弱準素イデヤルに由るイデヤル分解

森　新　治　郎

(昭和 17 年 6 月 8 日受附)

可換環 $\mathfrak{R}$ の任意のイデヤル $\mathfrak{a}$ が有限個の强準素イデヤルの共通分として表はされるには，如何なる條件が必要且充分であるか。この問題に關して著者が以前に論じたとき,[1] 素イデヤルの約鎖律の成立を假定した。從つて完全な解決を得たとはいへない。この條件についての研究は他日に讓り，本論では强準素イデヤルについての上の研究を弱準素イデヤルの場合に擴張して，

可換環 $\mathfrak{R}$ が如何なる構造を持つときに限つて，$\mathfrak{R}$ のイデヤルが有限個の弱準素イデヤルの共通分として表はされるか。

といふ問題を取扱ふ。然し $\mathfrak{R}$ には矢張素イデヤルの約鎖律を假定し，これに由つて研究を進めてゐるから，完全な解決に達したとはいへない。この問題は Krull[2] 等に由つて論じられたが，Stiemke の無限次代數體に於てのやうに一重環の場合であつた。然し本論は主として多重環の場合を論じてゐるから，Stiemke の體に於てのイデヤル論はその特殊の場合として含まれる。又著者の以前の研究[3]と關聯して，Stiemke の無限次代數體の整數を係數とする多項式の環に於て，イデヤル分解を論じ得るが，その詳細は追つて發表する。

必　要　條　件

本節では基礎の環 $\mathfrak{R}$ を可換とし，その上次の條件を假定する。

條件[4]　素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_3 \subset \cdots$ に於て各イデヤルは直前のイデヤルの眞の約數であるとき，この連鎖は有限個の項で終る。

定理 1. 環 $\mathfrak{R}$ の凡てのイデヤルが有限個の弱準素イデヤルの共通分として表はされるならば，$\mathfrak{R}$ は次の性質を持つ。

任意のイデヤル $\mathfrak{a}$ に關して冪零でない元素 r で連鎖

---

(1) S. Mori, 本誌；**11** (1942), 129.
E. Kamei, Proc. Imp. Acad. Tokyo **XVII** (1941), 95.

(2) W. Krull, Math. Zeit. **29** (1928), 42.
M. Moriya, 北海道帝國大學理學部紀要 **3** (1935), 107.

(3) S. Mori, 本誌, **10** (1940), 1.

(4) この條件が必要條件であるか否かは未だ不明である。

$$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:(r)\subset\mathfrak{a}:(r^2)\subset\mathfrak{a}:(r^3)\subset\cdots$$

を作れば，最初の有限個の項から後は皆イデヤル $\mathfrak{r}$ に等しくなる。又このやうにして得るイデヤル $\mathfrak{r}$ の總數は，$\mathfrak{a}$ が一定である限り有限である。

證 假定に由つて

(1) $$\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n,$$

此處で $\mathfrak{q}_i$ は素イデヤル $\mathfrak{p}_i$ に屬する弱準素イデヤルを示してゐる。r を $\mathfrak{a}$ に關して羃零でない元素とすれば，r が $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots$ の凡てに關して羃零ではあり得ない。それで r は $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_k$ $(1\leqq k\leqq n)$ に關しては羃零でなく，$\mathfrak{q}_{k+1}, \dots, \mathfrak{q}_n$ に關しては羃零であるとする。これに由つて

(2) $$r\not\subset\mathfrak{p}_i\ (i=1,\dots,k),\qquad r\subset\mathfrak{p}_j\ (j=k+1,\dots,n)$$

なる關係を得る。それ故に m を適當に大きく取れば，(1) から

$$\mathfrak{a}:(r^m)=\mathfrak{q}_1:(r^m)\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n:(r^m),$$

$$\mathfrak{q}_i:(r^m)=\mathfrak{q}_i\ (i=1,\dots,k),\qquad \mathfrak{q}_j:(r^m)=\mathfrak{R}\ (j=k+1,\dots,n)$$

を生ずる。從つて

(3) $$\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_k=\mathfrak{a}:(r^m)=\mathfrak{a}:(r^{m+1})=\cdots=\mathfrak{r}$$

$\mathfrak{a}$ に關して羃零でない他の元素 r' から，前と同樣にして得たイデヤルを $\mathfrak{r}'$ とすれば，

$$\mathfrak{q}_{i_1}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_{i_{k'}}=\mathfrak{a}:(r'^{m'})=\mathfrak{a}:(r'^{m'+1})=\cdots=\mathfrak{r}'$$

となり，$\mathfrak{q}_{i_1}, \dots, \mathfrak{q}_{i_{k'}}$ は (1) に於ける $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$ の一部分である。それ故に $\mathfrak{r}'$ が $\mathfrak{r}$ と異つてゐるならば，組 $\mathfrak{q}_{i_1}, \dots, \mathfrak{q}_{i_{k'}}$ は組 $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_k$ と異なつてゐる。從つて上のやうな連鎖に由つて生ずるイデヤル $\mathfrak{r}$ の總數は，$\mathfrak{a}$ が一定である限り有限である。

