m ベクトルの幾何學に就いて

竹野兵一郎

(昭和 17 年 6 月 1 日受附)

§1. 序論。 本論文に於ては m ベクトルの幾何學を普通に使用されてゐるもの[1] と異なる表現を用ひて記述し，その取扱を簡單にせんとするものである。

一つの n 次元空間 X_n に於て，座標變換

$$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad \left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right| \neq 0, \quad (i, j, \dots=1, \dots, n) \tag{1.1}$$

を考へ $\bar{x}^i_j \equiv \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$, $\underline{\bar{x}}^i_j \equiv \dfrac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^j}$ 等とおけば次の關係が成立する。

$$\bar{x}^i_j \underline{x}^j_k=\delta^i_k, \quad \underline{x}^i_j \bar{x}^j_k=\delta^i_k; \quad \underline{\bar{x}}^i_j \bar{x}^j_k=\bar{\bar{x}}^i_k; \quad \underline{x}^i_j \underline{\bar{x}}^j_k=\underline{\bar{x}}^i_k \tag{1.2}$$

そこで今 n 箇の數字 $1, 2, \dots, n$ より任意に $m(1 \leqq m \leqq n)$ 箇の數字 $(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m)$ (但し $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_m$ とする) を取出し，斯くして得られる C^n_m 箇の組合せに對し一定の方法で $1, 2, \dots, \nu(=C^n_m)$ の番號を對應させる。[2] この對應の方法は任意である (例へば辭書的に) が，一度定めたら變更しないこととする。

次に
$$\overset{m}{\bar{x}}{}^a_b \equiv m!\, \bar{x}^{\alpha_1}_{[\beta_1} \bar{x}^{\alpha_2}_{\beta_2} \dots \bar{x}^{\alpha_m}_{\beta_m]}, \qquad \overset{m}{\underline{x}}{}^a_b \equiv m!\, \underline{x}^{\alpha_1}_{[\beta_1} \dots \underline{x}^{\alpha_m}_{\beta_m]} \tag{1.3}$$

とおく。こゝに $a=(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m)$, $b=(\beta_1\beta_2 \dots \beta_m)$; $a, b, \dots=1, \dots, \nu$ であり x の上の m は混雜の恐れのないときは省略する。明らかに $m=1$ なら $\bar{x}^a_b$, $\underline{x}^a_b$ は $\bar{x}^i_j$, $\underline{x}^i_j$ と一致し又 $m=n$ ならば

$$\bar{x}^1_1=|\bar{x}^i_j|, \quad \underline{x}^1_1=|\underline{x}^i_j|; \quad \bar{x}^1_1 \underline{x}^1_1=1 \tag{1.4}$$

定理 1. (1.2) に對應して次の關係式が成立する。

$$\bar{x}^a_b \underline{x}^b_c=\delta^a_c, \quad \underline{x}^a_b \bar{x}^b_c=\delta^a_c; \quad \underline{\bar{x}}^a_b \bar{x}^b_c=\bar{\bar{x}}^a_c, \quad \underline{x}^a_b \underline{\bar{x}}^b_c=\underline{\bar{x}}^a_c, \tag{1.5}$$

$$|\bar{x}^a_b|=|\bar{x}^i_j|^\lambda, \quad |\underline{x}^a_b|=|\underline{x}^i_j|^\lambda, \quad \lambda=C^{n-1}_{m-1} \tag{1.6}$$

---

(1) 例へば穗刈四三二，北海道帝大理學部紀要 (I), 2 (1934), 103.

(2) 是に似た思想は次の論文にも應用されてゐる。河口商次，穗刈四三二，帝國學士院記事，16 (1940), 313.

證明。 $a=(\alpha_1\cdots\alpha_m)$, $b=(\beta_1\cdots\beta_m)$, $c=(\gamma_1\cdots\gamma_m)$ とすれば

$$\bar{x}^a_b\underline{x}^b_c=m!^2\,\bar{x}^{[\alpha_1}_{\beta_1}\bar{x}^{\alpha_2}_{\beta_2}\cdots\bar{x}^{\alpha_m]}_{\beta_m}\underline{x}^{\beta_1}_{\gamma_1}\cdots\underline{x}^{\beta_m}_{\gamma_m}$$

$$=m!\,\delta^{\alpha_1}_{[\gamma_1}\cdots\delta^{\alpha_m}_{\gamma_m]}=\delta^a_c$$

(1.5) の他の式も同様に證明出來る。(1.6) は小行列式の行列式の理論より明かである。

$m=1$ のとき (1.5) が (1.2) になることも明かである。

§2. *T* ベクトルと *T* テンゾル。 前節の結果によつて, X_n に於ける普通のベクトル, テンゾルが $\bar{x}^i_j, \underline{x}^i_j$ をもとゝして定義されるやうに, $\bar{x}^a_b, \underline{x}^a_b$ をもとゝして T ベクトル, T テンゾルを定義することが出來る。例へば變換 (1.1) に際して變換[1]

$$\bar{v}^a=\bar{x}^a_b v^b, \qquad \bar{T}^{ab}_{\cdot\cdot c}=\bar{x}^a_d\bar{x}^b_e\underline{x}^f_c T^{de}_{\cdot\cdot f} \tag{2.1}$$

を受ける量 $v^a, T^{ab}_{\cdot\cdot c}$ を夫々 m 級の反變 T ベクトル及び混合 T テンゾルと呼ぶ。そして X_n の各點に是等の量を配したものを $\overset{m}{X}_n$ で表はす。

$m=1$ のときは T テンゾルは X_n のテンゾルと一致し, 又 (2.1) の第二式に於て $m=n$ とすれば

$$\bar{T}^{11}_{\cdot\cdot 1}=|\bar{x}^i_j|^2|\underline{x}^i_j|T^{11}_{\cdot\cdot 1}=|\bar{x}^i_j|^{2-1}T^{11}_{\cdot\cdot 1} \tag{2.2}$$

となる故, **一般に p 箇の添數に關し反變, q 箇の添數に關し共變なる n 級の T テンゾルは普通の $(p-q)$ 荷の相對スカラーとなる。**[2]

以上の T テンゾルの概念を更に擴張して

$$\underset{pq}{A_{ab}^{\cdot\cdot r}}{}^{c}, \qquad 1\leqq p,q,r\leqq n \tag{2.3}$$

のやうなものも考へ得る。こゝに p,q,r は夫々 a,b,c の屬する級を示す。

次に T ベクトルの實例を示さう。$A_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}$ を X_n の m ベクトルとして

$$A_{\alpha_1\cdots\alpha_m}=A_\alpha, \qquad [\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m,\ (\alpha_1\cdots\alpha_m)=\alpha] \tag{2.4}$$

