J. Math. Soc. Japan
Vol. 31, No. 4, 1979

Sur des semi-groupes non linéaires dans les espaces $L^{\infty}(\Omega)$

par Ki Sik HA

(Reçu le 15 août, 1977)

Introduction.

On se donne un espace mesuré Ω de mesure bornée. Supposons qu'un opérateur A soit m-accrétif dans $L^{\infty}(\Omega)$ et qu'une application β de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie la condition que p. p. $x\in\Omega$ l'application $r\in\boldsymbol{R}\mapsto\beta(x, r)$ soit maximal monotone dans $\boldsymbol{R}$.

On définit l'opérateur βA de $L^{\infty}(\Omega)$ par

$$\beta A=\{[u, w]\in L^{\infty}(\Omega)\times L^{\infty}(\Omega): \exists v\in L^{\infty}(\Omega) \text{ tel que } [u, v]\in A \text{ et p. p. } x\in\Omega,\ w(x)\in\beta(x, v(x))\}.$$

Notre point de départ a été un des problèmes que M. Bénilan avait posé au Séminaire de la Théorie du Potentiel dirigé par M. Choquet, 1974-1975 (cf. [6]) : est-ce que βA est m-accrétif dans $L^{\infty}(\Omega)$?

On donne dans le chapitre I, une réponse positive à ce problème sous certaines hypothèses.

Dans le chapitre II, on étudie l'équation d'évolution

$$(*)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}+\beta Au\ni f \\ u(0)=u_0 \end{cases}$$

associée par l'opérateur βA m-accrétif de $L^{\infty}(\Omega)$.

Etant donné $u_0\in\overline{D(\beta A)}^{L^{\infty}}$, on peut donc résoudre le problème d'évolution (*) à l'aide de la théorie des semi-groupes non linéaires engendrés par βA. En particulier, il y a existence et unicité d'une solution intégrale au sens de [2], de l'équation (*). On montre que pour certaines classes d'opérateur A m-accrétif de $L^{\infty}(\Omega)$, cette solution vérifie l'équation

$$\frac{du}{dt}(t)+\beta Au(t)\ni 0 \qquad \text{p. p. } t\in]0, +\infty[,$$

où $\dfrac{d}{dt}$ est la dérivation dans $\sigma(L^{\infty}(\Omega), L^{1}(\Omega))$.

Le chapitre III est consacré à quelques exemples.

Une partie de ce travail a été énoncé dans [5].

Je remercie Professeur G. Choquet qui a bien voulu m'accueillir au sein de l'Equipe d'Analyse qu'il dirige, afin de me permettre de réaliser ce travail.

Je tiens à remercier à Professeur Ph. Bénilan pour l'aide efficace qu'il m'a offerte tout au long de ce travail et pour les nombreuses discussions profitables que j'ai eu avec lui.

Chapitre I. Perturbation multiplicative d'opérateur m-accrétif de $L^\infty(\Omega)$.

I.1. Présentation du problème.

On se donne Ω un espace mesuré de mesure bornée[1]. Pour $1\leqq p\leqq+\infty$, $L^p(\Omega)$ ou seulement L^p désigne l'espace de Lebesgue de Ω muni de la norme $\|\cdot\|_p$.

On se donne A un opérateur (multivoque en général) de $L^\infty(\Omega)$ vérifiant la condition :

(H1) A est l'opérateur m-accrétif de $L^\infty(\Omega)$, monotone dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire :

$$
\text{(H1)}\quad\left\{\begin{array}{l}
\text{(1)}\quad A \text{ est accrétif dans } L^\infty: \\
\text{pour tout } [u_1, v_1],\ [u_2, v_2]\in A \text{ et } \lambda>0, \\
\|(u_1-u_2)+\lambda(v_1-v_2)\|_\infty \geqq \|u_1-u_2\|_\infty \\
\text{(2)}\quad A \text{ est monotone dans } L^2: \\
\text{pour tout } [u_1, v_1],\ [u_2, v_2]\in A, \qquad \int_\Omega (v_1-v_2)(u_1-u_2)\geqq 0 \\
\text{(3)}\quad \text{pour tout } \lambda>0, \qquad R(I+\lambda A)=L^\infty .
\end{array}\right.
$$

On se donne d'autre part β une application de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifiant :

(H2) p.p. $x\in\Omega$, $\quad r\in\boldsymbol{R}\mapsto\beta(x, r)\in\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ est maximal monotone.

On étudie l'opérateur

$$
\beta A=\{[u, w]\in L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega) : \exists v\in L^\infty(\Omega) \text{ tel que } [u, v]\in A \text{ et } w(x)\in\beta(x, v(x)) \text{ p.p. } x\in\Omega\} .
$$

On pose $J_\lambda=(I+\lambda A)^{-1}$ et $A_\lambda=\dfrac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)$ pour tout $\lambda>0$. On a les propriétés élémentaires (cf. par exemple [2]) :

1) Certains résultats restent valables dans le cas σ-fini, mais les démonstrations sont techniquement plus délicates.

LEMME I.1. *Soit A un opérateur m-accrétif de $L^{\infty}(\Omega)$. On a les*

(1) *A_{λ} est un opérateur de L^{∞} m-accrétif univoque lipschitzienne de rapport $\frac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda>0$;*

(2) *$A_{\lambda}\subset AJ_{\lambda}$ pour tout $\lambda>0$;*

(3) *$(A_{\lambda})^{-1}=A^{-1}+\lambda I$ pour tout $\lambda>0$;*

(4) *$\|A_{\lambda}u\|_{\infty}\leqq\|Au\|_{\infty}$ pour tout $u\in D(A)$ et $\lambda>0$,* où $\|Au\|_{\infty}=\inf\{\|v\|_{\infty}: v\in Au\}$;

(5) *$J_{\lambda}u=J_{\mu}\left(\frac{\mu}{\lambda}u+\frac{\lambda-u}{\lambda}J_{\lambda}u\right)$ pour tout $u\in L^{\infty}$ et λ, $\mu>0$.*

REMARQUE I.2. Si un opérateur A de $L^{\infty}(\Omega)$ vérifie (H1), alors la fermeture A_2 de A dans $L^2(\Omega)$ est maximal monotone dans $L^2(\Omega)$. En effet, A_2 est monotone dans L^2. Comme A est m-accrétif dans L^{∞},

$$R(I+\lambda A_2)=\overline{R(I+\lambda A)}^{L^2}=\overline{L^{\infty}}^{L^2}=L^2$$

pour tout $\lambda>0$.

Le résultat suivant qui est un cas particulier de la proposition 1 de Bénilan [3], est un outil important de ce travail.