充 分 條 件

本節では基礎の環 $\mathfrak{R}$ は可換で，次の二條件を滿足するものとする。

條件 1. 素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\cdots\subset\mathfrak{p}_i\subset\mathfrak{p}_{i+1}\subset\cdots$ が與へられ，$\mathfrak{p}_{i+1}$ は $\mathfrak{p}_i$ の眞の約數であるならば，この連鎖は有限個の項で終る。

條件 2. $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{R}$ の任意のイデヤルであり，r が $\mathfrak{a}$ に關して羃零でない元素であるとき，イデヤル商の連鎖 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:(r)\subset\mathfrak{a}:(r^2)\subset\cdots$ の最初の相異なる有限個の項から後は皆イデヤル $\mathfrak{r}$ に等しくなる。このやうなイデヤル $\mathfrak{r}$ の總數は $\mathfrak{a}$ が一定である限り有限である。

上の二條件を原として環 $\mathfrak{R}$ のイデヤル分解を論ずるのであるが，先づ用語の説明から始める。

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{R}$ と異なるイデヤルとし，これを含む一つの素イデヤルを $\mathfrak{p}$ とする。若し $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}:(r)$, $r\not\subset\mathfrak{a}$ なるイデヤル $\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{p}$ に屬する弱準素イデヤルであるやうに，元素 r を取り得るならば，$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{a}$ **に屬する素イデヤル**といふ。

イデヤル $\mathfrak{a}$ が素イデヤル $\mathfrak{p}$ に含まれ，兩者の間には他の素イデヤルが存在し得ないとき，$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{a}$ **の最小素イデヤル**といふ。

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ を二つのイデヤルとする。$\mathfrak{a}$ の少くとも一つの元素が $\mathfrak{b}$ に關して冪零でないとき，$\mathfrak{a}$ **は** $\mathfrak{b}$ **に關して冪零でない**といひ，$\mathfrak{a}$ の凡ての元素が $\mathfrak{b}$ に關して冪零であるならば，$\mathfrak{a}$ **は** $\mathfrak{b}$ **に關して冪零である**といふ。

上の定義に於て $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{b}$ に關して冪零であつても，$\mathfrak{a}^n\leqq\mathfrak{b}$ なる有限の整數 n が存在するとは限らない。

定理 2. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{R}$ の半素イデヤルとすれば，$\mathfrak{h}$ に屬する素イデヤルは有限個で，互に他を含まない。これらを $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_n$ とすれば，$\mathfrak{h}=\mathfrak{p}_1\frown\dots\frown\mathfrak{p}_n$ となる。

證 $\mathfrak{h}$ が素イデヤルならば，定理は明かに成立つ。それで $\mathfrak{h}$ を素でないとすれば，

$$r_1r_1'\subset\mathfrak{h},\qquad r_1\not\subset\mathfrak{h},\qquad r_1'\not\subset\mathfrak{h}$$

なる二元素 r_1, r_1' が存在する。これからイデヤル商 $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}:(r_1')$ を作れば，$r_1\subset\mathfrak{h}_1$ に由つて $\mathfrak{h}_1\supset\mathfrak{h}$ を得る。若し $\mathfrak{h}_1$ が半素イデヤルでないならば，$r'\not\subset\mathfrak{h}_1$, $r'^k\subset\mathfrak{h}_1$ なる元素 r' が存在し $(r'r_1')^k\subset\mathfrak{h}$ となる。然るに $\mathfrak{h}$ は半素イデヤルであるから $r'r_1'\subset\mathfrak{h}$, 従つて $r'\subset\mathfrak{h}_1$ なる矛盾を生ずる。それ故に $\mathfrak{h}_1$ は半素イデヤルであつて，$\mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}:(r_1')=\mathfrak{h}:(r_1'^2)=\cdots$ となる。$\mathfrak{h}_1$ が素イデヤルであるならば，これは $\mathfrak{h}$ に屬する素イデヤルである。若し素でないならば，前と同様にして

$$\mathfrak{h}_2=\mathfrak{h}_1:(r_2')=\mathfrak{h}:(r_1'r_2')=\mathfrak{h}:(r_1'r_2')^2=\cdots,\ r_1'r_2'\not\subset\mathfrak{h},\ \mathfrak{h}_2\supset\mathfrak{h}_1\supset\mathfrak{h}$$

なる半素イデヤル $\mathfrak{h}_2$ を得る。然し條件 2 に由つてこの手續は有限回で終らねばならないから，遂に $\mathfrak{h}$ に屬する一つの素イデヤルを得る。又條件 2 に由つて，このやうな素イデヤルは有限個であるから，これらの凡てを $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\dots$, $\mathfrak{p}_n$ とすれば，これが $\mathfrak{h}$ に屬する凡ての素イデヤルになつてゐる。そして $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{h}:(r_i)$, $r_i\not\subset\mathfrak{h}\ (i=1, \dots, n)$ なる元素 r_i が存在し，$\mathfrak{h}$ は半素イデヤルであ

