R. MIRON ET G. ATANASIU
KODAI MATH. J.
6 (1983), 228—237

EXISTENCE ET ARBITRARIÉTÉ DES CONNEXIONS COMPATIBLES À UNE STRUCTURE RIEMANN GÉNÉRALISÉE DU TYPE PRESQUE k-HORSYMPLECTIQUE MÉTRIQUE

PAR RADU MIRON ET GHEORGHE ATANASIU

Dans les notes [12], [13] nous avons abordé le problème d'Eisenhart pour les espaces Riemann généralisés du type presque 0- et 1-horsymplectiques métriques, établissant l'existence et l'arbitrariété des solutions. Notre attention porte à présent sur le cas général de la structure Riemann généralisée du type presque k-horsymplectique métrique. On associe à une telle structure, $g=\underline{g}+\underset{\vee}{g}$, deux distributions V et H sur M, supplémentaires, orthogonales, par l'intermédiaire desquelles on détermine un champ de tenseurs antisymétriques $\check{g}$ du type (2, 0) et une structure presque k-horsymplectique locale. La condition de permutabilité (2.1) des opérateurs Obata appartenant à la structure g montre que la structure presque k-horsymplectique locale mentionnée est également une structure métrique. Deux exemples justifient l'existence de telles structures [4], [5]. Les propriétés mentionnées servent à établir l'existence (théorème 6) et l'arbitrariété des connexions linéaires compatibles à g (théorèmes 8 et 10). On y constate l'apparition de deux cas importants : elliptique et hyperbolique, selon que l'application $\mu: M \rightarrow R$, de (2.2), qui est constante, est positive ou négative. Les théorèmes 7 et 9 donnent les formes canonniques des connexions linéaires compatibles à g, pour chaque cas à part. Finalement, observons encore que les théorèmes 8 et 10 offrent toutes les connexions linéaires compatibles aux structures Riemann généralisées du type presque k-horsymplectique métrique elliptique ou hyperbolique.

Les notations et la technique de la démonstration des propriétés énumérées sont celles que nous avons utilisées dans les notes précédemment indiquées [12], [13].

§ 1. Structures Riemann généralisées d'indice k

Soit M une variété différentiable de dimension $2n+k$. Un champ de tenseurs $g \in \tau_2^0(M)$ a la décomposition unique dans la partie symétrique $\underline{g}$ et la partie antisymétrique $\underset{\vee}{g}$

Received October 8, 1982

(1.1) $$g=\underline{g}+\underset{\vee}{g}\,.$$

Le champ g détermine une structure Riemann généralisée si

(1.2) $$\text{dét}\|\underline{g}\|\neq 0\,.$$

Définition 1. On considérera que la structure Riemann généralisée est *d'indice* k si

(1.3) $$\text{rang}\|\underset{\vee}{g}\|=\dim M-k=2n\,.$$

Il est évident que $\underline{g}$ détermine une structure Riemann sur M et $\underset{\vee}{g}$ est une 2-forme sur M. On montrera que $\underset{\vee}{g}$ détermine d'une mamière unique un champ de tenseurs $\breve{g}\in\tau^2_0(M)$.

Vraiment, pour tout champ de tenseurs $X\in\mathfrak{X}(M)$, l'application

$$\varphi: X\longrightarrow i_X\underset{\vee}{g}$$

définit un morphisme du fibré tangent $T(M)$ au fibré cotangent $T^*(M)$, qui est homomorphisme sur des fibres. Soit $V=\ker\varphi$. V est une distribution sur M de dimension locale k. On note par H la distribution supplémentaire, orthogonale à V, l'orthogonalité étant établie par rapport à $\underline{g}$.

Dans chaque point $x\in M$ on a la décomposition directe

$$T_x(M)=V_x\oplus H_x$$

et $V_x\perp H_x$.

On note avec v et h les projecteurs (supplémentaires) déterminés par les distributions V et H.