LEMME I.3. *Soit S un opérateur de $L^{\infty}(\Omega)$ vérifiant*

$$\int_{\Omega}|Su_1-Su_2|^2\leqq\int_{\Omega}|u_1-u_2|^2 \tag{1.1}$$

pour tout u_1, $u_2\in L^{\infty}(\Omega)$. Alors les propriétées suivantes sont équivalentes:

(1) *pour tout $u\in L^{\infty}(\Omega)$, $\|Su\|_{\infty}\leqq\|u\|_{\infty}$,*

(2) *pour toute fonction ϕ de $\boldsymbol{R}$ dans $[0, +\infty[$ à dérivée convexe de support contenu dans $[0, +\infty[$ et pour tout $u\in L^{\infty}(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega}\phi(|Su|)\leqq\int_{\Omega}\phi(|u|).$$

PROPOSITION I.4. *Si un opérateur A de $L^{\infty}(\Omega)$ vérifie* (H1), *alors*

$$\int_{\Omega}(\mathrm{sign}\,(u_1-u_2))(|u_1-u_2|-k)^+(v_1-v_2)\geqq 0 \tag{1.2}$$

pour tout $[u_1, v_1]$, $[u_2, v_2]\in A$ et $k\geqq 0$, où $r^+=\max(r, 0)$.

DEMONSTRATION. Définissons un opérateur S de L^{∞} par

$$Su=(I+\lambda A)^{-1}(u+\hat{u})-(I+\lambda A)^{-1}\hat{u} \tag{1.3}$$

pour tout u, $\hat{u}\in L^{\infty}$ et $\lambda>0$. Alors S vérifie (1.1) et (1) du lemme I.3; prenant $\phi(r)=(r-k)^{+2}$ pour tout $k\geqq 0$, d'après (2) du lemme I.3, on a

$$\int\phi(|Su|)\leqq\int\phi(|u|)$$

pour tout $u\in L^\infty$ et donc

$$\int\phi(|S(u-\hat{u})|)\leqq\int\phi(|u-\hat{u}|)$$

pour tout u, $\hat{u}\in L^\infty$. D'après (1.3), on a

$$\int\phi(|(I+\lambda A)^{-1}u-(I+\lambda A)^{-1}\hat{u}|)\leqq\int\phi(|u-\hat{u}|)$$

pour tout u, $\hat{u}\in L^\infty$ et $\lambda>0$. Pour tout $[u_1, v_1]$, $[u_2, v_2]\in A$ et $\lambda>0$, comme $u_1=(I+\lambda A)^{-1}(u_1+\lambda v_1)$ et $u_2=(I+\lambda A)^{-1}(u_2+\lambda v_2)$, on a

$$\int\phi(|u_1-u_2|)\leqq\int\phi(|(u_1-u_2)+\lambda(v_1-v_2)|)$$

et donc

$$\int\frac{\phi(|(u_1-u_2)+\lambda(v_1-v_2)|)-\phi(|u_1-u_2|)}{\lambda}\geqq 0. \tag{1.4}$$

Passant à la limite dans (1.4) lorsque $\lambda\to 0+$, d'après la définition de $\phi(r)$, on obtient (1.2).

PROPOSITION I.5. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (H1). *On a*:

(1) $A=A_2\cap L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$;

(2) *soit* $[u_n, v_n]\in A$ *tel que* $u_n\to u$, $v_n\to v$ *dans* $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ *et* $\overline{\lim}\int_\Omega u_nv_n\leqq\int_\Omega vv$ *lorsque* $n\to+\infty$, *alors* $[u, v]\in A$ *et* $\int_\Omega u_nv_n\to\int_\Omega uv$ *lorsque* $n\to+\infty$.

DEMONSTRATION. (1) On a $A\subset A_2\cap L^\infty\times L^\infty$. D'autre part, soit $[u, v]\in A_2\cap L^\infty\times L^\infty$. D'après la m-accrétivité de A, il existe $\bar{u}\in L^\infty$ tel que $\bar{u}+A\bar{u}\ni u+v$ et donc $\bar{u}+A_2\bar{u}\ni u+v$. D'autre part, $u+A_2u\ni u+v$. Donc $u=\bar{u}$ et $[u, v]\in A$.

(2) On a $[u_n, v_n]\in A_2$ et $u_n\to u$, $v_n\to v$ dans $\sigma(L^2, L^2)$ lorsque $n\to+\infty$. D'après la proposition 2.5 de [8], on a $[u, v]\in A_2$. D'après (1), $[u, v]\in A$.

Soit β une application de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifiant

(H3) $\begin{cases}\text{pour tout } s\in\boldsymbol{R}, \text{ il existe } v\in L^\infty(\Omega) \text{ tel que p.p. } x\in\Omega,\ s\in\beta(x, v(x))\\ \text{(lorsque } \beta \text{ est indépendant en } x, \text{ cela veut dire } \beta \text{ surjectif).}\end{cases}$

On pose

$$D(\beta)=\{[x, r]\in\Omega\times\boldsymbol{R}:\ \beta(x, r)\neq\emptyset\},$$

$$D_x(\beta)=\{r\in\boldsymbol{R}:\ [x, r]\in D(\beta)\}\ \text{pour tout } x\in\Omega.$$

On définit l'application β^{-1} de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ par le fait que $r\in\beta^{-1}(x, s)$ si et seulement si $s\in\beta(x, r)$. Enfin, pour tout $\lambda>0$, β_λ désigne l'application de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ par

$$\beta_\lambda=\frac{1}{\lambda}(I-(I+\lambda\beta)^{-1}),$$

où I est une application de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ telle que pour tout $x\in\Omega$, $I(x, r)=r$.

REMARQUE I.6. Soit β une application de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$. On a:

(1) si β vérifie (H2), alors il en est de même de β^{-1};

(2) si β vérifie (H3) si et seulement si pour tout $s\in\boldsymbol{R}$, il existe $v\in L^\infty(\Omega)$ tel que p. p. $x\in\Omega$, $v(x)\in\beta^{-1}(x, s)$;

(3) si β vérifie (H2) et (H3), alors pour tout $M>0$, il existe $K>0$ tel que pour toute fonction mesurable v, w de Ω dans $\boldsymbol{R}$ avec $w(x)\in\beta(x, v(x))$ p. p. $x\in\Omega$, $\|w\|_\infty\leqq M$ entraîne $\|v\|_\infty\leqq K$;

(4) si β vérifie (H2), alors pour tout $\lambda>0$, β_λ est une application de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ vérifiant (H2) et même plus précisément p. p. $x\in\Omega$, $r\in\boldsymbol{R}\mapsto\beta_\lambda(x, r)\in\boldsymbol{R}$ est maximal monotone lipschitzienne de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$;

(5) si β vérifie (H3), alors pour tout $\lambda>0$, β_λ vérifie (H3) (en effet, $(\beta_\lambda)^{-1}=\beta^{-1}+\lambda I$).