るから，$\mathfrak{p}_i$ は r_i を含まない。從つて $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ は互に他を含まない。

$\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ の各々は $\mathfrak{h}$ を含むから，$\mathfrak{h} \subseteqq \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_n$ となる。若し $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_n$ ならば，$\mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_n$ には含まれ $\mathfrak{h}$ には含まれない元素 r を適當に取つて，前と同様に $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} : (r)$ を作れば，これは $r_1, \dots, r_n$ を含む素イデヤルで，$\mathfrak{h}$ の眞の約數である。從つてこの $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}_i \, (i=1, \dots, n)$ の一つである。然るに $r_1, \dots, r_n$ を含むから矛盾する。故に $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_n$ である。

半素イデヤルから任意のイデヤルに移れば，その最小素イデヤル及びそれに屬する素イデヤルに就いて次の定理が成立する。

定理 3. $\mathfrak{a}$ を環 $\mathfrak{R}$ の任意のイデヤルとすれば，$\mathfrak{a}$ を含む最小素イデヤルは有限個存在し，これらは $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルである。

證 $\mathfrak{a}$ に關して冪零である凡ての元素の集合を $\mathfrak{h}$ とすれば，$\mathfrak{h}$ は半素イデヤルであり，$\mathfrak{a}$ に關して冪零である。前定理から $\mathfrak{h}$ に屬する素イデヤルは有限個であるから，これらを $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ とすれば，前定理に由つて $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n \subseteqq \mathfrak{h}$ なる關係が成立し，$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{h} : (r_i)$，$r_i \not\subset \mathfrak{p}_i \, (i=1, \dots, n)$ なる元素 r_i が存在する。r_i は $\mathfrak{p}_i$ に含まれないから，$\mathfrak{a}$ に關して冪零ではない。$\mathfrak{p}_i$ は他の素イデヤル $\mathfrak{p}_j \, (j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$ には含まれない元素 r_i' を含むから，$r_i r_i' \subset \mathfrak{h}$，$(r_i r_i')^k \subset \mathfrak{a}$ となる。故に $r_i'^k \subset \mathfrak{a} : (r_i^k)$，$r_i'^k \not\subset \mathfrak{h}$，$r_i \not\subset \mathfrak{h}$ に於て，k を適當に大きくすれば，條件 2 から

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a} : (r_i^k) = \mathfrak{a} : (r_i^{k+1}) = \cdots。$$

又 $r_i \not\subset \mathfrak{p}_i$ に由つて $\mathfrak{p}_i \geqq \mathfrak{r}$ となる。然も $\mathfrak{p}_i$ は $\mathfrak{r}$ に關して冪零である。そうでないと，$\mathfrak{p}_i$ の元素 p_i が $\mathfrak{r}$ に關して冪零でなくなり，$p_i r_i \subset \mathfrak{h}$ から $p_i^k r_i^k \subset \mathfrak{a}$，$p_i^k \subset \mathfrak{r}$ となつて矛盾を生ずる。若し $\mathfrak{r}$ が $\mathfrak{p}_i$ に屬する準素イデヤルでないとすれば，$b p_i \subset \mathfrak{r}$，$b \not\subset \mathfrak{p}_i$，$p_i \subset \mathfrak{p}_i$，$p_i \not\subset \mathfrak{r}$ なる二元素 b, p_i が存在する。これから連鎖 $\mathfrak{a} : (r_i b)^{k'} \subseteqq \mathfrak{a} : (r_i b)^{k'+1} \subseteqq \cdots$ を作れば，條件 2 に由つて $\mathfrak{r} \subsetneqq \mathfrak{r}' \subseteqq \mathfrak{p}_i$ なるイデヤル $\mathfrak{r}'$ を得る。又條件 2 に由つて $\mathfrak{r}$ や $\mathfrak{r}'$ のやうなイデヤルは有限個であるから，適當に元素 r を取れば $\mathfrak{p}_i \geqq \mathfrak{q}_i = \mathfrak{a} : (r^k) = \mathfrak{a} : (r^{k+1}) = \cdots$ となり，$\mathfrak{q}_i$ は $\mathfrak{p}_i$ に屬する弱準素イデヤルとなる。故に $\mathfrak{p}_i$ は $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルである。

次に $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{p}' \supset \mathfrak{a}$ なる素イデヤル $\mathfrak{p}'$ があれば，$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n$ が $\mathfrak{p}'$ に含まれないことから，イデヤル $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n$ は $\mathfrak{a}$ に關して冪零でない。然るに $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n \geqq \mathfrak{h}$ に由つて $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n$ は $\mathfrak{a}$ に關して冪零であるから，矛盾を生ずる。故に $\mathfrak{p}_i$ は

$\mathfrak{a}$ の最小素イデヤルである。そして $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ 以外に $\mathfrak{a}$ の最小素イデヤルが存在しないことは, $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_n \subseteqq \mathfrak{h}$ に由つて明かである。