Soit (U, x^i) un système de coordonnées locales sur M et g_{ij}, $\underline{g}_{ij}$, $\underset{\vee}{g}_{ij}$ les coordonnées locales des champs g, $\underline{g}$ et respectivement $\underset{\vee}{g}$. Si $\underset{1}{\xi}^i, \cdots, \underset{k}{\xi}^i$ est une base locale orthonormée de V, alors

(1.4) $$\underset{\vee}{g}_{ij}\underset{a}{\xi}^j=0\,, \quad \underline{g}_{ij}\underset{a}{\xi}^i\underset{b}{\xi}^j=\delta_{ab} \quad (a,\ b=1,\ \cdots,\ k).$$

On considère les champs duels

(1.5) $$\overset{a}{\eta}_i=\underline{g}_{ij}\underset{a}{\xi}^j\,.$$

On a donc:

(1.6) $$\overset{a}{\eta}_i\underset{b}{\xi}^i=\delta^a_b$$

et les champs v, h définis sur la variété M, ont les composantes locales:

(1.7) $$v^i_j=\overset{a}{\eta}_j\underset{a}{\xi}^i\,, \quad h^i_j=\delta^i_j-\overset{a}{\eta}_j\underset{a}{\xi}^i \quad (\text{on somme après } a).$$

Théorème 1. *Il existe sur M un seul champ de tenseurs, antisymétriques, du type* (2, 0), $\breve{g}$, *ayant les propriétés*

$$i_X \underset{\vee}{g}\cdot\check{g}=h(X)\,, \quad v\cdot\check{g}=0\,, \quad \forall X\in\mathfrak{X}(M).$$

Vraiment, le système d'équations en $g^{ij}_{\vee}$ (les coordonnées de $\check{g}$):

$$\underset{\vee}{g}_{ik}\, g^{ik}_{\vee}=h^j_i$$
$$\overset{a}{\eta}_j g^{ij}_{\vee}=0\,,$$

a la matrice (antisymétrique), non-singulière $\left\|\begin{matrix}\underset{\vee}{g}_{ij} & -\overset{a}{\eta}_i \\ \overset{a}{\eta}_j & 0\end{matrix}\right\|$. Le champ $\check{g}$ ne dépend pas de la base locale $(\underset{a}{\xi^i})$ de la distribution V.

OBSERVATION 1. Le triplet $(\underset{\vee}{g}, \overset{a}{\eta}, \underset{a}{\xi})$ définit une structure presque k-horsymplectique, locale.

On a, effectivement, du théorème précédent:

$$\begin{aligned}
&\underset{\vee}{g}_{ik}\, g^{jk}_{\vee}+\overset{a}{\eta}_i\underset{a}{\xi}^j=\delta^j_i \quad \text{(on somme après } a\text{)}\\
(1.8)\qquad &\overset{a}{\eta}_j\underset{b}{\xi}^j=\delta^a_b\\
&\underset{\vee}{g}_{ij}\underset{a}{\xi}^j=0\,, \quad \overset{a}{\eta}_j g^{ij}_{\vee}=0 \quad (a, b=1, \cdots, k)\,.
\end{aligned}$$

Revenant à la structure g, on peut considérer les opérateurs Oproiu appartenant à $\underset{\vee}{g}$, [16].

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\phi}{}^{rs}_{ij}=\frac{1}{2}(\delta^r_i\delta^s_j+v^r_iv^s_j-\underset{\vee}{g}_{ij}\, g^{sr}_{\vee})\\
(1.9)\qquad &\underset{2}{\phi}{}^{rs}_{ij}=\frac{1}{2}(\delta^r_i\delta^s_j-v^r_iv^s_j+\underset{\vee}{g}_{ij}\, g^{sr}_{\vee})\\
&\Theta^{rs}_{ij}=\frac{1}{2}(v^r_ih^s_j+h^r_iv^s_j)
\end{aligned}$$

et les opérateurs Obata [15] de g:

$$(1.10)\qquad \underset{1}{\Lambda}{}^{rs}_{ij}=\frac{1}{2}(\delta^r_i\delta^s_j-\underline{g}_{ij}\underline{g}^{rs})\,, \quad \underset{2}{\Lambda}{}^{rs}_{ij}=\frac{1}{2}(\delta^r_i\delta^s_j+\underline{g}_{ij}\underline{g}^{rs})\,.$$

On note par $\underset{1}{\Lambda}\cdot\underset{1}{\phi}$, ou $\underset{1}{\Lambda}\cdot\Theta$, le „produit" des opérateurs $\underset{1}{\Lambda}$ et $\underset{1}{\phi}$, ou $\underset{1}{\Lambda}$ et Θ. On a $(\underset{1}{\Lambda}\cdot\underset{1}{\phi})^{rs}_{ij}=\underset{1}{\Lambda}{}^{ks}_{im}\underset{1}{\phi}{}^{rm}_{kj}$, et l'effet de l'application d'un de ces opérateurs, par exemple $\underset{1}{\phi}$, sur un champ $t\in\tau^1_2(M)$ sera noté par $(\underset{1}{\phi}\cdot t)^s_{ij}=\underset{1}{\phi}{}^m_i{}^s_r t^r_{mj}$.