LEMME I.7. (Bénilan [4]). *Supposons qu'une application β de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie* (H2) *et* (H3). *Alors il existe une fonction j de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $]-\infty, +\infty]$, intégrande convexe normale telle que p. p. $x\in\Omega$, $\partial j(x, \cdot)=\beta(x, \cdot)$.*

DEMONSTRATION. Posons $\gamma=\beta^{-1}$. Etant donné $r\in\boldsymbol{R}$, notons

$$C_r=\{v\in L^\infty(\Omega): v(x)\in\gamma(x, r) \text{ p. p. } x\in\Omega\};$$

l'ensemble C_r est un convexe fermé dans L^2, borné dans L^∞. Etant donné ρ un relèvement de L^∞, posons $\tilde\gamma(x, r)=\rho(\mathrm{Proj}_{C_r}0)(x)$; $\tilde\gamma$ est une application de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ telle que

$$\text{pour tout } x\in\Omega,\ r\in\boldsymbol{R}\mapsto\tilde\gamma(x, r) \text{ est croissante},$$

$$\begin{aligned}&\text{pour tout } r\in\boldsymbol{R},\ x\in\Omega\mapsto\tilde\gamma(x, r) \text{ est mesurable bornée}\\ &\text{p. p. } x\in\Omega,\ \tilde\gamma(x, r)\in\gamma(x, r).\end{aligned}$$

Posons $h(x, r)=\int_0^r\tilde\gamma(x, s)ds$; c'est une fonction de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ convexe en r et mesurable en x; de plus p. p. $x\in\Omega$, pour tout $r\in\boldsymbol{R}$,

$$\gamma(x, r)=[\lim_{\substack{s\uparrow r\\ s\in Q}}\tilde\gamma(x, s),\ \lim_{\substack{s\downarrow r\\ s\in Q}}\tilde\gamma(x, s)]=\partial h(x, r).$$

Posons $j=h^*$, où h^* est la fonction convexe conjuguée de h. Alors j est une fonction de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $]-\infty, +\infty]$, intégrande convexe normale telle que p. p. $x \in \Omega$, $\partial j(x, \cdot)=\beta(x, \cdot)$.

LEMME I.8. (Bénilan [4]). Supposons qu'une application β de $\Omega \times \boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie (H2) et (H3). Alors pour tout $1 \leqq p \leqq +\infty$, l'opérateur

$$B_p=\{[v, w] \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) : v(x) \in \beta(x, w(x)) \text{ p. p. } x \in \Omega\}$$

est m-accrétif dans $L^p(\Omega)$.

DEMONSTRATION. Utilisant la notation dans la démonstration du lemme I.7, pour tout $\lambda>0$ la fonction $h_\lambda(x, r)=\inf_{s \in \boldsymbol{R}}\left\{\frac{1}{2\lambda}(s-r)^2+h(x, s)\right\}$ est convexe continuement dérivable en r et mesurable en x ; de plus p. p. $x \in \Omega$, $h_\lambda(x, \cdot)$ est l'approximation Yosida de $\gamma(x, \cdot)$. On pose $\gamma_\lambda(x, r)=\partial h_\lambda(x, r)$; γ_λ est lipschitzienne croissante en r et mesurable en x ; de plus pour tout $(x, r) \in \Omega \times \boldsymbol{R}$, $|\gamma_\lambda(x, r)| \leqq |\tilde{\gamma}(x, r)|$. Etant donné u mesurable de Ω dans $\boldsymbol{R}$, la fonction $\gamma_\lambda(\cdot, u)$ est mesurable ; de plus

$$|\gamma_\lambda(\cdot, u)| \leqq |\gamma_\lambda(\cdot, u)-\gamma_\lambda(\cdot, 0)|+|\gamma_\lambda(\cdot, 0)| \leqq \frac{1}{\lambda}|u|+|\tilde{\gamma}(\cdot, 0)| .$$

Donc $B_{p, \lambda}: u \in L^p \mapsto \gamma_\lambda(\cdot, u)$ est une application de L^p dans lui-même ; d'après la construction de γ_λ, c'est l'approximation Yosida de B_p.

L'accrétivité de B_p est immédiate.

I.2. *m*-accrétivité de βA lorsque β est univoque.

On définit l'opérateur βA_2 de $L^2(\Omega)$ par

$$\beta A_2=\{[u, w] \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) : \exists v \in L^2(\Omega) ;\ [u, v] \in A_2 \text{ et p. p. } x \in \Omega,\ w(x) \in \beta(x, v(x))\} .$$

PROPOSITION I.9. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (H1) *et qu'une application de $D(\beta) \subset \Omega \times \boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ vérifie que p. p. $x \in \Omega$, $r \in D_x(\beta) \mapsto \beta(x, r)$ soit monotone univoque. S'il existe $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$ tels que $u_1+\lambda\beta A_2 u_1 \ni f_1$ et $u_2+\lambda\beta A_2 u_2 \ni f_2$ pour tout $f_1, f_2 \in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda>0$, alors $u_1-u_2 \in L^\infty(\Omega)$ et $\|u_1-u_2\|_\infty \leqq \|f_1-f_2\|_\infty$.*

DEMONSTRATION. Par définition, il existe $v_1, v_2 \in L^2$ tels que $[u_1, v_1]$, $[u_2, v_2] \in A_2$ et p. p. $x \in \Omega$, $\frac{f_1(x)-u_1(x)}{\lambda}=\beta(x, v_1(x))$ et $\frac{f_2(x)-u_2(x)}{\lambda}=\beta(x, v_2(x))$. L'inégalité (1.2) est encore vrai par fermeture pour tout $[u_1, v_1]$, $[u_2, v_2] \in A_2$. Donc

$$\int_\Omega (\operatorname{sign}(u_1-u_2))(|u_1-u_2|-k)^+(v_1-v_2) \geqq 0 \tag{1.5}$$

pour tout $[u_1, v_1]$, $[u_2, v_2]\in A_2$ et $k\geqq 0$. Posant $k=\|f_1-f_2\|_\infty+\varepsilon$ pour $\varepsilon>0$ dans (1.5), on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon}(\mathrm{sign}\,(u_1-u_2))(|u_1-u_2|-(\|f_1-f_2\|_\infty+\varepsilon))^+(v_1-v_2)\geqq 0\,,$$

où $\Omega_\varepsilon=\{x\in\Omega: |u_1-u_2|>\|f_1-f_2\|_\infty+\varepsilon\}$. Or p.p. sur Ω_ε, on a

$$(\mathrm{sign}\,(u_1-u_2))(|u_1-u_2|-(\|f_1-f_2\|_\infty+\varepsilon))^+(v_1-v_2)<0\,.$$

Donc l'ensemble Ω_ε est négligeable. Par conséquent p.p. sur Ω,

$$|u_1-u_2|\leqq\|f_1-f_2\|_\infty+\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon>0$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, on a

$$\|u_1-u_2\|_\infty\leqq\|f_1-f_2\|_\infty\,,$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE I.10. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (H1) *et qu'une application β de $D(\beta)\subset\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ soit monotone univoque. Alors βA est accrétif dans $L^\infty(\Omega)$.*

DEMONSTRATION. Soient $u_1+\lambda\beta Au_1\ni f_1$ et $u_2+\lambda\beta Au_2\ni f_2$ pour $u_1, u_2\in D(\beta A)$, $f_1, f_2\in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda>0$; D'après le théorème I.9, on a immédiatement l'accrétivité de βA.