定理 4. $\mathfrak{a}$ を環 $\mathfrak{R}$ の任意のイデヤルとし, $\mathfrak{a}$ を含む任意の素イデヤルを $\mathfrak{p}$ とする。$\mathfrak{p}$ の有限個の元素 $p_1, p_2, \cdots p_m$ を適當に選んで, イデヤル $\mathfrak{b}=(p_1, p_2, \dots, p_m, \mathfrak{a})$ を作れば, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{b}$ に關して冪零となる。

證 $\mathfrak{h}_{11}$ を $\mathfrak{a}$ に屬する半素イデヤルとする。若し $\mathfrak{h}_{11}=\mathfrak{p}$ であるならば, $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ であつて定理は成立する。故に $\mathfrak{h}_{11}\neq\mathfrak{p}$ とすれば, 定理 2 に由つて $\mathfrak{h}_{11}$ に屬する有限個の素イデヤル $\mathfrak{p}_{11}, \mathfrak{p}_{12}, \dots, \mathfrak{p}_{1n_1}$ が存在して

(1) $$\mathfrak{h}_{11}=\mathfrak{p}_{11}\cap\mathfrak{p}_{12}\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_{1n_1}$$

となる。これから $\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{12}\cdots\mathfrak{p}_{1n_1}\subseteqq\mathfrak{h}_{11}\subset\mathfrak{p}$ を得るから, $\mathfrak{p}_{11},\dots,\mathfrak{p}_{1n_1}$ の一つは $\mathfrak{p}$ に含まれねばならぬ。それ故に

(2) $$\mathfrak{p}_{11}\subseteqq\mathfrak{p}$$

とする。今

(3) $$\mathfrak{h}'_{11}=\mathfrak{p}_{11}\cap\mathfrak{p}_{13}\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_{1n_1}\supset\mathfrak{h}_{11}$$

と置けば, $\mathfrak{h}'_{11}$ は半素イデヤルである。元素 h'_{11} を $\mathfrak{h}'_{11}$ に含まれ, $\mathfrak{h}_{11}$ に含まれないものとし, イデヤル $(h'_{11}, \mathfrak{h}_{11})$ に屬する半素イデヤルを $\mathfrak{h}_{12}$ とすれば, (1) に由つて $\mathfrak{p}_{1i}(\mathfrak{p}_{11}\cdots\mathfrak{p}_{1i-1}\mathfrak{p}_{1i+1}\cdots\mathfrak{p}_{1n_1})\subseteqq\mathfrak{h}_{11}$, $\mathfrak{p}_{11}\cdots\mathfrak{p}_{1i-1}\mathfrak{p}_{1i+1}\cdots\mathfrak{p}_{1n_1}\nsubseteq\mathfrak{p}_{1i}$ $(i=1, 3, \dots, n_1)$ であるから, $\mathfrak{p}_{11}, \mathfrak{p}_{13}, \dots, \mathfrak{p}_{1n_1}$ はいづれも $\mathfrak{h}_{12}$ に屬する素イデヤルである。$\mathfrak{p}'_i\ (i=1,2,\dots,s_1)$ を $\mathfrak{h}_{12}$ に屬する他の素イデヤルとすれば, (1) から $\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{12}\cdots\mathfrak{p}_{1n_1}\subseteqq\mathfrak{h}_{11}\subset\mathfrak{h}_{12}\subseteqq\mathfrak{p}'_i$ を得る。從つて定理 2 に由つて $\mathfrak{p}_{12}\subseteqq\mathfrak{p}'_i$ を生ず。今 $\mathfrak{p}_{12}=\mathfrak{p}'_i$ とすれば, h'_{11} は $\mathfrak{p}_{11}, \mathfrak{p}_{12}, \dots, \mathfrak{p}_{1n_1}$ のいづれにも含まれ, (1) に由つて $\mathfrak{h}_{11}$ に含まれて不都合だ。それ故に $\mathfrak{p}_{12}\subset\mathfrak{p}'_i$ である。$\mathfrak{h}'_{11}$ の元素で $\mathfrak{h}_{12}$ に含まれず, $\mathfrak{p}_{11}\cap\mathfrak{p}_{13}\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_{1n_1}\cap\mathfrak{p}'_2\cap\mathfrak{p}'_3\cap\cdots\cap\mathfrak{p}'_{s_1}$ に含まれるもの h'_{12} を取り, $(h'_{12}, \mathfrak{h}_{12})$ に屬する半素イデヤル $\mathfrak{h}_{13}$ を作る。(3) から

$$\mathfrak{h}'_{11}\supset\mathfrak{h}_{12}\supset(h'_{11},\mathfrak{h}_{11}),\quad \mathfrak{h}_{12}=\mathfrak{p}_{11}\cap\mathfrak{p}_{13}\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_{1n_1}\cap\mathfrak{p}'_1\cap\mathfrak{p}'_2\cap\cdots\cap\mathfrak{p}'_{s_1}$$