Grâce à un calcul direct on démontre le

THÉORÈME 2. (i) *Les opérateurs* (1.9), (1.10) *sont des champs de tenseurs sur* M.

(ii) $\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}$ *sont des projecteurs supplémentaires sur* $\mathcal{T}(M)$*—le module* $\tau^1_2(M)$.

(iii) $\underset{u}{\Lambda}\cdot\Theta=\Theta\cdot\underset{u}{\Lambda}$ $(u=1, 2)$.

(iv) $\underset{1}{\phi}-\Theta$ *et* $\underset{2}{\phi}+\Theta$ *sont des projecteurs supplémentaires sur* $\tau^1_2(M)$.

(v) *Si* $\underset{1}{\Lambda}\cdot\underset{1}{\phi}=\underset{1}{\phi}\cdot\underset{1}{\Lambda}$, *alors les projecteurs* $\underset{1}{\Lambda}$ *et* $\underset{1}{\phi}-\Theta$ (*respectivement* $\underset{2}{\Lambda}$ *et* $\underset{2}{\phi}+\Theta$) *sont permutables et* $\underset{1}{\Lambda}\cdot(\underset{2}{\phi}-\Theta)$, $\underset{2}{\Lambda}\cdot(\underset{2}{\phi}+\Theta)$ *sont des projecteurs supplémentaires sur* $\tau_2^1(M)$.

Aussi apparaît-il comme une conséquence le

THÉORÈME 3. *Si les opérateurs* $\underset{1}{\Lambda}$, $\underset{1}{\phi}$ *sont permutables, alors le système d'équations tensorielles dans le champ de tenseurs* $X\in\tau_2^1(M)$.

$$\begin{cases} \underset{1}{\Lambda}\cdot X=0 \\ (\underset{1}{\phi}-\Theta)\cdot X=0 \end{cases} \quad \left[resp. \begin{cases} \underset{2}{\Lambda}\cdot X=0 \\ (\underset{2}{\phi}+\Theta)\cdot X=0 \end{cases} \right]$$

a des solutions non-triviales et sa solution générale est

$$X=\underset{2}{\Lambda}\cdot(\underset{2}{\phi}+\Theta)\cdot Y \quad [resp.\ X=\underset{1}{\Lambda}\cdot(\underset{1}{\phi}-\Theta)\cdot Y],$$

où $Y\in\tau_2^1(M)$ *est complètement arbitraire.*

On appliquera ces résultats à la détermination de toutes les connexions linéaires compatibles à la structure g.

§ 2. Structures Riemann généralisées du type presque k-horsymplectiques métriques

DÉFINITION 2. La structure Riemann généralisée g s'appelle du type *presque k-horsymplectique métrique,* si g est d'indice k et les opérateurs $\underset{1}{\Lambda}$, $\underset{1}{\phi}$ sont permutables:

$$\underset{1}{\Lambda}\cdot\underset{1}{\phi}=\underset{1}{\phi}\cdot\underset{1}{\Lambda}. \tag{2.1}$$

THÉORÈME 4. *La structure Riemann généralisée g, d'indice k, est presque k-horsymplectique métrique, si et seulement s'il existe une fonction non-nulle* $\mu: M\to R$, *de telle manière qu' on ait*

$$g_{i\underline{r}}g_{j\underline{s}}\underset{\vee}{g}^{rs}=\mu \underset{\vee}{g}_{ij}. \tag{2.2}$$

Démonstration. L'équation (2.1) est équivalente à

$$g_{\underline{ik}}g_{\underline{jm}}\underset{\vee}{g}^{km}\underset{\vee}{g}_{rs}=g_{\underline{rk}}g_{\underline{sm}}\underset{\vee}{g}^{km}\underset{\vee}{g}_{ij}.$$

Si on note

$$c_{ij}=g_{i\underline{r}}g_{\underline{jm}}\underset{\vee}{g}^{rm},$$

la dernière égalité nous offre $c_{ij}\underset{\vee}{g}_{rs}=c_{rs}\underset{\vee}{g}_{ij}$. Par contraction avec $\underset{\vee}{g}^{rs}$ et notant avec $\mu=(1/2n)c_{rs}\underset{\vee}{g}^{rs}$, on obtient (2.2). Toujours de (2.2) on s'aperçoit que $\mu\neq 0$ sur M. La propriété réciproque est immédiate.