COROLLAIRE I.11. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (H1) *avec $[0, 0]\in A$ et qu'une application β de $D(\beta)\subset\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ soit monotone univoque avec* (H3) *et le fait que p.p. $x\in\Omega$, $[x, 0]\in D(\beta)$ et $\beta(x, 0)=0$. S'il existe $u\in L^2(\Omega)$ tel que $u+\lambda\beta A_2u\ni f$ pour $f\in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda>0$, alors $u\in L^\infty(\Omega)$, $\|u\|_\infty\leqq\|f\|_\infty$ et $u+\lambda\beta Au\ni f$.*

DEMONSTRATION. D'après la proposition I.9, $u\in L^\infty$ et $\|u\|_\infty\leqq\|f\|_\infty$. Soit $v\in L^2$ tel que $u+\lambda\beta v=f$ et $v\in A_2u$. D'après $\beta v\in L^\infty$ avec (H3), $v\in L^\infty$. Donc d'après la proposition I.5, $[u, v]\in A$ et donc $u+\lambda\beta Au\ni f$.

THEOREME I.12. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (H1) *et qu'une application β de $D(\beta)\subset\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ vérifie que p.p. $x\in\Omega$, $r\in D_x(\beta)\mapsto\beta(x, r)$ soit maximal monotone univoque avec* (H3). *On suppose βA non vide. Alors βA est m-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$.*

DEMONSTRATION. D'après le corollaire I.10, il suffit de démontrer que pour tout $f\in L^\infty$, il existe $u\in L^\infty(\Omega)$ tel que $u+\beta Au\ni f$.

On peut toujours supposer que $[0, 0]\in A$ et p.p. $x\in\Omega$, $[x, 0]\in D(\beta)$, $\beta(x, 0)=0$. En effet, soit $[u_0, w_0]\in\beta A$. Par définition il existe $v_0\in L^\infty$ tel que $[u_0, v_0]\in A$ et p.p. $x\in\Omega$, $[v_0(x), w_0(x)]\in D(\beta)$, $w_0(x)=\beta(x, v_0(x))$. Définissons un opérateur $\hat{A}$ de L^∞ par $\hat{A}u=A(u+u_0)-v_0$. Alors $\hat{A}$ vérifie (H1) avec $[0, 0]\in\hat{A}$, $Au=\hat{A}(u-u_0)+v_0$ et donc $\beta Au=\beta(\hat{A}(u-u_0)+v_0)$. On définit ensuite une application $\hat{\beta}$ de $D(\hat{\beta})\subset\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ par $\hat{\beta}(x, r)=\beta(x, r+v_0(x))-w_0(x)$ p. p. $x\in\Omega$. Alors p. p. $x\in\Omega$, $r\in D_x(\hat{\beta})\mapsto\hat{\beta}(x, r)$ est maximal monotone univoque avec (H3), $[x, 0]\in D(\hat{\beta})$, $\hat{\beta}(x, 0)=0$ et $\beta Au=\hat{\beta}\hat{A}(u-u_0)+w_0$.

On prend alors $M>0$ tel que $M>2\|f\|_\infty$. D'après (H3), il existe $w_+, w_-\in L^\infty$ tels que p. p. $x\in\Omega$, $[x, w_+(x)]$, $[x, w_-(x)]\in D(\beta)$ et $\beta(x, w_+(x))=M$, $\beta(x, w_-(x))=-M$. On définit une application $\tilde{\beta}$ de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ par

$$\tilde{\beta}(x, r)=\begin{cases} -M+r-w_-(x) & \text{si } r<w_-(x) \\ \beta(x, r) & \text{si } w_-(x)\leqq r\leqq w_+(x) \\ M+r-w_+(x) & \text{si } r>w_+(x)\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

Alors p. p. $x\in\Omega$, $r\in\boldsymbol{R}\mapsto\tilde{\beta}(x, r)$ est maximal monotone univoque avec (H3). Définissons un opérateur B de $L^2(\Omega)$ par

$$B=\{[u, w]\in L^2\times L^2 : \text{p. p. } x\in\Omega,\ w(x)\in-(\tilde{\beta})^{-1}(x, f(x)-u(x))\}\,.$$

Alors B est maximal monotone partout défini coercif dans L^2. En effet, comme $\tilde{\beta}$ vérifie (H3), d'après le lemme I.8, B est maximal monotone dans L^2. Si $[u, w]\in B$, alors on a p. p. sur Ω.

$$|w|\leqq|u|+\|f\|_\infty+M+\|w_+\|_\infty+\|w_-\|_\infty\,,$$

d'où

$$\int|w|^2\leqq\|u\|_2^2+h_1\|u\|_2+h_2\,,$$

où $h_1, h_2>0$. Puisque B est maximal monotone, borné sur bornés dans L^2, d'après le corollaire 2.3 de [8], B est partout défini dans L^2. D'après (1.6), on a pour tout $[u, w]\in B$,

$$\begin{aligned}\int_{\{f-u<-M\}}wu&=\int_{\{f-u<-M\}}(u-f-M-w_-)u\\ &\geqq\int_{\{f-u<-M\}}(u^2-k_1|u|)\geqq\int_{\{f-u<-M\}}u^2-\int_\Omega k_1|u|\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\{f-u>M\}}wu&=\int_{\{f-u>M\}}(u-f-M-w_+)u\\ &\geqq\int_{\{f-u>M\}}(u^2-k_2|u|)\geqq\int_{\{f-u>M\}}u^2-\int_\Omega k_2|u|\,,\end{aligned}$$

$$\int_{\{|f-u|\leq M\}}(wu-u^2)\geqq-\int_{\{|f-u|\leq M\}}(|w|+|u|)|u|\geqq-k_3$$

et donc

$$\int_{\{|f-u|\leq M\}}wu\geqq\int_{\{|f-u|\leq M\}}u^2-k_3\,,$$

où k_1, k_2, $k_3>0$. On a donc

$$\int_\Omega wu \geqq \int_\Omega u^2-(k_1+k_2)\int_\Omega |u|-k_3$$

$$=\|u\|_2^2-K_1\|u\|_2-K_2,$$

où K_1, $K_2>0$, d'où

$$\lim_{\|u\|_2\to+\infty}\int_\Omega \frac{wu}{\|u\|_2}=+\infty .$$

Par conséquent B est coercif dans L^2.

D'après le corollaire 2.7 de [8], A_2+B est maximal monotone coercif dans L^2 et donc d'après le corollaire 2.3 de [8], A_2+B est surjectif dans L^2; il existe $u\in L^2$ tel que $A_2u+Bu\ni 0$ et donc $u+\tilde{\beta}A_2u\ni f$. D'après le corollaire I.11, $u\in L^\infty$ et $u+\tilde{\beta}Au\ni f$. Soit $w\in Au$ tel que $u+\tilde{\beta}w=f$. Comme

$$\|\tilde{\beta}(w)\|_\infty\leqq\|f-u\|_\infty\leqq 2\|f\|_\infty<M,$$

on a $w_-(x)\leqq w(x)\leqq w_+(x)$ et donc $\tilde{\beta}(x, w(x))=\beta(x, w(x))$, d'où $u+\beta Au\ni f$.

I.3. Etude de βA pour β multivoque.