とおけば

$$\bar{A}_b=\underline{x}^{i_1}_{[\beta_1}\cdots\underline{x}^{i_m}_{\beta_m]}A_{i_1\cdots i_m}=m!\,\underline{x}^{\alpha_1}_{[\beta_1}\cdots\underline{x}^{\alpha_m}_{\beta_m]}A_{\alpha_1\cdots\alpha_m}=\underline{x}^a_b A_a, \tag{2.5}$$

---

(1) T テンゾルは太い文字で表はす。

(2) 荷數が整數である相對テンゾルはすべて T' テンゾルとして表はすことが出來るが, さうでないものは T 相對スカラーを用ひねばならない。反對に T 相對スカラーはすべて普通の相對スカラーとして表はし得る。

こゝに $b=(\beta_1\cdots\beta_m)$, なる故 A_a は m 級の T ベクトルである。又逆に任意の m 級の T ベクトルに對し X_n の m ベクトルが對應する。このやうな T ベクトル A_a を $A_{a_1\cdots a_m}$ の $\overset{m}{X}_n$ に於ける表現と呼ぶ。例へばリーマン空間に於ける曲率テンゾル K_{ijlm} の $\overset{2}{X}_n$ に於ける表現は二級對稱 T テンゾル K_{ab} を與へる。[1]

§3. $\overset{m}{X}_n$ に於ける計量。$\overset{m}{X}_n$ に於て $\overset{m}{g}{}^{ab}\overset{m}{g}_{ac}=\delta^b_c$ なる關係で結びつけられた所の階數 ν なる任意の對稱 T テンゾル g^{ab}, g_{ab}, (級を示す m は簡單のため省略する) を導入することにより, X_n に於けると同樣に T ベクトル v^a の大きさ $|v^a|$ 及び v^a, w^a のなす角 ω を夫々

$$|v^a|^2=g_{ab}v^av^b=g^{ab}v_av_b=v_av^a \tag{3.1}$$

及び

$$\cos\omega=\frac{g_{ab}v^aw^b}{|v^a|\cdot|w^a|} \tag{3.2}$$

で定義することが出來る。このやうな g_{ab} を $\overset{m}{X}_n$ の基本 T テンゾルと呼び, m 級 T テンゾルの添數の上げ, 下げはすべて g^{ab}, g_{ab} によるものとする。

今 X_n の基本テンゾルを g_{ij}, g^{ij} $(g_{ij}g^{jk}=\delta^k_i)$ とすれば一般には g_{ab} と g_{ij} とは無關係である。しかしながら最も興味ある性質を有する g_{ab} は次式により與へられるものである。

$$\overset{m}{g}_{ab}=m!\,g_{[a_1[\beta_1}g_{a_2\beta_2}\cdots g_{a_m]\beta_m]},\qquad \overset{m}{g}{}^{ab}=m!\,g^{[a_1[\beta_1}\cdots g^{a_m]\beta_m]} \tag{3.3}$$

$$|g_{ab}|=|g_{ij}|^\lambda,\quad (\lambda=C^{n-1}_{m-1});\quad a=(a_1\cdots a_m),\quad b=(\beta_1\cdots\beta_m), \tag{3.4}$$

かやうな g_{ab}, g^{ab} が $g_{ab}g^{bc}=\delta^c_a$ を滿足することは明かである。斯の如き計量を有する $\overset{m}{X}_n$ を $\overset{m}{R}_n$ で表はすことにする。[2]

今 X_n に於ける m ベクトル $A_{a_1\cdots a_m}$ の $\overset{m}{R}_n$ に於ける表現を A_a とすれば

$$A^b=g^{ab}A_a=m!\,g^{[a_1[\beta_1}\cdots g^{a_m]\beta_m]}A_{a_1\cdots a_m}=A^{\beta_1\cdots\beta_m} \tag{3.5}$$

なる關係が成立し, 同樣のことは一般の T テンゾルについても云へるから

---

(1) 次の論文に此の思想をもとゝする理論が發展せられてゐる。竹野, 本誌, **12** (昭和 17 年), 125.

(2) 物理學で扱はれる デ・ジッター型空間を特徴附ける式 $K_{ijlm}=k^2(g_{im}g_{jl}-g_{il}g_{jm})$ を $\overset{2}{R}_4$ の式として書直すと $K_{ab}=-k^2g_{ab}$ となる。

定理 2. $\overset{m}{R}_n$ **に於ては** X_n **に於ける共（反）變** m **ベクトルの添數を** g^{ij} (g_{ij}) **により上げ（下げ）て得られる反（共）變** m **ベクトルの表現は，もとの** m **ベクトルの表現の添數を** g^{ab} (g_{ab}) **を用ひて上げ（下げ）て得られる** T **ベクトルと同一である。**

次に X_n に於ける m 箇のベクトル $\underset{1}{v}^i, \dots, \underset{m}{v}^i$ に依つて張られる m 次元立體の體積 V を

$$V=|v^a|=\sqrt{g_{ab}v^av^b} \quad \text{こゝに} \quad v^a\equiv m!\,\underset{1}{v}^{[a_1}\underset{2}{v}^{a_2}\dots\underset{m}{v}^{a_m]}, \tag{3.6}$$

により定義し，又 v^a と他の m 次元立體 $w^a\equiv m!\,\underset{1}{w}^{[a_1}\dots\underset{m}{w}^{a_m]}$ とのなす角 ω を (3.2) で定義する。[1]

$\overset{m}{R}_n$ に於て $m=1$ のときは此の定義は X_n の計量の定義と一致し，$m=n$ のときには $\nu=1$, $g_{11}=g$, $v^1=n!\,\underset{1}{v}^{[1}\dots\underset{n}{v}^{n]}$ なる故 $V=\sqrt{g}\cdot|\underset{j}{v}^i|$ となり普通の體積の定義と一致する。更にこのときは任意の v^a, w^a に對し $\cos\omega=\pm1$ となり，すべての n 級 T ベクトルは同方向 $(\omega=0)$ 又は反對方向 $(\omega=\pi)$ を持つことを知る。なほ上の定義が $1<m<n$ なるときに於ても平坦空間に於ける通常の定義を含むことは容易に知ることが出來る。

§4. $\overset{m}{X}_n$ **に於ける直交系。** X_n に於ける單位ベクトルの n 重直交系が $\underset{k}{e}^i$ 及び $\overset{k}{e}_i$ で與へられるものとする。

