann wird $\bar{\alpha} = a_0^{(n)} x_{i_{n+1}}^k + a_1^{(n)} x_{i_{n+1}}^{k-1} + \cdots\cdots + a_k^{(n)}$, $\bar{\beta} = b_0^{(n)} x_{i_{n+1}}^l + b_1^{(n)} x_{i_{n+1}}^{l-1} + \cdots\cdots + b_l^{(n)}$, $\bar{\pi} = p_0^{(n)} x_{i_{n+1}}^m + \cdots\cdots + p_m^{(n)}$, dabei sind $a^{(n)}, b^{(n)}, p^{(n)}$ die Polynome in n Variablen $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\ldots, x_{i_n}$. Ist $m=1$, so muss $ap_0^{(n)k}\bar{\alpha} = \bar{\pi}\bar{\varphi}_1$ oder $ap_0^{(n)l}\bar{\beta} = \bar{\pi}\bar{\varphi}_2$ sein. Vergleichung der Koeffizienten der Potenzen von $x_{i_{n+1}}$ links und rechts ergibt die Teilbarkeit des Produktes von $\bar{\varphi}_1$ oder $\bar{\varphi}_2$ mit einem Element aus $\mathfrak{J}$ durch $p_0^{(n)k}$ oder $p_0^{(n)l}$, da in $\mathfrak{J}_n$ unsere Behauptung vorausgesetzt ist, und da $\bar{\pi}$ ein Primelement ist. Also erhalten wir $aa'\bar{\alpha} = \bar{\pi}\bar{\varphi}_1'$, oder $ab'\bar{\beta} = \bar{\pi}\bar{\varphi}_2'$, dabei bedeutet a' oder b' ein Element aus $\mathfrak{J}$. Indem wir damit noch einmal vollständige Induktion anwenden, nehmen wir an, dass unsere Behauptung für $t < m$ gültig ist. Dividieren wir $p_0^{(n)k}\bar{\alpha}$, $p_0^{(n)l}\bar{\beta}$ durch $\bar{\pi}$, so erhalten wir

$$(1) \qquad a\bar{\alpha}'\bar{\beta}' = \bar{\pi}\bar{\varphi}_1', \qquad \bar{\alpha}' = c_0^{(n)} x_{i_{n+1}}^{k'} + c_1^{(n)} x_{i_{n+1}}^{k'-1} + \cdots\cdots + c_{k'}^{(n)},$$
$$\bar{\beta}' = d_0^{(n)} x_{i_{n+1}}^{l'} + d_1^{(n)} x_{i_{n+1}}^{l'-1} + \cdots\cdots + d_{l'}^{(n)}, \qquad k', l' < m.$$

Wenn beide $p_0^{(n)k}\bar{\alpha}$, $p_0^{(n)l}\bar{\beta}$ durch $\bar{\pi}$ unteilbar wären, so folgte nach unseren Voraussetzungen aus (1), dass ein Produkt von $\bar{\pi}$ mit einem Element aus $\mathfrak{J}$ zerlegbar würde. Damit muss $p_0^{(n)k}\bar{\alpha}$ oder $p_0^{(n)l}\bar{\beta}$ durch $\bar{\pi}$ teilbar sein. Setzen wir $p_0^{(n)k}\bar{\alpha} = \bar{\pi}\bar{\Psi}_1$ oder $p_0^{(n)l}\bar{\beta} = \bar{\pi}\bar{\Psi}_2$, und vergleichen wir die Koeffizienten der Potenzen von $x_{i_{n+1}}$ links und rechts in dieser Gleichung, so muss das Produkt von $\bar{\alpha}$ oder $\bar{\beta}$ mit einem Element aus $\mathfrak{J}$ durch $\bar{\pi}$ teilbar sein, da in $\mathfrak{J}_n$ unsere Behauptung vorausgesetzt ist. Also ist $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}}$ ein Primideal.

Zweitens gibt es in $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}}$ offenbar kein Element aus $\mathfrak{J}$. Wäre $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}} \supset \bar{\mathfrak{p}}'$ für ein Primideal $\bar{\mathfrak{p}}'$, so würde $\bar{\pi} \not\equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}}')$, sonst würde $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}} = \bar{\mathfrak{p}}'$. Da das Produkt eines Primelementes $\bar{\pi}'$ aus $\bar{\mathfrak{p}}'$ mit irgendeinem Element a' aus $\mathfrak{J}$ durch $\bar{\pi}$ teilbar wäre, und da $\bar{\mathfrak{p}}'$ kein Element aus $\mathfrak{J}$ enthälte, so ergäbe sich ein Widerspruch, dass für jede ganze Zahl n $a''\bar{\pi}'=\bar{\pi}^n\bar{\varphi}$ wäre. Damit ist $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}}$ ein in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimales Primideal von zweiter Art.