THEOREME I.13. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (H1) *et qu'une application β de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie* (H2) *et* (H3). *Supposons que pour tout $f\in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda>0$, il existe au plus un $u\in L^\infty(\Omega)$ tel que $u+\lambda\beta Au\ni f$. Soit βA non vide. Alors βA est m-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$.*

DEMONSTRATION. D'après la remarque I.6, pour tout $\varepsilon>0$, β_ε est univoque et vérifie (H2) et (H3); de plus $\beta_\varepsilon A$ est non vide. D'après le théorème I.12, $\beta_\varepsilon A$ est m-accrétif dans L^∞ pour tout $\varepsilon>0$; on a

$$\|(I+\lambda\beta_\varepsilon A)^{-1}f_1-(I+\lambda\beta_\varepsilon A)^{-1}f_2\|_\infty\leqq\|f_1-f_2\|_\infty \tag{1.7}$$

pour tout f_1, $f_2\in L^\infty$ et λ, $\varepsilon>0$.

Soit $\lambda>0$ et $f\in L^\infty$. Posons $u_\varepsilon=(I+\lambda\beta_\varepsilon A)^{-1}f$ pour tout $\varepsilon>0$. Alors $u_\varepsilon+\lambda\beta_\varepsilon Au_\varepsilon\ni f$ et $\|u_\varepsilon\|_\infty\leqq\|f\|_\infty$. Soit

$$v_\varepsilon\in Au_\varepsilon \text{ tel que } u_\varepsilon+\lambda\beta_\varepsilon v_\varepsilon=f. \tag{1.8}$$

Alors

$$\|\beta_\varepsilon v_\varepsilon\|_\infty\leqq\frac{\|f-u_\varepsilon\|_\infty}{\lambda}\leqq\frac{2}{\lambda}\|f\|_\infty . \tag{1.9}$$

D'autre part, on a d'après (1.8),

$$u_\varepsilon+\lambda\beta(I+\varepsilon\beta)^{-1}v_\varepsilon\ni f \text{ et } (I+\varepsilon\beta)^{-1}v_\varepsilon\in\beta^{-1}\Big(\frac{f-u_\varepsilon}{\lambda}\Big).$$

D'après (H3) et la remarque I.6, $(I+\varepsilon\beta)^{-1}v_\varepsilon$ est borné dans L^∞. Donc

$$\begin{aligned}\|v_\varepsilon\|_\infty &\leqq \|v_\varepsilon-(I+\varepsilon\beta)^{-1}v_\varepsilon\|_\infty+\|(I+\varepsilon\beta)^{-1}v_\varepsilon\|_\infty \\ &\leqq \varepsilon\|\beta_\varepsilon v_\varepsilon\|_\infty+\|(I+\varepsilon\beta)^{-1}v_\varepsilon\|_\infty .\end{aligned}$$

Donc u_ε et v_ε sont bornés dans L^∞ lorsque $\varepsilon\to 0+$. Soit $\varepsilon_n>0$ tel que

$$u_n=u_{\varepsilon_n}\to u \text{ et } v_n=v_{\varepsilon_n}\to v \text{ dans } \sigma(L^\infty, L^1) \tag{1.11}$$

lorsque $\varepsilon_n\to 0+$. Alors

$$\bar{v}_n=(I+\varepsilon_n\beta)^{-1}v_n=v_n-\varepsilon_n\beta_{\varepsilon_n}v_n\to v \text{ dans } \sigma(L^\infty, L^1) \tag{1.12}$$

lorsque $\varepsilon_n\to 0+$.

Soit $j: \Omega\times\boldsymbol{R}\mapsto]-\infty, +\infty]$ l'intégrande convexe normale telle que p.p. $x\in\Omega$, $\partial j(x, \cdot)=\beta(x, \cdot)$ (cf. lemme I.7). On pose pour tout $u\in L^2$,

$$\phi(u)=\begin{cases}\int j(u) & \text{si } j(u)\in L^1 \\ +\infty & \text{sinon}.\end{cases}$$

Alors ϕ est une fonction convexe s.c.i. propre de L^2 dans $]-\infty, +\infty]$ et le sous différentiel $\partial\phi$ de ϕ coïncide avec le prolongement de β à L^2. D'après (1.8), pour tout $z\in L^2$,

$$\begin{aligned}\phi(z) &\geqq \phi(\bar{v}_n)+\int(z-\bar{v}_n)\frac{f-u_n}{\lambda} \\ &=\phi(\bar{v}_n)+\frac{1}{\lambda}\int(z-v_n)(f-u_n)+\frac{\varepsilon_n}{\lambda^2}\int(f-u_n)^2 .\end{aligned} \tag{1.13}$$

Passant à la limite dans (1.13) lorsque $\varepsilon_n\to 0+$, d'après (1.11) et (1.12),

$$\lambda\phi(z)\geqq\lambda\phi(v)+\int(z-v)f-\int zu+\overline{\lim}\int v_n u_n \tag{1.14}$$

pour tout $z\in L^2$. En particulier $\phi(v)<+\infty$ et donc posant $z=v$ dans (1.14), on a

$$\overline{\lim}\int u_n v_n\leqq\int uv .$$

Donc d'après (1.8) et la proposition I.5,

$$[u, v]\in A \quad\text{et}\quad \int u_n v_n\to\int uv .$$

On a donc

$$\overline{\lim}\int \bar{v}_n \frac{f-u_n}{\lambda} = \overline{\lim}\int v_n \frac{f-u_n}{\lambda} + \varepsilon_n\Big(\frac{f-u_n}{\lambda}\Big)^2 = \int v \frac{f-u}{\lambda}.$$

Donc d'après la proposition 2.5 de [8], $\frac{f-u}{\lambda} \in \beta v$ p. p. sur Ω, et u est solution de $u+\lambda\beta Au \ni f$. D'après l'hypothèse d'unicité de cette solution, on a donc montré que

$$f \in R(I+\lambda\beta A) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon = (I+\lambda\beta_\varepsilon A)^{-1} f \to (I+\lambda\beta A)^{-1} f$$

dans $\sigma(L^\infty, L^1)$ lorsque $\varepsilon \to 0+$. L'accrétivité de βA en résulte. Soient $f_1, f_2 \in L^\infty$ et $\lambda > 0$. On a d'après (1.7),

$$\begin{aligned} &\|(I+\lambda\beta A)^{-1} f_1 - (I+\lambda\beta A)^{-1} f_2\|_\infty \\ &\leqq \varliminf_{\varepsilon\to 0+} \|(I+\lambda\beta_\varepsilon A)^{-1} f_1 - (I+\lambda\beta_\varepsilon A)^{-1} f_2\|_\infty \\ &\leqq \|f_1 - f_2\|_\infty . \end{aligned}$$

Par conséquent, βA est m-accrétif dans L^∞.