EXEMPLE 1. L'ensemble d'objets géométriques $(F^i_j, \overset{a}{\eta}_i, \underset{a}{\xi}^i, g_{\underline{ij}})$ $(a=1, \cdots, k)$, où F^i_j est un champ de tenseurs du type (1, 1) sur M, $\overset{a}{\eta}_i$ sont des k champs de covecteurs sur M, $\underset{a}{\xi}^i$ sont des k champs de vecteurs sur M et $g_{\underline{ij}}=g_{\underline{ji}}$ est une structure Riemann sur M, présentant les propriétés:

$$
\begin{aligned}
&F^i_r F^r_j = -\delta^i_j + \overset{a}{\eta}_j \underset{a}{\xi}^i \quad \text{(on somme après } a) \\
&F^i_j \overset{a}{\eta}_i = 0\,, \\
&F^i_j \underset{a}{\xi}^j = 0\,, \quad \overset{a}{\eta}_j \underset{b}{\xi}^j = \delta^a_b\,, \\
&F^r_i F^s_j g_{\underline{rs}} = g_{\underline{ij}} - \overset{a}{\eta}_i \overset{a}{\eta}_j \quad \text{(on somme après } a)
\end{aligned}
$$

sera appelé une $(F^i_j, \overset{a}{\eta}_i, \underset{a}{\xi}^i, g_{\underline{ij}})$-structure elliptique sur M.

Au cas de $k=2$, K. Yano et quelques collaborateurs [20] ont prouvé l'existence de telles structures sur certaines variétés M, de dimension $2n+2$.

S'il existe une $(F^i_j, \overset{a}{\eta}_i, \underset{a}{\xi}^i, g_{\underline{ij}})$-structure elliptique sur M, $(a=1, \cdots, k)$, alors prenant $\underset{\vee}{g}_{ij}=F^r_i g_{\underline{jr}}$, le champ de tenseurs $g_{ij}=g_{\underline{ij}}+\underset{\vee}{g}_{ij}$ détermine une structure presque k-horsymplectique métrique (elliptique) sur M.

EXEMPLE 2. L'ensemble d'objets géométriques $(P^i_j, \overset{a}{\eta}_i, \underset{a}{\xi}^i, g_{ij})$ $(a=1, \cdots, k)$ où P^i_j est un champ de tenseurs du type (1, 1) sur M, $\overset{a}{\eta}_i$ sont des k champs de convecteurs sur M, $\underset{a}{\xi}^i$ sont des k-champs de vecteurs sur M et $g_{\underline{ij}}=g_{\underline{ji}}$ une structure Riemann sur M, ayant les propriétés

$$
\begin{aligned}
&P^i_r P^r_j = \delta^i_j - \overset{a}{\eta}_j \underset{a}{\xi}^i \quad \text{(on somme après } a) \\
&P^i_j \overset{a}{\eta}_i = 0\,, \quad P^i_j \underset{a}{\xi}^j = 0\,, \quad \overset{a}{\eta}_j \underset{b}{\xi}^j = \delta^a_b\,, \\
&P^r_i P^s_j g_{\underline{rs}} = -g_{\underline{ij}} + \overset{a}{\eta}_i \overset{a}{\eta}_j \quad \text{(on somme après } a)
\end{aligned}
$$

sera nommé une $(P^i_j, \overset{a}{\eta}_i, \underset{a}{\xi}^j, g_{\underline{ij}})$-structure hyperbolique sur M.

Une structure presque hermitienne hyperbolique, [11] induit sur une sous-variété de co-dimension 2 appartenant à M une $(P^i_j, \overset{a}{\eta}_i, \underset{a}{\xi}^j, g_{\underline{ij}})$-structure hyperbolique $(a=1, 2)$.