即ち
$$\left.\begin{aligned} &g_{ij}\underset{k}{e}^i\underset{l}{e}^j=\delta_{kl}=g^{ij}\overset{k}{e}_i\overset{l}{e}_j=\overset{k}{e}_i\underset{l}{e}^i;\quad g_{ij}\underset{k}{e}^i=\overset{k}{e}_j,\quad g^{ij}\overset{k}{e}_i=\underset{k}{e}^j,\\ &g_{ij}=\sum_k\overset{k}{e}_i\overset{k}{e}_j,\quad g^{ij}=\sum_k\underset{k}{e}^i\underset{k}{e}^j,\quad \sum_k\underset{k}{e}^i\overset{k}{e}_j=\delta^i_j \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

$\overset{m}{X}_n$ の直交系も全く同様に X_n とは無關係に定義できる。特に $\overset{m}{X}_n$ が $\overset{m}{R}_n$ のときには $\overset{m}{R}_n$ の直交系を X_n の系をもとゝして導くことが出來る。即ち $\underset{c}{e}^a, \overset{d}{e}_b$ を

$$\underset{c}{e}^a\equiv m!\,\underset{\gamma_1}{e}^{[\alpha_1}\dots\underset{\gamma_m}{e}^{\alpha_m]},\qquad \overset{d}{e}_b=m!\,\overset{\delta_1}{e}_{[\beta_1}\dots\overset{\delta_m}{e}_{\beta_m]}, \tag{4.2}$$

（こゝに $\alpha_1<\dots<\alpha_m$, $\beta_1<\dots<\beta_m$, $a=(\alpha_1\dots\alpha_m)$, $b=(\beta_1,\dots\beta_m)$ 等）のやうに選べば (4.1) より容易に

(1) V 及び ω の値は番號 $1,2,\dots,\nu$ のつけ方には無關係である。

$$\left.\begin{aligned} &g_{ab}\underset{c}{e}^a\underset{d}{e}^b=\delta_{cd}=g^{ab}\overset{c}{e}_a\overset{d}{e}_b=\underset{d}{\overset{c}{e}_a}\underset{d}{e}^a;\quad g_{ab}\underset{c}{e}^a=\overset{c}{e}_b,\quad g^{ab}\overset{c}{e}_a=\underset{c}{e}^b \\ &g_{ab}=\sum_c \overset{c}{e}_a\overset{c}{e}_b:\quad g^{ab}=\sum_c \underset{c}{e}^a\underset{c}{e}^b;\quad \sum_c \underset{c}{e}^a\overset{c}{e}_b=\delta^a_b \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

を得る。之即ち $\underset{c}{e}^a, \overset{d}{e}_b$ が $\overset{m}{R}_n$ の ν 重直交系を與へることを示す。

今 m ベクトル $A_{a_1\dots a_m}$ の表現を A_a とし，又直交系 (4.1) 及び (4.3) に關する $A_{a_1\dots a_m}$ 及び A_a の直交成分をば夫々 $A(\gamma_1\cdots\gamma_m)$ 及び $A(c)$ とする。即ち

$$A(\gamma_1\cdots\gamma_m)=A_{i_1\dots i_m}\underset{\gamma_1}{e}^{i_1}\cdots\underset{\gamma_m}{e}^{i_m},\quad A(c)=A_a\underset{c}{e}^a,\quad (i_\rho=1,\dots,n), \tag{4.4}$$

とすると (4.2) より次式を得る。

$$A(c)=m!\,A_{a_1\dots a_m}\underset{[\gamma_1}{e}^{a_1}\cdots\underset{\gamma_m]}{e}^{a_m}=A(\gamma_1\cdots\gamma_m) \tag{4.5}$$

故に

定理 3. **$\overset{m}{R}_n$ に於て直交系を (4.2) により定義すれば，m ベクトルの表現の直交成分は m ベクトルの直交成分の表現に等し。このことは任意の T テンゾルについても成立する。**

§5. T テンゾルの共變微分，曲率 T テンゾル。 普通の方法に依り $\overset{m}{X}_n$ に於ける T ベクトルの線形共變微分，共變微係數を定義することが出來る。例へば

$$\delta v^a\equiv dx^i\nabla_i v^a=dv^a+\overset{m}{\Gamma}{}^a_{bi}v^b dx^i \tag{5.1}$$

$$\delta w_b\equiv dx^i\nabla_i w_b=dw_b-\overset{m}{\Gamma}{}'^a_{bi}w_a dx^i \tag{5.2}$$

而して接續の係數 Γ^a_{bi} 及び Γ'^a_{bi} の變換式は夫々

$$\overline{\Gamma}^a_{bi}=\Gamma^c_{dj}\overline{x}^a_c\underline{x}^d_b\underline{x}^j_i-\frac{\partial\overline{x}^a_d}{\partial x^j}\underline{x}^j_i\underline{x}^d_b \tag{5.3}$$

及び Γ'^a_{bi} についての同樣の式で與へられる。混合 T テンゾルの共變微係數の一例は

$$\nabla_i\underset{m}{T}{}^{\cdot\,p}_{a\,\cdot\,b}=\partial_i T^{\cdot\,b}_{a}-\overset{m}{\Gamma}{}'^c_{ai}T^{\cdot\,b}_{c}+\overset{p}{\Gamma}{}^b_{ci}T^{\cdot\,c}_{a} \tag{5.4}$$

である。(5.1) より

$$2\nabla_{[i}\nabla_{j]}\overset{m}{v}{}^a=-\overset{m}{R}{}^{\cdot\cdot\cdot a}_{ijb}v^b,\qquad 2\nabla_{[i}\nabla_{j]}\overset{m}{w}_b=\overset{m}{R}{}'^{\cdot\cdot\cdot a}_{ijb}w_a \tag{5.5}$$

こゝに $\overset{m}{R}{}^{\cdot\cdot\cdot a}_{ijb}$ 及び $\overset{m}{R}{}'^{\cdot\cdot\cdot a}_{ijb}$ は $\overset{m}{X}_n$ の曲率テンゾルで夫々

$$\overset{m}{R}{}^{\cdot\cdot\cdot a}_{jib}=\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^a_{bj}-\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^a_{bi}-\Gamma^a_{cj}\Gamma^c_{bi}+\Gamma^a_{ci}\Gamma^c_{bj} \tag{5.6}$$