DEFINITION I.14. Soit A un opérateur d'un espace des fonctions mesurables. On dit que A est fortement injectif si pour tout $[u_1, v_1]$, $[u_2, v_2] \in A$,

$$(u_1 - u_2)(v_1 - v_2) = 0 \quad \text{entraîne} \quad u_1 = u_2 .$$

LEMME I.15. *Supposons qu'un operateur A soit monotone dans $L^2(\Omega)$, fortement injectif et qu'une application β de $\Omega \times \boldsymbol{R}$ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie que p. p. $x \in \Omega$, $r \in \boldsymbol{R} \mapsto \beta(x, r)$ soit monotone. Alors pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda > 0$, il existe au plus $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que $u + \lambda\beta Au \ni f$.*

DEMONSTRATION. Soient $u_1, u_2 \in L^\infty$ tels que $u_1 + \lambda\beta Au_1 \ni f$ et $u_2 + \lambda\beta Au_2 \ni f$. Par définition, il existe $v_i \in L^\infty(\Omega)$ tel que $v_i \in Au_i$ et p. p. sur Ω, $f - u_i \in \beta v_i$ $(i=1, 2)$. D'après la monotonie de A,

$$\int (u_1 - u_2)(v_1 - v_2) \geqq 0 .$$

D'après la monotonie de β,

$$(u_1 - u_2)(v_1 - v_2) \leqq 0 \qquad \text{p. p. sur } \Omega$$

et donc $(u_1 - u_2)(v_1 - v_2) = 0$ p. p. sur Ω. Puisque A est fortement injectif, $u_1 = u_2$.

D'après le théorème I.14 et lemme I.15, on a le:

COROLLAIRE I.16. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (H1) *et qu'une application β de $\Omega \times \boldsymbol{R}$ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie* (H2) *et* (H3). *De plus on suppose que A est fortement injectif. Soit βA non vide. Alors βA est m-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$.*

Enfin on considère m-accrétivité de βA avec une hypothèse de compacité.

THEOREME I.17. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (H1) *et qu'une application β de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie* (H2) *et* (H3). *On suppose que pour tout $M\geqq 0$, l'ensemble $\{u\in D(A): \|u\|_\infty+\|Au\|_\infty\leqq M\}$ soit relativement compact dans $L^\infty(\Omega)$. Soit βA non vide. Alors il existe un opérateur C m-accrétif de $L^\infty(\Omega)$ tel que $C\subset\beta A$.*

DEMONSTRATION. D'après le théorème I.12, pour tout $\varepsilon>0$, $\beta_\lambda A$ est m-accrétif dans L^∞; pour tout $f\in L^\infty$ et $\lambda>0$, il existe $u_\varepsilon\in L^\infty$ tel que $u_\varepsilon+\lambda\beta_\varepsilon Au_\varepsilon\ni f$. Soit $v_\varepsilon\in Au_\varepsilon$ tel que $u_\varepsilon+\lambda\beta_\varepsilon v_\varepsilon=f$. Posons $J_{\lambda,\varepsilon}=(I+\lambda\beta_\varepsilon A)^{-1}$. On a alors $u_\varepsilon=J_{\lambda,\varepsilon}f$ et

$$\|u_\varepsilon\|_\infty=\|J_{\lambda,\varepsilon}f\|_\infty\leqq\|f\|_\infty. \tag{1.15}$$

D'après (1.9), (1.10) et (1.15), u_ε et v_ε sont bornés dans L^∞ lorsque $\varepsilon\to 0+$. Donc d'après l'hypothèse de compacité, $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est relativement compact dans L^∞ lorsque $\varepsilon\to 0+$.

Donc il existe un filtre $\{\varepsilon_i\}$ tel que lorsque $\varepsilon_i\to 0+$, $u_{\varepsilon_i}=J_{\lambda,\varepsilon_i}f\to J_\lambda f$ dans L^∞ pour tout $f\in L^\infty$ et $\lambda>0$. D'après le lemme I.1, on a

$$J_{\lambda,\varepsilon_i}f=J_{\mu,\varepsilon_i}\Big(\frac{\mu}{\lambda}f+\Big(1-\frac{u}{\lambda}\Big)J_{\lambda,\varepsilon_i}f\Big) \tag{1.16}$$

pour tout $f\in L^\infty$ et λ, $\mu>0$; Passant à la limite dans (1.16) lorsque $\varepsilon_i\to 0+$, comme pour tout f_1, $f_2\in L^\infty$ et λ, $\varepsilon>0$,

$$\|J_{\lambda,\varepsilon}f_1-J_{\lambda,\varepsilon}f_2\|_\infty\leqq\|f_1-f_2\|_\infty,$$

on a pour tout $f\in L^\infty$ et λ, $\mu>0$,

$$J_\lambda f=J_\mu\Big(\frac{\mu}{\lambda}f+\Big(1-\frac{\mu}{\lambda}\Big)J_\lambda f\Big).$$

On définit un opérateur C de L^∞ par

$$C=\Big\{\Big[J_\lambda f,\ \frac{f-J_\lambda f}{\lambda}\Big]: f\in L^\infty \quad\text{et}\quad \lambda>0\Big\}.$$

Alors C est m-accrétif dans L^∞ et $J_\lambda=(I+\lambda C)^{-1}$ pour tout $\lambda>0$.

Pour démontrer $C\subset\beta A$, soient $[u, v]\in C$ et $f\in L^\infty(\Omega)$ tels que $u+v=f$. Alors

$$u=(I+C)^{-1}f=\lim_{\varepsilon_i\to 0+}(I+\beta_{\varepsilon_i}A)^{-1}f.$$

Posons $u_{\varepsilon_i}=(I+\beta_{\varepsilon_i}A)^{-1}f$. Alors $u_{\varepsilon_i}+\beta_{\varepsilon_i}Au_{\varepsilon_i}\ni f$ et donc $Au_{\varepsilon_i}-(\beta_{\varepsilon_i})^{-1}(f-u_{\varepsilon_i})\ni 0$. D'après la remarque I.6,

$$Au_{\varepsilon_i}-\beta^{-1}(f-u_{\varepsilon_i})\ni\varepsilon_i(f-u_{\varepsilon_i}).$$

Soit $w_{\varepsilon_i}\in\beta^{-1}(f-u_{\varepsilon_i})$ tel que $Au_{\varepsilon_i}-w_{\varepsilon_i}\ni\varepsilon_i(f-u_{\varepsilon_i})$. Comme $\|u_{\varepsilon_i}\|_\infty\leqq\|f\|_\infty$ et β vérifie (H3), w_{ε_i} est borné dans L^∞. Soit $\varepsilon_{i_n}>0$ tel que $u_{\varepsilon_{i_n}}\to u$ dans L^∞ et $w_{\varepsilon_{i_n}}\to w$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$ lorsque $\varepsilon_{i_n}\to 0+$.

D'après la proposition I.5, on a $[u, w]\in A$ et d'autre part $w\in\beta^{-1}(f-u)$ p. p. sur Ω. Donc $u+\beta Au\ni f$ et $[u, v]\in\beta A$.

I.4. Etude de βA pour β indépendant de x non surjectif.