であるから, 上のやうに元素 h'_{12} を選び得るのである。

前の場合と同様に $\mathfrak{p}_{11}, \mathfrak{p}_{13}, \dots, \mathfrak{p}_{1n_1}, \mathfrak{p}'_2, \mathfrak{p}'_3, \dots, \mathfrak{p}'_{s_1}$ は $\mathfrak{h}_{13}$ に屬する素イデヤルである。他にこれに屬する素イデヤル $\mathfrak{p}''_j$ が存在すれば, $\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{13}\cdots\mathfrak{p}_{1n_1}\mathfrak{p}'_1\mathfrak{p}'_2\cdots\mathfrak{p}'_{s_1}\subseteqq\mathfrak{h}_{12}\subset\mathfrak{h}_{13}\subset\mathfrak{p}''_j$ に由つて $\mathfrak{p}'_1\subseteqq\mathfrak{p}''_j$ となる。此處で $\mathfrak{p}''_j$ は $\mathfrak{p}'_1$ の眞の約數である。何となれば若し $\mathfrak{p}''_j=\mathfrak{p}'_1$ であれば, h'_{12} が $\mathfrak{h}_{12}$ に含まれて矛盾を生ずる。それ故に $\mathfrak{p}_{12}\subset\mathfrak{p}'_1\subset\mathfrak{p}''_j$ なる關係を得る。然し條件 1 に由つて, この連鎖は有

限で終り, $\mathfrak{h}'_{11}$ は

(4) $$(h'_{11}, h'_{12}, \dots, h'_{1k_1}, \mathfrak{h}_{11})$$

に關して羃零となる。次に

(5) $$\mathfrak{h}'_{12}=\mathfrak{p}_{11}\cap\mathfrak{p}_{14}\cap\dots\cap\mathfrak{p}_{1n_1}\supset\mathfrak{h}'_{11}$$

とすれば, $\mathfrak{h}'_{12}$ は半素イデヤルであつて $\mathfrak{h}'_{12}\subset\mathfrak{p}_{11}\subseteqq\mathfrak{p}$ となり, それに屬する素イデヤルは $\mathfrak{p}_{11}, \mathfrak{p}_{14}, \dots, \mathfrak{p}_{1n_1}$ である。それで前と同様にして元素 $h'_{21}, h'_{22}, \dots, h'_{2k_2}$ を $\mathfrak{h}_{12}$ 内に順次適當に選べば, $\mathfrak{h}'_{12}$ は $(h'_{21}, h'_{22}, \dots, h'_{2k_2}, \mathfrak{h}'_{11})$ に關して羃零となる。斯くして $\mathfrak{p}_{11}$ は

(6) $$(h'_{11},\dots,h'_{1k_1},h'_{21},\dots,h'_{2k_2},\dots,h'_{n_1-11},\dots,h'_{n_1-1\,k_{n_1-1}},\mathfrak{a})$$

に關して羃零となる。(2) に於て $\mathfrak{p}_{11}=\mathfrak{p}$ なれば, $\mathfrak{b}=(h'_{11},\dots,h'_{1k_1},\dots,h'_{n_1-1k_{n_1-1}},\mathfrak{a})$ とすれば定理は成立する。

$\mathfrak{p}_{11}\subset\mathfrak{p}$ なるときは, $\mathfrak{p}$ の中に $\mathfrak{p}_{11}$ に含まれない元素 p を取り, イデヤル $\mathfrak{a}_1=(p,\mathfrak{p}_{11})$ を上の場合の $\mathfrak{a}$ と見做して, 同様に進めば, $\mathfrak{a}_1$ に屬する一つの素イデヤル $\mathfrak{p}_{21}$ は $\mathfrak{p}_{11}\subset\mathfrak{p}_{21}\subseteqq\mathfrak{p}$ を滿足し, その上

(7) $$(h''_{11}, h''_{12},\dots,h''_{n_2-11},\dots h''_{n_2-1\,k_{n_2-1}}, p, \mathfrak{p}_{11})$$

に關して羃零となる。條件 1 に由つて素イデヤルの連鎖は有限で終るから, (6) 及び (7) に由つて $\mathfrak{p}$ は, 適當に選んだ有限個の $\mathfrak{p}$ の元素 $p_1,p_2,\dots,p_m$ で作れるイデヤル $\mathfrak{b}=(p_1,p_2,\dots,p_m,\mathfrak{a})$ に關して羃零となる。

定理 5. 環 $\mathfrak{R}$ の任意のイデヤル $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルは有限個である。

證 $\mathfrak{p}_i$ を $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルとすれば, 定義に由つて

(1) $$\mathfrak{q}_i=\mathfrak{a}:(r_i),\ r_i\not\subset\mathfrak{a}$$

なる $\mathfrak{p}_i$ に屬する弱準素イデヤル $\mathfrak{q}_i$ が存在する。從つて $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルが連鎖

(2) $$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\dots\subset\mathfrak{p}_n$$