及び Γ'^a_{bi} についての同様な式で定義される。混合 T テンソルに關する同様の式も容易に導き得る。

Γ^a_{bi} と Γ'^a_{bi} とは一般には無關係であるが，斯の如き場合は唯計算が複雜になるだけで特に面白い結果が得られない。故に $\Gamma^a_{bi}=\Gamma'^a_{bi}$ なる場合のみを考へることにする。

(5.3) に於て $m=1$ とおけば X_n に於ける Γ^k_{ij} の變換の式となり，又 $m=n$ とおけば (5.3) は

$$\bar{\Gamma}^1_{1i}=\left(\Gamma^1_{ij}-\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j}\right)\underline{x}^j_i, \quad \Delta=|\bar{x}^i_j| \tag{5.7}$$

となる。之 X_n に於ける相對テンソルの接續係數の變換公式である。

なほ (5.5) を利用してビアンキの恒等式

$$\nabla_{[k}R_{ji]b}{}^{a}=-2S_{[ji}{}^{l}R_{k]lb}{}^{a}, \quad こゝに \quad S_{ji}{}^{l}=\Gamma^l_{[ji]}, \tag{5.8}$$

を導くことも出來る。計算は X_n に於けるものと同様である。X_n の接續が對稱なるときは直ちに

$$\nabla_{[k}R_{ji]b}{}^{a}=0$$

を得る。

§6. P 接續。X_n に於ける任意の m ベクトル $A^{a_1\cdots a_m}$ の $\overset{m}{X}_n$ に於ける表現を A^a で表はす。$\overset{m}{X}_n$ に於ける A^a の共變微分が X_n に於ける $A^{a_1\cdots a_m}$ の共變微分の表現と一致するやうな接續を $\overset{m}{X}_n$ に於ける P 接續と呼び，P 接續の係數を P^a_{bi} で表はす。この定義より

$$\left.\begin{aligned}\partial_i A^{a_1\cdots a_m}+\Gamma^{a_1}_{si}A^{sa_2\cdots a_m}+\Gamma^{a_2}_{si}A^{a_1s\cdots a_m}+\cdots+\Gamma^{a_m}_{si}A^{a_1\cdots s}\\ =\partial_i A^a+P^a_{bi}A^b\end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

この式[1]が任意の $A^{a_1\cdots a_m}$ について成立するための條件として容易に次式を得る。

$$\overset{m}{P}{}^a_{bi}=\sum_\rho \Gamma^{a_\rho}_{a_\rho i}, \quad [a=b \text{ のとき}] \tag{6.2a}$$

$$=(-1)^{\rho-\sigma}\Gamma^{a_\rho}_{\beta_\sigma i}, \quad [a\overset{*}{=}b,\ (a_\rho\neq\beta_\sigma) \text{ のとき}] \tag{6.2b}$$

$$=0, \quad [a\overset{*}{\neq}b \text{ のとき}], \quad \big(a=(a_1\cdots a_m),\ b=(\beta_1\cdots\beta_m)\big) \tag{6.2c}$$

---

(1) 云ふ迄もなく (6.1) は座標系に無關係に成立する。後に出る (6.2) (8.2), (8.3), (8.4), 等についても同様である。

こゝに $a\overset{*}{=}b$, $(\alpha_\rho \neq \beta_\sigma)$ は $\alpha_\rho \neq \beta_\sigma$ でその他の $(m-1)$ 箇の α_i $(i \neq \rho)$ と β_j $(j \neq \sigma)$ とはその順序のまゝで一致することを意味する。又 $a \overset{*}{\neq} b$ はどの α_i $(i=1,\dots,m)$ にも等しくない β_j が二つ又はそれ以上ある (從つてどの β_j にも等しくない α_i が二つ又はそれ以上ある) ことを意味する。二つの添數 a と b との間には $=$, $\overset{*}{=}$, $\overset{*}{\neq}$ の何れか一つ, 唯一つが成立することは明らかである。

$m=1$ のときには (6,2c) 成立しない, 又 $\overset{1}{P}{}^b_{ai}$ は Γ^b_{ji} と一致する。$m=n$ のときには (6.2b), (6.2c) は成立しない, そして

$$\overset{n}{P}{}^1_{1i}=\Gamma^s_{si} \tag{6.3}$$

となる。即ち $\overset{n}{P}{}^1_{1i}$ は X_n の相對テンゾルの一つの接續係數を與へる。

今 $$\Gamma^k_{ji}=\left\{{k \atop ji}\right\}+T_{ji}^{\cdot\cdot k}. \qquad (T_{ji}^{\cdot\cdot k} \text{ はテンゾル}) \tag{6.4}$$

とおけば (6.2) より

$$P^a_{bi}=\sum_\rho\left(\left\{{\alpha_\rho \atop \alpha_\rho i}\right\}+T_{\alpha_\rho i}^{\cdot\cdot\alpha_\rho}\right), \qquad [a=b \text{ のとき}] \tag{6.5a}$$

$$=(-1)^{\rho-\sigma}\left(\left\{{\alpha_\rho \atop \beta_\sigma i}\right\}+T_{\beta_\sigma i}^{\cdot\cdot\alpha_\rho}\right), \qquad [a\overset{*}{=}b,\ (\alpha_\rho \neq \beta_\sigma) \text{ のとき}], \tag{6.5b}$$

$$=0 \qquad [a \overset{*}{\neq} b \text{ のとき}] \tag{6.5c}$$

§7. Q_{iab} と M_{aib}. $\overset{m}{X}_n$ に於て

$$\nabla_i g_{ab}=-Q_{iab} \tag{7.1}$$

とおけば Q_{iab} は a, b について對稱な T テンゾルである。

$$Q_{iab}=Q_i g_{ab} \quad (7.2), \qquad Q_{iab}=0 \tag{7.3}$$

が成立するときは夫々 T ベクトルの角及び長さを不變に保つ接續が得られる。即ち m 次元立體のなす角及びその體積を不變とする接續が得られることゝなる。これを夫々**ワイル型**及び**リーマン型**と呼ぶ。

(7.1) より $$R_{ijab}=-\nabla_{\square j}\nabla_{\square i}g_{ab}=\nabla_{\square j}Q_{\square ab} \tag{7.4}$$

なる故 Q_i がグラデ$_1$エントなるワイル型接續[1] 又はリーマン型接續に於ては次の關係が成立する。

$$R_{ijab}=-R_{ijba} \tag{7.5}$$

今 $$\Gamma^a_{bi}=g^{ac}\left\{\frac{1}{2}\partial_i g_{bc}+\frac{1}{2}Q_{ibc}+M_{bic}\right\} \tag{7.6}$$