On se donne A un opérateur de $L^\infty(\Omega)$ vérifiant la condition:

(K1) A est m-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$, et T-accrétif dans $L^1(\Omega)$, c'est-à-dire, pour tout $[u_1, v_1]$, $[u_2, v_2]\in A$,

$$\int_{\{u_1>u_2\}}(v_1-v_2)\geqq 0\,.$$

Utilisant les résultats de [**6**], (K1) est équivalent à

$$\text{(K2)}\quad\begin{cases}\text{(1)}\quad R(I+A)=L^\infty(\Omega)\\ \text{(2)}\quad \text{pour tout } [u_1, v_1],\ [u_2, v_2]\in A \quad\text{et}\quad p\in\mathcal{P}_0\,,\end{cases}$$

$$\int_\Omega(v_1-v_2)p(u_1-u_2)\geqq 0\,,$$

où $\mathcal{P}_0$ est l'ensemble des fonctions p de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ lipschitziennes croissantes avec $p(0)=0$.

En particulier si A vérifie (K1), alors il vérifie (H1).

THEOREME I.18. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (K1) *avec $[0, 0]\in A$ et que β soit un graphe maximal monotone avec $0\in\beta(0)$. On suppose de plus, si β n'est pas univoque, que A est fortement injectif. Alors βA est accrétif dans $L^\infty(\Omega)$ et $R(I+\lambda\beta A)\supset D(A)$ pour tout $\lambda>0$. Plus précisément pour tout $f\in D(A)$ il existe $u\in D(A)$ et $v\in Au$ tel que $u+\beta v\ni f$ p. p. sur Ω avec $\|v\|_\infty\leqq\|Af\|_\infty$.*

DEMONSTRATION. Dans le cas où β est univoque, d'après le corollaire I.10, βA est accrétif dans L^∞. Dans le cas où β n'est pas univoque, soit $[u_i, w_i]\in\beta A$ $(i=1.2)$. Par définition, il existe $v_i\in L^\infty(\Omega)$ tel que $[u_i, v_i]\in A$ et $w_i\in\beta(v_i)$ p. p. sur Ω $(i=1.2)$. Il existe $\tilde\beta$ un graphe maximal monotone surjectif tel que $w_i\in\tilde\beta(v_i)$ p. p. sur Ω $(i=1.2)$. En effet, il existe un ensemble N négligeable tel que pour tout $x\in\Omega-N$, $[v_i(x), w_i(x)]\in\beta$ $(i=1.2)$. Posons

$$\beta_0=\{[v_i(x), w_i(x)]\in\beta:\ x\in\Omega-N,\ i=1.2\}.$$

Alors β_0 est monotone et $\beta_0\subset\beta$. D'après le corollaire 2.1 de [8], il existe un prolongement $\tilde\beta$ maximal monotone de β_0 avec $D(\tilde\beta)\subset\overline{\operatorname{conv} D(\beta_0)}$. Puisque $D(\beta_0)$

est borné, $D(\tilde{\beta})$ est aussi borné. Donc d'après, le corollaire 2.2 de [8], $\tilde{\beta}$ est surjectif. D'après la construction de $\tilde{\beta}$, $[v_i(x), w_i(x)]\in\tilde{\beta}$ p.p. $x\in\Omega$, et donc $[u_i, w_i]\in\beta A$ $(i=1.2)$; d'après le théorème I.12, βA est accrétif, d'où

$$\|(u_1-u_2)+\lambda(w_1-w_2)\|_\infty\geqq\|u_1-u_2\|_\infty$$

pour tout $\lambda>0$. Donc βA est accrétif dans L^∞.

Posons $\tilde{A}\tilde{u}=A(\tilde{u}+f)-g$, où $g\in Af$. Alors u est solution de $u+\beta Au\ni f$ si et seulement si $\tilde{u}=u-f$ est une solution de $\gamma(\tilde{u})+\tilde{A}\tilde{u}\ni -g$, où $\gamma(r)=-\beta^{-1}(-r)$. Pour tout λ, $\varepsilon>0$, il existe $\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon}\in L^2$ tel que $\varepsilon\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon}+\gamma_\lambda(\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon})+\tilde{A}_2\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon}\ni -g$, d'où on a $\|\gamma_\lambda(\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon})\|_\infty\leqq\|g\|_\infty$. En effet, comme $p\circ\gamma_\lambda\in\mathcal{P}_0$ pour $p\in\mathcal{P}_0$,

$$\int p(\gamma_\lambda(\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon}))\gamma_\lambda(\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon})\leqq\int(-g)p(\gamma_\lambda(\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon}))\,.$$

Posons $j=\int p$. On a $\int j(\gamma_\lambda(\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon}))\leqq\int j(-g)$. Si l'on choisi $p(r)=(|r|-\|g\|_\infty)^+(\text{sign } r)$, alors $j(r)=\frac{1}{2}(|r|-\|g\|_\infty)^{+2}$. Donc

$$\int\frac{1}{2}(|\gamma_\lambda(\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon})|-\|g\|_\infty)^{+2}\leqq 0,\qquad \text{d'où}\quad \|\gamma_\lambda(\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon})\|_\infty\leqq\|g\|_\infty\,.$$

D'après le théorème 2.4 de [8], $\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon}\to\tilde{u}_\varepsilon$ et $\gamma_\lambda(\tilde{u}_{\lambda,\varepsilon})\to v_\varepsilon$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $\lambda\to 0+$ et $\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon+v_\varepsilon+\tilde{A}_2\tilde{u}_\varepsilon\ni -g$, $v_\varepsilon\in\gamma(\tilde{u}_\varepsilon)$ avec $\|v_\varepsilon\|_\infty\leqq\|g\|_\infty$. Soit $\varepsilon_n>0$ tel que lorsque $\varepsilon_n\to 0+$, $v_{\varepsilon_n}\to v$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$. D'après $\tilde{u}_{\varepsilon_n}-(\varepsilon_n+\gamma)^{-1}(-A_2(\tilde{u}_{\varepsilon_n}+f))\ni 0$, on a $\|\tilde{u}_{\varepsilon_n}+f\|_\infty\leqq\|f\|_\infty$, d'où $\|\tilde{u}_{\varepsilon_n}\|_\infty\leqq 2\|f\|_\infty$. Comme $\tilde{u}_{\varepsilon_n}=[(\gamma+\tilde{A}_2)^{-1}]_{\varepsilon_n}(-g)$, lorsque $\varepsilon_n\to 0+$, $\tilde{u}_{\varepsilon_n}\to\tilde{u}$ dans L^2. Donc $v\in\gamma(\tilde{u})$ et $\|v\|_\infty\leqq\|g\|_\infty$. Comme $-g-\varepsilon_n\tilde{u}_{\varepsilon_n}-v_{\varepsilon_n}\to -g-v$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$, on a donc $-g-v\in\tilde{A}_2\tilde{u}$. D'après le corollaire I.11, $\tilde{u}\in L^\infty(\Omega)$ et donc $\tilde{u}$ est une solution de $\gamma(\tilde{u})+\tilde{A}\tilde{u}\ni -g$. Donc $R(I+\beta A)\supset D(A)$, $[u, v]\in A$ et $\|v\|_\infty\leqq\|Af\|_\infty$.

Chapitre II. Solutions d'équations d'évolution.

II.1. Solutions intégrales de $\frac{du}{dt}+\beta Au\ni f$.