S'il existe sur M une $(P^i_j, \overset{a}{\eta}_i, \underset{a}{\xi}^i, g_{\underline{ij}})$, structure hyperbolique, $(a=1, \cdots, k)$, alors prenant $\underset{\vee}{g}_{ij}=P^r_i g_{\underline{jr}}$ on obtient $g_{ij}=g_{\underline{ij}}+\underset{\vee}{g}_{ij}$ qui est une structure Riemann généralisée du type k-horsymplectique métrique (hyperbolique).

Ces deux exemples prouvent l'existence des structures Riemann généralisées du type k-horsymplectiques métriques g (elliptiques et hyperboliques) et en même temps ils suggèrent la méthode moyennant laquelle on obtient les connexions compatibles à la structure g.

A ce qu'on pourra remarquer, la fonction μ de (2.2) est constante. De ce fait on peut donner:

DÉFINITION 3. La structure Riemann généralisée g du type presque k-horsymplectique métrique s'appelle: *elliptique* si $\mu=c^2$ $(c>0,\ c\in R)$ et *hyperbolique* si $\mu=-c^2$ $(c>0,\ c\in R)$.

Au cas elliptique l'équation (2.2) est équivalente à

$$c\underline{g}^{ir}\underset{\vee}{g}_{jr}=-\frac{1}{c}\underset{\vee}{g}^{ir}\underline{g}_{jr},$$

et on peut considérer le champ de tenseurs du type (1, 1):

$$F^i_j=c\underline{g}^{ir}\underset{\vee}{g}_{jr}. \tag{2.3}$$

Au cas hyperbolique l'équation (2.2) est équivalente à

$$c\underline{g}^{ir}\underset{\vee}{g}_{jr}=\frac{1}{c}\underset{\vee}{g}^{ir}\underline{g}_{jr},$$

et il est possible de considérer le champ de tenseurs du type (1, 1):

$$P^i_j=c\underline{g}^{ir}\underset{\vee}{g}_{jr}. \tag{2.4}$$

PROPOSITION 1. *Le champ F^i_j de la structure g elliptique et le champ P^i_j de la structure g hyperbolique, sont globalement définis sur M.*

Observation 2. L'ensemble $(F^i_j,\ \overset{a}{\eta}_j,\ \underset{a}{\xi}^i,\ \underline{g}_{ij})$ donné par (1.4), (1.5) et (2.3) détermine une $(F^i_j,\ \overset{a}{\eta}_i,\ \underset{a}{\xi}^i,\ \underline{g}_{ij})$-structure elliptique locale.

Observation 3. L'ensemble $(P^i_j,\ \overset{a}{\eta}_j,\ \underset{a}{\xi}^i,\ \underline{g}_{ij})$-donné par (1.4), (1.5) et (2.4) détermine une $(P^i_j,\ \overset{a}{\eta}_i,\ \underset{a}{\xi}^i,\ \underline{g}_{ij})$ structure hyperbolique locale.

§ 3. Connexions linéaires compatibles à une structure g du type presque k-horsymplectique métrique

Le problème important est certes celui de l'existence des connexions linéaires Γ par rapport auxquelles la structure Riemann généralisée g est parallèle.

DÉFINITION 4. Nous considérerons qu'une connexion linéaire Γ est compatible à la structure Riemann généralisée g si $\nabla_X g=0$, $\forall X\in\mathscr{X}(M)$.

On constate immédiatement que Γ est compatible a g si et seulement si:

$$\underline{g}_{ij\mid k}=0,\quad \underset{\vee}{g}_{ij\mid k}=0. \tag{3.1}$$

Un premier résultat est avancé par le

THÉORÈME 5. *S'il existe une connexion linéaire Γ compatible à une structure Riemann généralisée g du type presque k-horsymplectique métrique sur M, alors:*

(i) *les distributions V et H sont parallèles par rapport à Γ sur M;*
(ii) *les projecteurs v, h et le champ $\check{g}$ sont parallèles sur M;*
(iii) *la fonction μ de (2.2) est constante.*

Démonstration (i). Selon (3.1) en appliquant la dérivation covariante $g_{ij}\underset{a}{\xi}^i=0$, on obtient $\underset{\vee}{g}_{ij}\underset{a}{\xi}^i{}_{|k}=0$. Donc $\underset{a}{\xi}^i{}_{|k}$ appartiennent à la distribution V. Il s'ensuit que V est parallèle par rapport à la connexion Γ sur M. Si on applique de nouveau (3.1) il s'ensuit que H est parallèle sur M.