Im folgenden wird die Gesamtheit aller Elemente aus $\bar{\mathfrak{J}}$, deren Produkt mit irgendeinem Element aus $\mathfrak{J}$ durch ein Primelement $\bar{\pi}$ teilbar ist, das *durch $\bar{\pi}$ erzeugte Primideal* genannt und mit $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}}$ bezeichnet.

Nachweis des Hauptsatzes.

Nach den Vorbereitungen im vorigen Paragraphen kehren wir wieder zum eigentlichen Thema dieser Arbeit zurück und beweisen jetzt

Satz 10. *Ist $\bar{\pi}$ ein Primelement aus $\bar{\mathfrak{J}}$, so ist das Hauptideal $(\bar{\pi})$ als Potenzprodukt von endlich vielen, in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimalen Primidealen darstellbar.*

Da $\bar{\pi}$ ein Polynom in Variablen $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}$ ist, so wird

$$\bar{\pi}=a_0x_{i_1}^{a_{i_1}}x_{i_2}^{a_{i_2}}\ldots x_{i_m}^{a_{i_m}}+\cdots+a_nx_{i_1}^{\lambda_{i_1}}\ldots x_{i_m}^{\lambda_{i_m}};$$

$$(1)\quad\begin{cases}(a_0)=\mathfrak{p}_1^a\ldots\mathfrak{p}_k^\lambda\mathfrak{p}_{01}^{\mu_{01}}\mathfrak{p}_{02}^{\mu_{02}}\ldots\mathfrak{p}_{0k}^{\mu_{0}k_0}\\(a_1)=\mathfrak{p}_1^a\ldots\mathfrak{p}_k^\lambda\mathfrak{p}_{11}^{\mu_{11}}\mathfrak{p}_{12}^{\mu_{12}}\ldots\mathfrak{p}_{1k_1}^{\mu_1k_1}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(a_n)=\mathfrak{p}_1^a\ldots\mathfrak{p}_k^\lambda\mathfrak{p}_{n_1}^{\mu_{n_1}}\mathfrak{p}_{n_2}^{\mu_{n_2}}\ldots\mathfrak{p}_{nk_n}^{\mu_{nkn}},\end{cases}$$

wobei jedes $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{J}$ minimals Primideal bedeutet. Da jedes $\mathfrak{p}$ aber umkehrbar ist, erhalten wir daraus im Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{J}$

$$(2)\quad\begin{cases}\mathfrak{p}_1^{-a}\ldots\mathfrak{p}_k^{-\lambda}(a_0)=\mathfrak{p}_{01}^{\mu_{01}}\ldots\mathfrak{p}_{0k_0}^{\mu_0k_0}\\\mathfrak{p}_1^{-a}\ldots\mathfrak{p}_k^{-\lambda}(a_1)=\mathfrak{p}_{11}^{\mu_{11}}\ldots\mathfrak{p}_{1k_1}^{\mu_1k_1}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\mathfrak{p}_1^{-a}\ldots\mathfrak{p}_k^{-\lambda}(a_n)=\mathfrak{p}_{n_1}^{\mu_{n_1}}\ldots\mathfrak{p}_{nk_n}^{\mu_{nkn}}.\end{cases}$$

Dabei besitzen $\mathfrak{p}_{01}^{\mu_{01}}\ldots\mathfrak{p}_{0k_0}^{\mu_0k_0}$, $\mathfrak{p}_{11}^{\mu_{11}}\ldots\mathfrak{p}_{1k_1}^{\mu_1k_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n_1}^{\mu_{n_1}}\ldots\mathfrak{p}_{nk_n}^{\mu_{nkn}}$ keinen gemeinsamen Faktor. Ist p_1/p' ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}_1^{-a}\ldots\mathfrak{p}_k^{-\lambda}$, so können wir nach (2) die Elemente $a_0', a_1', \ldots, a_n'$ finden, so dass