を作るとすれば, 條件1に由つてこの連鎖の最大素イデヤル $\mathfrak{p}_n$ が存在する。(2) に由つて $\mathfrak{q}_n$ には含まれ, 他の $\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2,\dots,n-1)$ には含まれない元素 r'_n が存在し, これに對しては (1) に由つて

$$\mathfrak{r}_n=\mathfrak{a}:(r'_n)^{k_n}=\mathfrak{a}:(r'_n)^{k_n+1}=\cdots,\ \mathfrak{r}_n\supset r_n,\ \mathfrak{r}_n\not\ni r_{n-1},\ \mathfrak{r}_n\not\ni r_{n-2},\dots,\ \mathfrak{r}_n\not\ni r_1$$

なる關係を生ずる。次に $\mathfrak{q}_n$ 及び $\mathfrak{q}_{n-1}$ には含まれ, 他の $\mathfrak{p}_i$ $(i=1,\ 2,\dots,n-2)$ には含まれない元素 r'_{n-1} を取れば,

$$\mathfrak{r}_{n-1}=\mathfrak{a}:(r'_{n-1})^{k_{n-1}}=\mathfrak{a}:(r'_{n-1})^{k_{n-1}+1}=\cdots,$$

$$\mathfrak{r}_{n-1}\supset r_n,\ \mathfrak{r}_{n-1}\supset r_{n-1},\ \mathfrak{r}_{n-1}\not\supset r_{n-2},\ \ldots,\ \mathfrak{r}_{n-1}\not\supset r_1$$

を得る。斯くして順次 $\mathfrak{r}_{n-2},\ldots,\mathfrak{r}_1$ を得るが，これらは皆相異なつてゐる。然るに條件 2 に由れば，このやうなイデヤル $\mathfrak{r}_i$ は有限個だけ存在し得るから，連鎖 (2) の項數は有限である。

定理 3 から $\mathfrak{a}$ の最小素イデヤルは有限個であるから，これらを $\mathfrak{p}_{11},\mathfrak{p}_{12},\ldots,\mathfrak{p}_{1n_1}$ とする。次に $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤル $\mathfrak{p}_{21},\mathfrak{p}_{22},\ldots,$ を適當に選べば，上に得た結果に由つて，これらは $\mathfrak{p}_{11},\ldots,\mathfrak{p}_{1n_1}$ の少くとも一つを含み，それとの間には $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルを有しない。從つて $\mathfrak{p}_{21},\mathfrak{p}_{22},\ldots,\mathfrak{p}_{2m},\ldots$ は互に他を含まない。條件 2 に於けるイデヤル $\mathfrak{r}$ の總數 l は有限であるから，$l<m$ とすれば，矛盾な生ずることを次に示そう。$\mathfrak{p}_{21},\mathfrak{p}_{22},\ldots,\mathfrak{p}_{2m}$ に對應する弱準素イデヤル $\mathfrak{q}_{21},\mathfrak{q}_{22},\ldots,\mathfrak{q}_{2m}$ は互に他を含み得ないから，$\mathfrak{q}_{21}$ に含まれ $\mathfrak{p}_{22},\ldots,\mathfrak{p}_{2m}$ のどれにも含まれないで，從つて $\mathfrak{a}$ に關して冪零でない元素 r'_{21} を取れば，(1) に由つて

$$\mathfrak{r}_{21}=\mathfrak{a}:(r'_{21})^{k'_1}=\mathfrak{a}:(r'_{21})^{k'_1+1}=\cdots,\ \mathfrak{r}_{21}\supset r_{21},\ \mathfrak{r}_{21}\not\supset r_{22}\cdots\mathfrak{r}_{21}\not\supset r_{2m}$$

同様に $\mathfrak{q}_{22}$ に含まれ $\mathfrak{p}_{21},\mathfrak{p}_{23},\ldots,\mathfrak{p}_{2m}$ のどれにも含まれず，從つて $\mathfrak{a}$ に關して冪零でない元素 r'_{22} を取れば，(1) に由つて

$$\mathfrak{r}_{22}=\mathfrak{a}:(r'_{22})^{k'_2}=\mathfrak{a}:(r'_{22})^{k'_2+1}=\cdots,\ \mathfrak{r}_{22}\not\supset r_{21},\ \mathfrak{r}_{22}\supset r_{22}\cdots\mathfrak{r}_{22}\not\supset r_{2m}$$

斯くして條件 2 の性質を持つイデヤル $\mathfrak{r}$ を，その總數 l よりも多く作り得ることになつて，矛盾である。それ故に上に述べた素イデヤル $\mathfrak{p}_{21},\mathfrak{p}_{22},\cdots\mathfrak{p}_{2m},\cdots$ は有限個である。

上の二つの結果を綜合すれば，$\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルの總數は有限でなければならぬ。