(ii). Selon (i) il résulte v et h parallèles. De $\underset{\vee}{g}_{ir}\overset{\vee}{g}{}^{jr}=h^j_i$ en appliquant l'opérateur de dérivation covariante on parvient à

$$\underset{\vee}{g}_{ir}\overset{\vee}{g}{}^{jr}{}_{|k}=0\,.$$

Si on réalise la contraction avec $\overset{\vee}{g}{}^{ip}$, on a $\overset{\vee}{g}{}^{jp}{}_{|k}-v^p_s\overset{\vee}{g}{}^{js}{}_{|k}=0$, relation que nous pouvons écrire $\overset{\vee}{g}{}^{jp}{}_{|k}-(v^p_s\overset{\vee}{g}{}^{js})_{|k}=0$. Par d'autres mots $\overset{\vee}{g}{}^{jp}{}_{|k}=0$.

(iii) Si on dérive d'une manière covariante (2.2), selon (3.1) et (ii) on a $\mu_k\underset{\vee}{g}_{ij}=0$, qui implique $\mu_k=0$ $(\mu_k=\partial\mu/\partial x^k)$. Donc μ=constant.

Par conséquent on a à considérer les deux cas $\mu=c^2$ (elliptique) et $\mu=-c^2$ (hyperbolique).

THÉORÈME 6. *Sur la variété différentiable M douée d'une structure Riemann généralisée g du type k-horsymplectique métrique, il existe une connexion linéaire Γ compatible à g, si et seulement si la structure g est elliptique ou hyperbolique.*

Démonstration. Si Γ existe, conformément au théorème précédent la structure g est elliptique ou hyperbolique.

Réciproquement: a) *Supposons que g est elliptique.* Soit $\overset{\circ}{\Gamma}$ une connexion linéaire sur M, fixée et $\overset{\circ}{|}$ la dérivation covariante par rapport à $\overset{\circ}{\Gamma}$. La connexion linéaire suivante sur M est compatible à g:

$$\overset{\Omega}{\Gamma}{}^s_{jk}=\overset{\circ}{\Gamma}{}^s_{jk}+\frac{1}{4}\{\overset{-}{g}{}^{rs}[\underset{-}{g}_{rj\overset{\circ}{|}k}+v^m_j\underset{-}{g}_{rm\overset{\circ}{|}k}]+\overset{\vee}{g}{}^{rs}[\underset{\vee}{g}_{rj\overset{\circ}{|}k}+v^m_j\underset{\vee}{g}_{rm\overset{\circ}{|}k}]$$
$$+F^r_j[F^{s\circ}_{r|k}+v^s_mF^{m\circ}_{r\ |k}]+v^r_jv^{s\circ}_{r|k}-v^s_rv^{r\circ}_{j|k}+2\underset{1}{\Lambda}{}^{r\ s}_{j\ m}[3v^m_qv^{q\circ}_{r|k}-v^{m\circ}_{r\ |k}]\,, \tag{3.2}$$

avec F^i_j donné par (2.3).

Assurément, par calcul direct on prouve que $\overset{\Omega}{\Gamma}$ satisfait à (3.1).

b) *Si g est hyperbolique*, la connexion linéaire suivante est compatible à g:

$$\overset{\Omega}{\Gamma}{}^s_{jk}=\overset{\circ}{\Gamma}{}^s_{jk}+\frac{1}{4}\{\overset{-}{g}{}^{rs}[\underset{-}{g}_{rj\overset{\circ}{|}k}+v^m_j\underset{-}{g}_{rm\overset{\circ}{|}k}]+\overset{\vee}{g}{}^{rs}[\underset{\vee}{g}_{rj\overset{\circ}{|}k}+v^m_j\underset{\vee}{g}_{rm\overset{\circ}{|}k}]$$
$$-P^r_j[P^{s\circ}_{r|k}+v^s_mP^{m\circ}_{r\ |k}]+v^r_jv^{s\circ}_{r|k}-v^s_rv^{r\circ}_{j|k}+2\underset{1}{\Lambda}{}^{rs}_{jm}[3v^m_qv^{q\circ}_{r|k}-v^{m\circ}_{r\ |k}]\,, \tag{3.3}$$

où P^i_j est donné par (2.4).

Evidemment, par calcul direct on prouve que $\overset{\Omega}{\Gamma}$ satisfait à (3.1). q.e.d.