$$(3)\qquad p_1a_0=p'a_0',\quad p_1a_1=p'a_1',\ldots, p_1a_n=p'a_n'$$

ist. Es sei $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}}$ das durch $\bar{\pi}$ erzeugte Primideal und es sei $\bar{\mathfrak{q}}=(\bar{\pi},\bar{\pi}',\bar{\pi}'',\ldots)$, wo $\bar{\pi}',\bar{\pi}'',\ldots$ alle zu $\bar{\pi}$ proportionalen Elemente[1] sind. Dann muss $\bar{\mathfrak{q}}\subseteqq\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}}$ sein, und aus (2), (3) erhalten wir

$$\mathfrak{p}_1^{-a}\ldots\mathfrak{p}_k^{-\lambda}(\bar{\pi})\equiv 0\ (\bar{\mathfrak{q}}).$$

Umgekehrt sei (3) vorausgesetzt und es gebe zwischen $a_0', a_1', \ldots, a_n'$ keinen

(1) Zwei Elemente $\bar{\pi}$ und $\bar{\pi}'$ in $\bar{\mathfrak{J}}$ werden *proportional* genannt, wenn $a\bar{\pi}=b\bar{\pi}'$ für die Elemente a und b aus $\mathfrak{J}$ ist.

gemeinsamen Teiler in $\mathfrak{J}$. Da in $\mathfrak{J}$ die Darstellung eines Hauptideals als Potenzprodukt von Primidealen eindeutig bestimmt ist, so ist $(p_1)\mathfrak{p}_1^a \ldots\ldots \mathfrak{p}_k^\lambda$ der grösste gemeinsame Teiler von $(p'a_0'), (p'a_1'), \ldots\ldots, (p'a_n')$. Damit ist $(p_1)\mathfrak{p}_1^a \ldots\ldots \mathfrak{p}_k^\lambda$ durch (p') teilbar und das Element p_1/p' ist ein Element aus $\mathfrak{p}_1^{-a} \ldots\ldots \mathfrak{p}_k^{-\lambda}$. Daher erhalten wir nach (3)

$$\bar{\mathfrak{q}} \equiv 0 \left(\mathfrak{p}_1^{-a} \ldots\ldots \mathfrak{p}_k^{-\lambda}(\bar{\pi})\right).$$

Also ist $\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}_1^{-a} \ldots\ldots \mathfrak{p}_k^{-\lambda}(\bar{\pi})$ oder

$$(4) \qquad (\bar{\pi}) = \mathfrak{p}_1^a \ldots\ldots \mathfrak{p}_k^\lambda \bar{\mathfrak{q}}.$$

Es sei nun das Produkt $a\bar{a}$ eines Elementes $\bar{a}$ aus $\bar{\mathfrak{J}}$ mit einem Element a aus $\mathfrak{J}$ durch $\bar{\pi}$ teilbar, nämlich es sei $a\bar{a} = \bar{\pi}\bar{\beta}$. Dann wird für ein zweckmässiges Element a' aus $\mathfrak{J}$ $aa'\bar{a} = b\bar{\pi}\bar{\pi}_1 \ldots\ldots \bar{\pi}_s$, wobei $\bar{\pi}_i$ ein Primelement bedeutet. Daraus erhalten wir nach (4)

$$(aa')(\bar{a}) = (b)\, \mathfrak{p}_1^a \ldots\ldots \mathfrak{p}_k^\lambda \mathfrak{p}_1'^{a'} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{k'}'^{\lambda'} \ldots\ldots \mathfrak{p}_1^{(s)a^{(s)}} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{k^{(s)}}^{(s)\lambda^{(s)}} \bar{\mathfrak{q}}\bar{\mathfrak{q}}_1 \ldots\ldots \bar{\mathfrak{q}}_s,$$

dabei ist $\bar{\mathfrak{q}}_i = (\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_i', \bar{\pi}_i'' \ldots\ldots)$. Da aber $\bar{\mathfrak{q}}_i$ durch kein in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimales Primideal von erster Art teilbar ist,(1) so muss nach Satz 8 $(\bar{a}) = \mathfrak{p}_0^a \mathfrak{p}_0'^\beta \ldots\ldots \mathfrak{p}_0^{(\nu)\lambda} \bar{\mathfrak{q}}\bar{\mathfrak{q}}_1 \ldots\ldots \bar{\mathfrak{q}}_s$ sein. Also ist $\bar{a} \equiv 0\,(\bar{\mathfrak{q}})$, nämlich $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}} = \bar{\mathfrak{q}}$. Nach Sätze 8 und 9 ist $(\bar{\pi})$ damit als Potenzprodukt von endlich vielen, in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimalen Primidealen darstellbar.