---

(1) X_n に於けると同樣にかやうな接續は g_{ab} の共形變換によりリーマン型となり得る。

とおけば Γ^a_{bi} が同一の Q_{iab} を與へるための必要且十分條件は

$$M_{bic}=-M_{cib} \tag{7.7}$$

となる。この M_{bic} はテンゾルではなくて（但し (7.7) は不變式），次の變換を受ける。

$$\bar{M}_{aib}=\underline{x}^j_i[M_{cjd}\underline{x}^c_a\underline{x}^d_b+g_{cd}\underline{x}^d_b\partial_j\underline{x}^c_a]. \tag{7.8}$$

§8. $\underset{0}{P}{}^a_{bi}$. X_n に於けるリーマン型接續

$$\nabla_i g_{jk}=0,\quad \Gamma^k_{ij}=\left\{{k \atop ij}\right\},\quad T^{\cdot\cdot k}_{ij}=0 \tag{8.1}$$

に對應する P 接續の係數を $\underset{0}{P}{}^a_{bi}$ で表はす。之がリーマン型 $\overset{m}{X}_n$ を與へることは P 接續の定義から明らかである。

(6.5) より

$$\underset{0}{P}{}^a_{bi}=\sum_\rho\left\{{\alpha_\rho \atop \alpha_\rho i}\right\} \qquad [a=b \text{ のとき}] \tag{8.2 a}$$

$$=(-1)^{\rho-\sigma}\left\{{\alpha_\rho \atop \beta_\sigma i}\right\}, \qquad [a\overset{*}{=}b,\ (\alpha_\rho\neq\beta_\sigma) \text{ のとき}] \tag{8.2 b}$$

$$=0 \qquad [a\overset{*}{\neq}b \text{ のとき}] \tag{8.2 c}$$

然るに少し計算すれば

$$g^{ac}\frac{\partial g_{cb}}{\partial x^i}=\sum_\rho\frac{\partial g_{s\alpha_\rho}}{\partial x^i}g^{s\alpha_\rho}, \qquad [a=b \text{ のとき}],\ (s=1,\dots,n) \tag{8.3 a}$$

$$=(-1)^{\rho-\sigma}\frac{\partial g_{s\beta_\sigma}}{\partial x^i}g^{\alpha_\rho s}, \qquad [a\overset{*}{=}b,\ (\alpha_\rho\neq\beta_\sigma) \text{ のとき}] \tag{8.3 b}$$

$$=0, \qquad [a\overset{*}{\neq}b \text{ のとき}] \tag{8.3 c}$$

となる故 $\underset{0}{P}{}^a_{bi}$ に對しては[1]

$$\underset{0}{M}{}^{\cdot\cdot a}_{bi}=\frac{1}{2}\sum_\rho g^{s\alpha_\rho}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^{\alpha_\rho}}-\frac{\partial g_{i\alpha_\rho}}{\partial x^s}\right) \qquad [a=b \text{ のとき}] \tag{8.4 a}$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^{\rho-\sigma}g^{s\alpha_\rho}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^{\beta_\sigma}}-\frac{\partial g_{i\beta_\sigma}}{\partial x^s}\right), \qquad [a\overset{*}{=}b,\ (\alpha_\rho\neq\beta_\sigma) \text{ のとき}] \tag{8.4 b}$$

$$=0, \qquad [a\overset{*}{\neq}b \text{ のとき}] \tag{8.4 c}$$

次に (6.4) に對應して

$$\Gamma^a_{bi}=\underset{0}{P}{}^a_{bi}+T^{\cdot\cdot a}_{bi} \tag{8.5}$$

とおけば：$T^{\cdot\cdot a}_{bi}$ は混合 T テンゾルとなり，これに對して

---

(1) (8.4) で $m=1$ とおけば $\underset{0}{M}{}^{\cdot\cdot a}_{bi}=\frac{1}{2}g^{sa}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^b}-\frac{\partial g_{ib}}{\partial x^s}\right)$ 即ち $\underset{0}{P}{}^a_{bi}=\left\{{a \atop bi}\right\}$ となり，$m=n$ とおけば $\underset{0}{M}_{1i1}=0$, $\underset{0}{P}{}^1_{1i}=\frac{\partial\log\sqrt{g}}{\partial x^i}=\left\{{s \atop si}\right\}$ となる。

$$T_{bi}^{\cdot\cdot a}=\frac{1}{2}Q_{ib}^{\cdot\cdot a}+M_{bi}^{\cdot\cdot a}-\underset{0}{M}_{bi}^{\cdot\cdot a} \tag{8.6}$$

が成立す。そして P 接續に於ては (6.5) より

$$T_{bi}^{\cdot\cdot a}=\sum_{\rho} T_{a_\rho i}^{\cdot\cdot a_\rho}, \qquad [a=b \text{ のとき}] \tag{8.7 a}$$

$$=(-1)^{\rho-\sigma}T_{\beta_\sigma i}^{\cdot\cdot a_\rho}, \qquad [a\overset{*}{=}b,\ (a_\rho\neq\beta_\sigma) \text{ のとき}] \tag{8.7 b}$$

$$=0, \qquad [a\overset{*}{\neq}b \text{ のとき}] \tag{8.7 c}$$

又 (8.5) を用ひて $R_{ijb}^{\cdot\cdot\cdot a}$ と $\underset{0}{R}_{ijb}^{\cdot\cdot\cdot a}$ ($\underset{0}{P}_{ai}^{b}$ より作られた曲率テンゾル) との關係を求むれば

$$R_{ijb}^{\cdot\cdot\cdot a}=\underset{0}{R}_{ijb}^{\cdot\cdot\cdot a}+2\underset{0}{\nabla}_{[j}T_{|b|i]}^{\cdot\cdot a}+2T_{b[i}^{\cdot\cdot c}T_{|c|j]}^{\cdot\cdot a} \tag{8.8}$$

を得る。こゝに $\underset{0}{\nabla}_i$ は $\underset{0}{P}$ 接續に於ける微係數を示す。

§9. P 接續の曲率テンゾル。P 接續 P_{bi}^{a} について考へやう。$v^{a_1\cdots a_m}$ の表現を v^a とすれば

$$2\nabla_{[i}\nabla_{j]}v^a=-R_{ijb}^{\cdot\cdot\cdot a}v^b$$

$$=-R_{ijs}^{\cdot\cdot\cdot a_1}v^{sa_2\cdots a_m}-\cdots-R_{ijs}^{\cdot\cdot\cdot a_m}v^{a_1\cdots s} \tag{9.1}$$