La connexion $\overset{\Omega}{\Gamma}$ donnée par (3.2), ou (3.3), sera appelée connexion compatible à g *associée* à la connexion $\overset{\circ}{\Gamma}$.

§ 4. Généralité de la solution du problème d'Eisenhart

Ce qui intéresse c'est l'arbitrariété de la solution du problème d'Eisenhart.

DÉFINITION 5. La connexion (3.2) respectivement (3.3) compatible à g associée à la connexion $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk}=\left\{ {i \atop jk} \right\}$ déterminée par g s'appelle la *connexion canonique* de la structure g.

On note cette connexion par $\overset{c}{\Gamma}$.

1) La structure Riemann généralisée g du type presque k-horsymplectique métrique elliptique.

THÉORÈME 7. *La connexion canonique $\overset{c}{\Gamma}$ de la structure Riemann généralisée g du type presque k-horsymplectique métrique elliptique présente une des formes suivantes équivalentes deux par deux :*

$$\text{(i)}\quad \overset{c}{\Gamma}{}^s_{jk}=\left\{ {s \atop jk} \right\}+\frac{1}{4}\{\underset{\vee}{g}{}^{rs}\underset{\vee}{g}_{rj}{}^{\circ}_{|k}+F^r_jF^{s\circ}_{r|k}+2\underset{1}{\Lambda}{}^{rs}_{jm}(3v^m_qv^{q\circ}_{r|k}-v^{m\circ}_{r\ |k})\},$$

$$\text{(ii)}\quad \overset{c}{\Gamma}{}^s_{jk}=\left\{ {s \atop jk} \right\}+\frac{1}{2}\{\underset{\vee}{g}{}^{rs}\underset{\vee}{g}_{rj}{}^{\circ}_{|k}+3v^s_rv^{r\circ}_{j|k}-v^{s\circ}_{j|k}\},$$

$$\text{(iii)}\quad \overset{c}{\Gamma}{}^s_{jk}=\left\{ {s \atop jk} \right\}+\frac{1}{2}\{F^r_jF^{s\circ}_{r|k}+v^{s\circ}_{j|k}-3v^r_jv^{s\circ}_{r|k}\},$$

avec F^i_j donné par (2.3).

En appliquant le théorème 3 on prouve le :

THÉORÈME 8. *Toutes les connexions linéaires compatibles à une structure Riemann généralisée g du type presque k-horsymplectique métrique elliptique sont données par la formule*

$$\Gamma^s_{jk}=\overset{c}{\Gamma}{}^s_{jk}+[\underset{1}{\Lambda}\cdot(\underset{1}{\phi}-\Theta)]^{rs}_{jm}Y^m_{rk}, \tag{4.1}$$

où $\overset{c}{\Gamma}$ est la connexion canonique de la structure g, et Y^i_{jk} est un champ de tenseurs du type (1, 2), *arbitraire.*

2) La structure Riemann généralisée g du type presque k-horsymplectique métrique hyperbolique.

THÉORÈME 9. *La connexion canonique $\overset{c}{\Gamma}$ de la structure Riemann généralisée g du type presque k-horsymplectique métrique hyperbolique possède une des formes suivantes équivalentes deux par deux·*

$$\text{(i)}\quad \overset{c}{\Gamma}{}^{s}_{jk}=\left\{{s \atop jk}\right\}+\frac{1}{4}\{g^{rs}_{\vee}\underset{\vee}{g}_{rj}{}^{\circ}_{|k}-P^{r}_{j}P^{s\circ}_{r|k}+2\underset{1}{\Lambda}{}^{rs}_{jm}(3v^{m}_{q}v^{q\circ}_{r|k}-v^{m\circ}_{r\ |k})\}.$$

$$\text{(ii)}\quad \overset{c}{\Gamma}{}^{s}_{jk}=\left\{{s \atop jk}\right\}+\frac{1}{2}\{g^{rs}_{\vee}\underset{\vee}{g}_{rj}{}^{\circ}_{|k}+3v^{s}_{r}v^{r\circ}_{j|k}-v^{s\circ}_{j|k}\}$$

$$\text{(iii)}\quad \overset{c}{\Gamma}{}^{s}_{jk}=\left\{{s \atop jk}\right\}-\frac{1}{2}\{P^{r}_{j}P^{s\circ}_{r|k}+3v^{r}_{j}v^{s\circ}_{r|k}-v^{s\circ}_{j|k}\},$$

avec P^{i}_{j} *donné par* (2.4).