Aus dem eben formulierten Satz folgt nun leicht der

Hauptsatz. *Es sei jedes Hauptideal im Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ als Potenzprodnkt von endlich vielen Primidealen darstellbar und $\bar{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}[x_1, x_2, \ldots\ldots]$ sei ein Polynomring in einer Variabelnmenge $x_1, x_2, \ldots\ldots$ von beliebiger Mächtigkeit. Dann lässt sich jedes Hauptideal aus $\bar{\mathfrak{J}}$ als Potenzprodukt von endlich vielen, in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimalen Primidealen darstellen.*

Es sei $\bar{a}$ ein beliebiges Element aus $\bar{\mathfrak{J}}$. Dann erhalten wir für ein geeignetes Element a aus $\mathfrak{J}$ $a\bar{a} = b\bar{\pi}_1\bar{\pi}_2 \ldots\ldots \bar{\pi}_n$, wobei $\bar{\pi}_i$ ein Primelement in $\bar{\mathfrak{J}}$ und b ein Element aus $\mathfrak{J}$ bedeutet. Ist $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}_i}$ das durch $\bar{\pi}_i$ erzeugte Primideal, so ergibt sich nach Satz 10

$$(1) \qquad (a\bar{a}) = (b)\, \mathfrak{p}_{11}^{a_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{1k_1}^{\lambda_1} \bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}_1} \mathfrak{p}_{21}^{a_2} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{2k_2}^{\mu_2} \bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}_2} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{n1}^{a_n} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{nk_n}^{\nu_n} \bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}_n}.$$

Es sei $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal, welches ein Teiler von (a) ist, und es sei $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}[x_1, x_2, \ldots\ldots]$. Dann ist $(b)\mathfrak{p}_{11}^{a_1} \ldots\ldots \bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}_n} \equiv 0\,(\bar{\mathfrak{p}})$. Aber ist $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}_i}$ ein in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimales Primideal von zweiter Art, und folglich muss $(b)\,\mathfrak{p}_{11}^{a_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{1k_1}^{\lambda_1} \mathfrak{p}_{21}^{a_2} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{2k_2}^{\mu_2} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{n1}^{a_n} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{nk_n}^{\nu_n} \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ sein. Da $\mathfrak{p}$ aber umkehrbar ist, können wir die

(1) Wir nehmen an, dass $\bar{\mathfrak{q}}_i$ durch ein in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimales Primideal $\bar{\mathfrak{p}}$ von erster Art teilbar ist. Dann sind alle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_t$ von $\bar{\pi}_i$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Wir können ganz genau wie beim Beweise von Satz 8 die Elemente $p, p', a_0', \ldots\ldots, a_t'$ finden, so dass $p'a_0 = pa_0'$, $p'a_1 = pa_1', \ldots\ldots, p'a_t = pa_t'$, $a_0' \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ ist. Aus $p'\bar{\pi}_i = p\bar{\pi}_i'$ folgt $\bar{\pi}_i' \equiv 0\,(\bar{\mathfrak{q}}_i)$ und nach unserer Annahme ergibt sich $\bar{\pi}_i' \equiv 0\,(\bar{\mathfrak{p}})$, oder ein Widerspruch $a_0' \equiv 0\,(\mathfrak{p})$.

beiden Seiten von (1) durch $\mathfrak{p}$ dividieren. Auf solcher Weise erhalten wir endlich $(\bar{a})=\mathfrak{p}_1^{a_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_m^{a_m}\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}_1}\ldots\ldots\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}_n}$. Setzen wir nun $\bar{\mathfrak{p}}_1=\mathfrak{p}_1[x_1, x_2, \ldots\ldots], \ldots\ldots \bar{\mathfrak{p}}_m=\mathfrak{p}_m[x_1, x_2, \ldots\ldots]$, so ist $\bar{\mathfrak{p}}_i$ nach Satz 8 ein in $\bar{\mathfrak{J}}$ minimales Primideal von erster Art und daraus ergibt sich $(\bar{a})=\bar{\mathfrak{p}}_1^{a_1}\bar{\mathfrak{p}}_2^{a_2}\ldots\ldots\bar{\mathfrak{p}}_m^{a_m}\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}_1}\ldots\ldots\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{\pi}_n}$. Also ist unser Hauptsatz bewiesen.