この式が任意の v^a について成立すべき條件として

$$R_{ijb}^{\cdot\cdot\cdot a}=\sum_{\rho} R_{ija_\rho}^{\cdot\cdot\cdot a_\rho}, \qquad [a=b \text{ のとき}] \tag{9.2 a}$$

$$=(-1)^{\rho-\sigma}R_{ij\beta_\sigma}^{\cdot\cdot\cdot a_\rho}, \qquad [a\overset{*}{=}b,\ (a_\rho\neq\beta_\sigma) \text{ のとき}], \tag{9.2 b}$$

$$=0, \qquad [a\overset{*}{\neq}b \text{ のとき}] \tag{6.2 c}$$

この結果は計算は長くなるが (5.6), (6.2) を用ひて直接計算して出すことも出來る。(9.2) の特別な場合として

$$\underset{0}{R}_{ijb}^{\cdot\cdot\cdot a}=\sum_{\rho} K_{ija_\rho}^{\cdot\cdot\cdot a_\rho}, \qquad [a=b \text{ のとき}] \tag{9.3 a}$$

$$=(-1)^{\rho-\sigma}K_{ij\beta_\sigma}^{\cdot\cdot\cdot a_\rho}, \qquad [a\overset{*}{=}b,\ (a_\rho\neq\beta_\sigma) \text{ のとき}] \tag{9.3 b}$$

$$=0, \qquad [a\overset{*}{\neq}b \text{ のとき}] \tag{9.3 c}$$

こゝに $K_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot l}$ は g_{ij} から作られたリーマン曲率テンゾルを表はす。

X_n に於ける公式

$$R_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot l}=K_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot l}+2\underset{0}{\nabla}_{[j}T_{|k|i]}^{\cdot\cdot l}+2T_{k[i}^{\cdot\cdot s}T_{|s|j]}^{\cdot\cdot l} \tag{9.4}$$

を用ふるならば (9.2), (9.3) より容易に $R_{ijb}^{\cdot\cdot\cdot a}$ を $\underset{0}{R}_{ijb}^{\cdot\cdot\cdot a}$ と $T_{ij}^{\cdot\cdot k}$ とで表はし得る。例へば $a=b$ のときは

$$R_{ijb}^{\cdot\cdot\cdot a}=\underset{0}{R}_{ijb}^{\cdot\cdot\cdot a}+2\sum_{\rho}[\underset{0}{\nabla}_{[j}T_{|a_\rho|i]}^{\cdot\cdot\cdot a_\rho}+T_{a_\rho[i}^{\cdot\cdot s}T_{|s|j]}^{\cdot\cdot\cdot a_\rho}]$$

となる。かやうな關係は (8.7), (8.8) よりも導き得る。

§10. リーマン型 $\overset{m}{X}_n$ を與へる Γ_{ij}^k. 第 7 節に記したやうにリーマン型の $\overset{m}{X}_n$ に於ては平行移動によつて X_n の m 次元體積が不變である。本節に於てはこのやうな接續の係數及び之に關聯する X_n の接續について研究する。

(7.6) 及び (8.5) より

$$\Gamma_{bi}^a=\underset{0}{P}_{bi}^a+T_{bi}^{\cdot\cdot a}=g^{ac}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^i}+M_{bic}\right) \tag{10.1}$$

故に

$$T_{bic}=M_{bic}-\underset{0}{M}_{bic}, \tag{10.2}$$

從つて第 7 節の結果によつて

定理 4. Γ_{bi}^a がリーマン型の $\overset{m}{X}_n$ を與へるための必要且十分なる條件は

$$T_{bia}=-T_{aib} \tag{10.3}$$

である。

次に P 接續を有する $\overset{m}{R}_n$ を考へ, 條件 (10.3) を X_n のテンソル $T_{ij}^{\cdot\cdot k}$ で表はさう。(8.7) より

$$T_{bia}=g_{ac}T_{bi}^{\cdot\cdot c}=g_{ab}T_{bi}^{\cdot\cdot b}+\sum g_{ac}T_{bi}^{\cdot\cdot c}$$

(但し第一項は和をとらない, 又第二項は $b\overset{*}{=}c$ なるものゝ和をとる) を得る。更に (3.3), (8.7) を代入して少し計算すれば

$$T_{bia}=m!\,mg_{[\alpha_1|s|}g_{\alpha_2[\beta_2}\cdots g_{\alpha_m]\beta_m}T_{\beta_1]i}^{\cdot\cdot s}, \qquad (s=1,\dots,n) \tag{10.4}$$

となる。これと (10.3) より

$$T_{[\beta_1|i|}^{\cdot\cdot[r_1}\delta_{\beta_2}^{r_2}\cdots\delta_{\beta_m}^{r_m]}=-T_{\cdot\cdot i[\beta_1}^{[r_1}\delta_{\beta_2}^{r_2}\cdots\delta_{\beta_m}^{r_m]} \tag{10.5}$$

$m=n$ のときはこれは

$$T_{si}^{\cdot\cdot s}=0 \tag{10.6}$$

となり,[1] $m<n$ のときは

$$T_{ij}^{\cdot\cdot k}=-T_{\cdot ji}^{k},\ (i\neq k); \qquad \sum_{\rho}T_{\beta_\rho i}^{\cdot\cdot\beta_\rho}=-\sum_{\rho}T_{\cdot i\beta_\rho}^{\beta_\rho} \tag{10.7}$$

---

(1) このときは又 (10.3) より直ちに $T_{1i1}=T_{1i}^{\cdot\cdot 1}=0$ を得る。これは即ち (10.6) と同じ式である。

となる。ところが (10.7) は

$$T_{ijk}=-T_{kji} \tag{10.8}$$

と等値である。依つて

定理 5. $\Gamma^k_{ij}(=\{{k \atop ij}\}+T_{ij}^{\cdot\cdot k})$ **が** m **次元體積を不變に保つための必要且十分條件は** $m=n$ **のときには** (10.6), $m<n$ **のときには** (10.8) **である。**

$m=n$ のときには (10.6) より直ちに

$$R_{ijs}^{\cdot\cdot\cdot s}=0 \tag{10.9}$$

を得る。即ち X_n は inhaltstreu である。[1] こゝに inhaltstreu は體積素が無限小の閉回路に沿ふて平行移動される時不變であることを意味する。逆に (10.9) からは, (9.4) より分るやうに $T_{si}^{\cdot\cdot s}=\partial_i f$ が出るのみで必ずしも (10.6) は出ない。依つて吾々の體積不變は inhaltstreu よりも強い條件であることが分る。