Faisant appel, de nouveau, au théorème 3, on déduit le

THÉORÈME 10. *Toutes les connexions linéaires compatibles à une structure Riemann généralisée g du type presque k-horsymplectique métrique hyperbolique sont données par la formule* (4.1) *où* $\overset{c}{\Gamma}$ *est la connexion canonique du théorème* 9, *et* Y^{i}_{jk} *est un champ de tenseurs du type* (1, 2) *arbitrairement sur M.*

REFERENCES

[1] C. DE BARROS, Variétés horsymplectiques, C. R. Acad. Sc. Paris, **259** (1964), 1291-1294.

[2] BLAIR, D. E. LUDDEN G. D. AND K. YANO, Induced structures on submanifolds, Kōdai Math. Sem. Rep., **22** (1970), 188-198.

[3] L. P. EISENHART, General Riemann spaces I, II, Proc. Nat. Sc. U. S. A., **37** (1951), 5; **38** (1952), 6.

[4] S. I. GOLDBERG AND K. YANO, On normal globally framed f-manifolds, Tôhoku Math. J., **22** (1970), 362-370.

[5] S. I. GOLDBERG AND K. YANO, Globally framed f-manifolds, I Illinois J. of. Math., **15** (1971), 456-474.

[6] S. IANUŞ, C. UDRIŞTE, Asupra spaţiului fibrat tangent al unei varietăţi diferenţiabile, Stud. şi Cercet. Matem., **22**, 4 (1970), 599-611.

[7] A. JAKUBOWICZ AND J. KLEKOWSKA, The necessary and sufficient condition for the existence of the unique connection of the two—dimensional generalized Riemann space, Tensor N. S., **20** (1969), 72-74.

[8] A. KAWAGUCHI, Beziehung zwischen einer metrischen linearen Ubertragung und einer nicht—metrischen in einem allgemeinen metrischen Raume, Akad. Wetensch.

[9] P. LIBERMANN, Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulieres. Bull. Soc, Math., France, **83** (1953), 168-224.

[10] A. LICHNEROWICZ, Réductivité des algèbres d'automorphisme des structures symplectiques, cosymplectiques et des structures de contact, Rend. Math. Roma, **22** (1963), 197-244.

[11] R. MIRON AND GH. ATANASIU, Hyperbolical almost Hermitian structures, Lucr. Col. Naţ, Geom.-Top., Buşteni-Prahova, 27-3. iunie 1981.

[12] R. MIRON AND GH, ATANASIU, Existence et arbitraire de connnexions compatibles aux structures Riemann généralisées du type hermitien (sous presse dans "Tenseur", Japon, en honneur à M. Kawaguchi).

[13] R. MINON AND GH. ATANASIU, Existence et aribtrarieté de connexions compatibles aux structures Riemann généralisées du type presque 1-horsymplectiques métri-

ques (sous presse Supl. An. Univ. "Al. I. Cuza," tom. XXVIII, 1981).

[14] H. NAKAGAWA, On framed f-manifolds, Kōdai Math. Sem. Rep., **18** (1966), 293-306.

[15] M. OBATA, Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure, Jap. J. Math., **26** (1957), 43-77.

[16] V. OPROIU, Almost horsymplectic and conformal almost horsymplectic connexions, Revue Roum. Math. pures et appl., XIV, **10** (1969), 1585-1607.

[17] OTSUKI, T., Theory of affine connections of the space of tangent directions of a differential manifold I, II, III, Math., J. Okayama Univ., **7** (1957), 1-74, 95-122.

[18] C. UDRIŞTE, Diagonal lifts from a manifold to its tangent bundle, Rendiconti di Matematica (4), **9**, VI (1976), 539-550.

[19] Gh. VRÂNCEANU, Opera matematică, 1-4, Editura Academiei, Bucureşti, 1969-1976.

[20] KENTARO YANO AND MUSAFUMI OKUMURA, On (f, g, u, v, λ)-structures, Kōdai, Math. Sem. Rep., **22** (1970), 401-423.

UNIVERSITÉ „AL. I. CUZA"
FAC. DE MATHÉMATIQUES
6600 IASSY, ROUMANIE

UNIVERSITÉ DE BRAŞOV
FAC. DE MATHÉMATIQUES
2200 BRAŞOV, ROUMANIE