定理 6. $\mathfrak{p}$ をイデヤル $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルとすれば，$\mathfrak{a}$ を含み $\mathfrak{p}$ に屬する弱準素イデヤル $\mathfrak{q}$ を適當に選んで，

$$\mathfrak{a}:(r),\qquad r\not\subset\mathfrak{a}$$

が $\mathfrak{p}$ に屬する弱準素イデヤルになる様な元素 r は $\mathfrak{q}$ 內に存在しないやうになし得る。

證 定理 4 に由つて $\mathfrak{p}$ は

$$\mathfrak{b}=(p_1,p_2,\ldots,p_m,\mathfrak{a}),\qquad p_i\subset\mathfrak{p}$$

に關して冪零であり，p_1 は $\mathfrak{a}$ に關して冪零でないと見做してよい。從つて

條件 2 に由つて

(1) $$\mathfrak{r}_1=\mathfrak{a}:(p_1^{n_1})=\mathfrak{a}:(p_1^{n_1+1})=\cdots\supset\mathfrak{a}:(p_1^{n_1-1})$$

なる正整數 n_1 が存在する。次に

(2) $$\mathfrak{a}_1=(p_1^{n_1},\mathfrak{a})$$

と置いて, p_2 は $\mathfrak{a}_1$ に關して冪零でないとすれば,

(3) $$\mathfrak{r}_2=\mathfrak{a}_1:(p_2^{n_2})=\mathfrak{a}_1:(p_2^{n_2+1})=\cdots\supset\mathfrak{a}_1:(p_2^{n_2-1})$$

なる正整數 n_2 を選び得る。若し p_2 が $\mathfrak{a}_1$ に關して冪零であるならば, $p_2^{n_2}\subset\mathfrak{a}_1$ なるやうに n_2 をとる。又前と同樣に

(4) $$\mathfrak{a}_2=(p_2^{n_2},\mathfrak{a}_1)=(p_1^{n_1},p_2^{n_2},\mathfrak{a})$$

と置いて, 前と同樣な方法で $\mathfrak{r}_3$ を得る。順次斯くして,

(5) $$\mathfrak{r}_m=\mathfrak{a}_{m-1}:(p_m^{n_m})=\mathfrak{a}_{m-1}:(p_m^{n_m+1})=\cdots\supset\mathfrak{a}_{m-1}:(p_m^{n_m-1})$$

$$\mathfrak{a}_m=(p_m^{n_m},\mathfrak{a}_{m-1})=(p_1^{n_1},p_2^{n_2},\ldots,p_m^{n_m},\mathfrak{a})$$

を得る。次に

(6) $$\mathfrak{b}'=(p_1^{n_1}\mathfrak{R},p_2^{n_2}\mathfrak{R},\ldots p_m^{n_m}\mathfrak{R},\mathfrak{a})$$

とすれば, $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{b}'$ に關して冪零であり, 從つて $\mathfrak{p}$ も亦 $\mathfrak{b}'$ に關して冪零である。

今 $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{q}'=\mathfrak{a}:(r)$, $r\not\subset\mathfrak{a}$ なる弱準素イデヤル $\mathfrak{q}'$ が $\mathfrak{p}$ に屬し, その上 $r\subset\mathfrak{b}'$ と假定すれば, (6) から

(7) $$r\equiv p_1^{n_1}r_1+p_2^{n_2}r_2+\cdots+p_m^{n_m}r_m\qquad(\mathfrak{a})$$

$$r\equiv p_m^{n_m}r_m\qquad(\mathfrak{a}_{m-1}),$$

此處で $r_1, r_2, \ldots, r_m$ は環 $\mathfrak{R}$ の元素を示してゐる。k を適當に大きな正整數とすれば, $p_m^k\subset\mathfrak{q}'$ 從つて $rp_m^k\subset\mathfrak{a}$ となる。故に (7) から $p_m^{n_m+k}r_m\subset\mathfrak{a}_{m-1}$ を生じ, (5) に由つて

$$p_m^{n_m}r_m\subset\mathfrak{a}_{m-1}$$

を得る。それ故に (7) から

$$r\equiv p_1^{n_1}r_1'+p_2^{n_2}r_2'+\cdots+p_{m-1}^{n_{m-1}}r_{m-1}',\qquad(\mathfrak{a})$$

を生ずる。順次この方法を續けて, 最後に

$$r\equiv p_1^{n_1}r_1^{(m-1)},\qquad(\mathfrak{a})$$

を生じ, $p_1^k\subset\mathfrak{q}'$ から $p_1^kr\subset\mathfrak{a}$ を得る。これから $p_1^{n_1+k}r_1^{(m-1)}\subset\mathfrak{a}$ となり, (1) に由つて

$$p_1^{n_1}r_1^{(m-1)}\subset\mathfrak{a}\ 即ち\ r\subset\mathfrak{a}$$

なる矛盾を生ずる。それ故に $\mathfrak{q}'=\mathfrak{a}:(r), r\not\subset\mathfrak{a}$ なる弱準素イデヤル $\mathfrak{q}'$ が $\mathfrak{p}$ に屬するならば，元素 r は $\mathfrak{b}'$ に含まれない。