$m<n$ なるときは $T_{[ij]k}=S_{ijk}$, $T_{(ij)k}=H_{ijk}$ とおけば (10.8) より

$$H_{(ijk)}=0, \qquad \text{よつて} \quad H_{ijk}=-S_{kji}-S_{kij} \tag{10.10}$$

故に

$$\Gamma^k_{ij}=\{{k \atop ij}\}-S^k_{\cdot ij}-S^k_{\cdot ji}+S_{ij}^{\cdot\cdot k} \tag{10.11}$$

之が m $(<n)$ **次元體積を不變とする接續係數の一般形である。**占部氏は同一の結果を別の立場から求めてゐる。[2]

特に對稱接續のときには接續はリーマン型とならねばならないことは (10.8) より明らかである。

§11. ワイル型 $\overset{m}{X}_n$ **を與へる** Γ^k_{ij}. ワイル型 $\overset{m}{X}_n$ に於ては次式が成立する。

$$T_{bic}=\frac{1}{2}Q_i g_{bc}+M_{bic}-\underset{0}{M}_{bic} \tag{11.1}$$

從つて前節の T_{bic} の代りに $T_{bic}-\frac{1}{2}Q_i g_{bc}$ を用ひて考へると次の定理を得る。

定理 6. Γ^a_{bi} **がワイル型の** $\overset{m}{X}_n$ **を與へるための必要且十分なる條件は**

$$T_{bic}=Q_i g_{bc}-T_{cib} \tag{11.2}$$

である。

前節と同様の計算により $\overset{m}{R}_n$ に於て P 接續を考へるときには (11.2) は

---

(1) J. A. Schouten, *Der Ricci Kalkül*, (1924), 89.

(2) 占部賢, 本誌, **10**, (1940), 95.

$$T_{[\beta_1|i|}{}^{\cdot\cdot[\gamma_1}\delta^{\gamma_2}_{\beta_2}\cdots\delta^{\gamma_m]}_{\beta_m]}=\frac{Q_i}{m}\delta^{[\gamma_1}_{[\beta_1}\cdots\delta^{\gamma_m]}_{\beta_m]}-T^{[\gamma_1}{}_{\cdot i[\beta_1}\delta^{\gamma_2}_{\beta_2}\cdots\delta^{\gamma_m]}_{\beta_m]} \tag{11.3}$$

と等値であることが分る。所がこの式は $m=n$ のときは

$$T_{si}^{\cdot\cdot s}=\frac{1}{2}Q_i \tag{11.4}$$

となり, $m<n$ のときには

$$T_{ijk}=\frac{1}{m}Q_j g_{ik}-T_{kji} \tag{11.5}$$

となる。依つて

定理 7. Γ^k_{ij} が m 次元立體のなす角を不變に保つための必要且十分條件は $m=n$ のときは (11.4), $m<n$ のときは (11.5) である。

勿論條件 (11.4) は常に滿足されてゐる。これは第三節の m 次元立體の方向に關する理論からも明かである。

又前節に於けると同様の計算により, (11.5) を滿足する Γ^k_{ij} 即ち m $(m<n)$ **次元立體のなす角を不變に保つ Γ^k_{ij} の一般形は**

$$\Gamma^k_{ij}=\left\{{k \atop ij}\right\}+S_{ij}^{\cdot\cdot k}-S^k_{\cdot ji}-S^k_{\cdot ij}-\frac{1}{2m}(Q_i\delta^k_j+Q_j\delta^k_i-Q^k g_{ij}), \tag{11.6}$$

となる。これと同じ形の式が占部氏によつても得られてゐるが, その意味する所は多少異なる。これは m 次元體積の定義が吾々のと多少異るからである。

Q_i がグラデ$_1$エントのときには (10.9) が成立し X_n は inhaltstreu となる。しかしながら吾々の場合には體積不變ではなくて角不變の特別な場合を與へる。

§12. $\overset{m}{X}_n$ と $\overset{m'}{X}_n$, $(m+m'=n)$, の結びつけ。 $m+m'=n$ のときには $C^n_m=\nu=C^n_{m'}$ なる故 $\overset{m}{X}_n$ と $\overset{m'}{X}_n$ の量を次のやうに結びつけ得る。

$$V^{aa'}V_{ba'}=\delta^a_b,\quad V^{aa'}V_{ab'}=\delta^{a'}_{b'}.\quad (a,b,\ldots;\ a',b',\ldots=1,2,\ldots,\nu) \tag{12.1}$$

を滿足する混合 T テンソル $V^{aa'}, V_{aa'}$ (ダッシュの附かない添數と附いた添數は夫々 $\overset{m}{X}_n$, $\overset{m'}{X}_n$ に屬するものとする) を導入し, $\overset{m}{X}_n$ に於ける任意のベクトルを A_a (又は B^a) とするとき

$$V^{aa'}A_a=A^{a'},\qquad (\text{又は } V_{aa'}B^a=B_{a'}) \tag{12.2}$$

で定義される $\overset{m'}{X}_n$ の量 $A^{a'}$ (又は $B_{a'}$) を A_a (又は B^a) の $\overset{m'}{X}_n$ に於ける**共軛ベクトル**といふことにする。このときは明かに

$$A^{a'}V_{ba'}=A_b\,,\qquad (\text{又は } B_{a'}V^{ba'}=B^b) \tag{12.3}$$

となる。即ち A_b (又は B^b) は $A^{a'}$ (又は $B_{a'}$) の $\overset{m}{X}_n$ に於ける共軛ベクトルとなる。

今特に $B^a=g^{ab}A_b$ (又は $B^{a'}=g^{a'b'}A_{b'}$) なるとき即ち B^a, A_a が $\overset{m}{X}_n$ の同じベクトルの異なる種類の成分のとき，それ等の共軛ベクトルも亦同じベクトルの成分となる即ち $B^{a'}=g^{a'b'}A_{b'}$ (又は $B^a=g^{ab}A_b$) が成立するための條件を求むれば夫々

$$g_{ab}V^{aa'}V^{bb'}=g^{a'b'}\quad \text{即ち}\quad g^{a'b'}V_{aa'}V_{bb'}=g_{ab} \tag{12.4 a}$$

又は

$$g_{a'b'}V^{aa'}V^{bb'}=g^{ab}\quad \text{即ち}\quad g^{ab}V_{aa'}V_{bb'}=g_{a'b'} \tag{12.4 b}$$

となる。即ち g_{ab} (又は $g_{a'b'}$) が $g^{a'b'}$ (又は g^{ab}) と共軛となることである。ところが容易に分るやうに (12.4 a) と (12.4 b) とは等値であつて又

$$g^{ab}g^{a'b'}V_{bb'}=V^{aa'}\quad \text{又は}\quad g_{ab}g_{a'b'}V^{bb'}=V_{aa'} \tag{12.5}$$

とも等値である。

(12.4) 又は (12.5) が成立するとき $\overset{m}{X}_n$ と $\overset{m'}{X}_n$ とは互に共軛であるといひ，(12.2) の成立するベクトル $A_a, A_{a'}$ を互に共軛であるといふ。

A_a, B_a の共軛ベクトルを夫々 $A_{a'}, B_{a'}$ とすれば明かに

$$g_{ab}A^aA^b=g_{a'b'}A^{a'}A^{b'}\,,\qquad g_{ab}A^aB^b=g_{a'b'}A^{a'}B^{b'} \tag{12.6}$$

であるから

定理 8. **互に共軛な $\overset{m}{X}_n, \overset{m'}{X}_n$ に於て共軛な T ベクトルの長さ及び T ベクトルのなす角は相等しい。**

實例として $\overset{m}{R}_n, \overset{m'}{R}_n$ について考へる。即ち

$$g_{ab}=m!\,g_{[\alpha_1[\beta_1}\cdots g_{\alpha_m]\beta_m]}\,,\qquad g_{a'b'}=m'!\,g_{[\alpha'_1[\beta'_1}\cdots g_{\alpha'_m]\beta'_m]} \tag{12.7}$$

とする。このときには $V^{aa'}, V_{aa'}$ として夫々

$$V^{aa'}=\frac{1}{\sqrt{g}}\,\epsilon^{a_1\cdots a_m a'_1\cdots a'_m}\,,\qquad V_{aa'}=\sqrt{g}\,\epsilon_{a_1\cdots a_m a'_1\cdots a'_m} \tag{12.8}$$

を用ひれば良い。(12.7) 及び (12.8) に對して (12.4), (12.5) の成立することは容易に證明できる。

特に n が偶數で $m=m'$ のときには (12.2) による對應は $\overset{m}{X}_n$ の自己對應

を與へる。四次元リーマン空間に於て一般化されたマックスウエルの式[1]

$$\frac{\sqrt{g}}{2}\epsilon_{ijlm}F^{lm}=F_{ij} \tag{12.9}$$

を

$$V_{aa'}F^{a}=F_{a'} \tag{12.10}$$

と書直すならば，これは即ち $\overset{2}{X}_4$ に於て F_a が自分自身と共軛なことを示す式に他ならない。

さて互に共軛な $\overset{m}{X}_n$ と $\overset{m'}{X}_n$ に於てベクトルの微分を考へるならば，第五節の理論より容易に

定理 9. ベクトルの共變微分の共軛ベクトルと，共軛ベクトルの共變微分とが一致するための必要十分條件は

$$\delta V_{aa'}=\delta V^{aa'}=0 \tag{12.11}$$

である。

かやうな場合の實例は $V_{aa'}, V^{aa'}$ として (12.8), 又接續として $\underset{0}{P}$ 接續を用ひれば得られる。

又

$$2\nabla_{[i}\nabla_{j]}v^{a}=-R_{ijb}^{\cdots a}v^{b}, \qquad 2\nabla_{[i}\nabla_{j]}w_{a'}=R_{ija'}^{\cdots b'}w_{b'} \tag{12.12}$$

より直ちに

定理 10. 互に共軛なる $\overset{m}{X}_n, \overset{m'}{X}_n$ に於て (7.5), (12.12) が成立するときは兩者の曲率テンゾルも亦共軛である。

§13. 附記。$m+m'\neq n$ なるときの $\overset{m}{X}_n, \overset{m'}{X}_n$ の對應關係については十分に研究されて居ない。その一部として $\overset{m}{R}_n, \overset{m'}{R}_n$, $(m'=m+p\leqq n)$ の基本テンゾル $\overset{m}{g}_{ab}$ と $\overset{m'}{g}_{a'b'}$ との關係の一つを掲げやう。

一般に次の關係式が成立する (計算省略)。

$$m'!\,m!\,g_{[\alpha_1[\beta_1}\cdots g_{\alpha_m\beta_m}\cdots g_{\alpha_{m+p}]\beta_{m+p}]}g^{[\alpha_1[\beta_1}\cdots g^{\alpha_m]\beta_m]}$$

$$=\frac{p!}{m!}\frac{(n-p)!}{(n-m-p)!}g_{[\alpha_{m+1}[\beta_{m+1}}\cdots g_{\alpha_{m+p}]\beta_{m+p}]} \tag{13.1}$$

但し $m'=m+p$, $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m$, $\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_m$ とする。故に今 $a=(\alpha_1\cdots\alpha_m)$, $b=(\beta_1\cdots\beta_m)$; $c=(\alpha_{m+1}\cdots\alpha_{m'})$, $d=(\beta_{m+1}\cdots\beta_{m'})$ とし又

$$\underset{m}{g}_{\underset{p}{a\cdot c},\,\underset{m}{b}\cdot\underset{p}{d}}\equiv m'!\,g_{[\alpha_1[\beta_1}\cdots g_{\alpha'_{m}]\beta_{m'}]}, \qquad g^{a\cdot c,\,b\cdot d}\equiv m'!\,g^{[\alpha_1[\beta_1}\cdots g^{\alpha_{m'}]\beta_{m'}]}$$

(1) 竹野，本誌，**11** (1942), 296.

とおけば

$$g_{a\cdot c,\,b\cdot d}g^{ab}=C_m^{n-p}g_{cd} \qquad \text{同様に} \quad g^{a\cdot c,\,b\cdot d}g_{ab}=C_m^{n-p}g^{cd} \qquad (12.3)$$

を得る。特に第一式で $(p\to 1)$, $(m\to 1,\ p\to m)$ とおけば夫々

$$g_{i\cdot a,\,j\cdot b}g^{ab}=C_m^{n-1}g_{ij}, \quad g_{i\cdot a,\,j\cdot b}g^{ij}=(n-m)g_{ab}, \quad (m\leqq n-1) \qquad (12.4)$$

を得る。これ即ち g_{ij} と $\overset{m}{g}_{ab}$ との關係を與へる式である。第二式からも同様な式が得られる。

$\overset{m}{R}_n$ に導入された單位ベクトルの直交系についても亦同様な式が導かれるがこゝには省略する。