$\mathfrak{p}=\mathfrak{R}$ ならば，$\mathfrak{b}'=\mathfrak{q}$ とすれば，$\mathfrak{q}$ は定理に述べた要求を滿たす弱準素イデヤルである。故に以下 $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{R}$ として論ずる。$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{b}'$ に關して冪零であるから，若し $\mathfrak{b}'$ が $\mathfrak{p}$ に屬する弱準素イデヤルでないならば，

$$r'p'\subset\mathfrak{b}',\quad p'\subset\mathfrak{p},\quad p'\not\subset\mathfrak{b}',\quad r'\not\subset\mathfrak{p}$$

なる二元素 r', p' が存在する。それ故に條件 2 から

$$\mathfrak{p}\supset\mathfrak{b}''=\mathfrak{b}':(r')^{k'}=\mathfrak{b}':(r')^{k'+1}=\cdots\supset\mathfrak{b}'$$

を生ずる。$\mathfrak{b}''$ が $\mathfrak{p}$ に屬する弱準素イデヤルでないならば，更に同様な手續を行ひ得る。然し條件2に由つて，このやうにして生ずるイデヤル $\mathfrak{b}'', \mathfrak{b}''', \ldots$ は有限個のみ存在し得る。故に上のやうな手續を有限回繰返して，

$$\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{q}=\mathfrak{b}':(r'r''\ldots r^{(k)})^n\supset\mathfrak{a},\quad r'r''\ldots r^{(k)}\not\subset\mathfrak{p}$$

なる $\mathfrak{p}$ に屬する弱準素イデヤル $\mathfrak{q}$ を得る。若し $\mathfrak{q}$ の一元素 r に對して

$$\mathfrak{q}'=\mathfrak{a}:(r);\quad r\not\subset\mathfrak{a}$$

が $\mathfrak{p}$ に屬する弱準素イデヤルであるならば，$r(r'r''\ldots r^{(k)})^n\subset\mathfrak{b}'$ となる。然るに $r'r''\ldots r^{(k)}\not\subset\mathfrak{p}$ であり，$\mathfrak{q}'$ は $\mathfrak{p}$ に屬する弱準素イデヤルであるから，$\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{q}'=\mathfrak{a}:\left(r(r'r''\ldots r^{(k)})^n\right)$，$r(r'\ldots r^{(k)})^n\not\subset\mathfrak{a}$ となり，上に述べた $\mathfrak{b}'$ の性質と矛盾する。故に $\mathfrak{q}$ は所要の $\mathfrak{p}$ に屬する弱準素イデヤルである。

定理 7. $\mathfrak{a}$ を環 $\mathfrak{R}$ の任意のイデヤルとすれば，$\mathfrak{a}$ は有限個の弱準素イデヤルの共通分として表はされる。

證 定理 5 から $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルは有限個であるから，その凡べてを $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ とする。その各々に屬し定理 6 の條件を滿足する弱準素イデヤルを夫々 $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n$ とし，その共通分を $\mathfrak{d}$ とする。即ち

$$\mathfrak{d}=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\ldots\cap\mathfrak{q}_n \tag{1}$$

とすれば，$\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{d}$ である。今 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{d}$ と假定すれば，$\mathfrak{d}$ は $\mathfrak{a}$ に含まれない一つの元素 d を有する。定理 2 及び 3 に由つて d は $\mathfrak{a}$ に關して冪零であるから，

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{a}:(d)\supset\mathfrak{a},\quad d\not\subset\mathfrak{a} \tag{2}$$

$\mathfrak{r}$ に屬する素イデヤルの一つを $\mathfrak{p}$ とすれば，

$$\mathfrak{q}=\mathfrak{r}:(r'),\quad r'\not\subset\mathfrak{r} \tag{3}$$

なる $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}$ に屬する弱準素イデヤルである。それ故に (2) から

$$(4)\qquad \mathfrak{q}=\mathfrak{a}:(dr'),\qquad dr'\not\subset\mathfrak{a}$$

故に $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルとなり，例へば $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1$ となる。然るに dr' は $\mathfrak{q}_1$ に含まれるから，$\mathfrak{q}_1$ の性質と矛盾する。從つて

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{d}=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_n$$

でなければならない。

結　論

前節に得た定理 1 及び 7 を綜合して次の主要定理を得る。

主要定理　可換環 $\mathfrak{R}$ に於て素イデヤルの約鎖律を假定するならば，$\mathfrak{R}$ の任意のイデヤルが有限個の弱準素イデヤルの共通分として表はされ得る爲に必要且充分の條件は次の通りである。

$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{R}$ の任意のイデヤルであり，r が $\mathfrak{a}$ に關して冪零でない元素であるならば，連鎖

$$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:(r)\subset\mathfrak{a}:(r^2)\subset\cdots$$

は有限で終り，イデヤル $\mathfrak{r}$ になる。又このやうなイデヤル $\mathfrak{r}$ の總數は $\mathfrak{a}$ が一定である限り有限である。