On définit le "produit intérieur" $\tau(\cdot,\cdot)$ sur $L^\infty(\Omega)$ par

$$\tau(u, v)=\lim_{\lambda\to 0+}\frac{\|u+\lambda v\|_\infty-\|u\|_\infty}{\lambda}$$

pour tout u, $v\in L^\infty(\Omega)$. On rappelle les résultats suivants:

DEFINITION II.1. (Bénilan [2]). Supposons qu'un opérateur A soit accrétif dans $L^\infty(\Omega)$, $T>0$ et $f\in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$. On appelle solution intégrale sur

$[0, T]$ de l'équation $\frac{du}{dt}+Au\ni f$ toute fonction $u\in C([0, T]; L^\infty(\Omega))$ vérifiant l'inégalité

$$\|u(t)-y\|_\infty \leqq \|u(s)-y\|_\infty + \int_s^t \tau(y-u(\sigma), z-f(\sigma))d\sigma$$

pour tout $[y, z]\in A$ et $0\leqq s\leqq t\leqq T$.

LEMME II.2. (Bénilan [2]). *Supposons qu'un opérateur A soit accrétif dans $L^\infty(\Omega)$ et pour tout $\lambda>0$, p.p. $t\in]0, T[$ et $f\in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$, $R(I+\lambda A)\supset D(A)+\lambda f(t)$.*

Soit $u_0\in \overline{D(A)}^{L^\infty(\Omega)}$. Alors il existe u une solution intégrale unique sur $[0, T]$ de $\frac{du}{dt}+Au\ni f$ telle que $u(0)=u_0$. De plus $u(t)\in \overline{D(A)}^{L^\infty(\Omega)}$ pour tout $t\in[0, T]$.

D'après le lemme II.2 et la m-accrétivité de βA dans le chapitre I, on a les résultats suivants:

THEOREME II.3. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (H1) *et qu'une application β de $\Omega\times \boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie* (H2) *et* (H3).

Si β n'est pas univoque, on suppose de plus que pour tout $g\in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda>0$, il existe au plus un $u\in L^\infty(\Omega)$ tel que $u+\lambda\beta Au\ni g$. Soient βA non vide, $f\in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ et $u_0\in \overline{D(\beta A)}^{L^\infty(\Omega)}$. Alors il existe u une solution intégrale unique sur $[0, T]$ de $\frac{du}{dt}+\beta Au\ni f$ telle que $u(0)=u_0$. De plus $u(t)\in \overline{D(\beta A)}^{L^\infty(\Omega)}$ pour tout $t\in[0, T]$.

THEOREME II.4. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (K1) *avec $[0, 0]\in A$ et que β soit un graphe maximal monotone avec $0\in\beta(0)$. On suppose de plus, si β n'est pas univoque, que A est fortement injectif. Soit $u_0\in \overline{D(\beta A)}^{L^\infty(\Omega)}$. Alors il existe u une solution intégrale unique sur $[0, T]$ de $\frac{du}{dt}+\beta Au\ni 0$ telle que $u(0)=u_0$. De plus, $u(t)\in \overline{D(\beta A)}^{L^\infty(\Omega)}$ pour tout $t\in[0, T]$.*

Supposons qu'un opérateur A soit m-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$. On définit l'ensemble $\hat{D}(A)=\{u\in L^\infty(\Omega): \lim_{\lambda\to 0+} \|A_\lambda u\|_\infty<+\infty\}$ (cf. [**11**]).

PROPOSITION II.5. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (H1) *et qu'une application β de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie* (H2) *et* (H3). *Soit βA non vide. Soit C un opérateur du théorème* I.17. *Alors $\hat{D}(C)=D(\beta A)$ et pour tout $u\in D(\beta A)$ et $\lambda>0$, $\|C_\lambda u\|_\infty\leqq\|\beta Au\|_\infty$.*

DEMONSTRATION. Soit $u\in\hat{D}(C)$. Par définition, $\|C_\lambda u\|_\infty<+\infty$ lorsque $\lambda\to 0+$. Posons $w_\lambda=C_\lambda u$; on a $[u-\lambda w_\lambda, w_\lambda]\in C\subset\beta A$. Par définition, il existe $v_\lambda\in L^\infty$ tel que $[u-\lambda w_\lambda, v_\lambda]\in A$ et p.p. $x\in\Omega$, $w_\lambda(x)\in\beta(x, v_\lambda(x))$. Donc v_λ est borné dans L^∞ lorsque $\lambda\to 0+$. Soit $\lambda_n>0$ tel que $v_{\lambda_n}\to v$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$ lorsque

$\lambda_n \to 0+$. Comme $u-\lambda_n w_{\lambda_n} \to u$ dans L^∞, d'après la proposition I.5, $[u, v] \in A$. Soit $M>0$ tel que $\|w_\lambda\|_\infty < M$ lorsque $\lambda \to 0+$. D'après (H3), il existe $v_+, v_- \in L^\infty$ tels que p. p. $x \in \Omega$, $\pm M \in \beta(x, \pm v(x))$. On définit une application $\tilde{\beta}$ de $\Omega \times \boldsymbol{R}$ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$ par

$$\tilde{\beta}(x, r) = \begin{cases} -M+r-v_-(x) & \text{si } r \in]-\infty, v_-(x)[\\ \beta(x, r) & \text{si } r \in [v_-(x), v_+(x)] \\ M+r-v_+(x) & \text{si } r \in]v_+(x), +\infty[. \end{cases}$$

Alors $\tilde{\beta}^{-1}$ vérifie (H2) et (H3). D'autre part, comme $v_\lambda(x) \in [v_-(x), v_+(x)]$, lorsque $\lambda \to 0+$, $v(x) \in [v_-(x), v_+(x)]$. Donc par définition, $\tilde{\beta}(x, v(x)) = \beta(x, v(x))$. Utilisant le lemme I.7, il existe $w \in L^\infty$ tel que $w(x) \in \tilde{\beta}(x, v(x))$ p. p. $x \in \Omega$, d'où $w(x) \in \beta(x, v(x))$ p. p. $x \in \Omega$ et donc $[u, w] \in \beta A$. Par conséquent $u \in D(\beta A)$.

Soit $u \in D(\beta A)$. Par définition, il existe $v, w \in L^\infty(\Omega)$ tels que $[u, v] \in A$ et p. p. $x \in \Omega$, $w(x) \in \beta(x, v(x))$. Puisque $\beta_{\varepsilon_i} v \in \beta_{\varepsilon_i} Au$, on a $u = J_{\lambda, \varepsilon_i}(u+\lambda \beta_{\varepsilon_i} v)$. Donc d'après la construction de C, on a

$$\begin{aligned} \|C_\lambda u\|_\infty &= \left\| \frac{u-(I+\lambda C)^{-1}u}{\lambda} \right\|_\infty \\ &= \lim_{\varepsilon_i \to 0+} \left\| \frac{J_{\lambda, \varepsilon_i}(u+\lambda \beta_{\varepsilon_i} v) - J_{\lambda, \varepsilon_i} u}{\lambda} \right\|_\infty \\ &\leqq \lim_{\varepsilon_i \to 0+} \|\beta_{\varepsilon_i} v\|_\infty \leqq \|w\|_\infty . \end{aligned}$$

Donc $u \in \hat{D}(C)$. De plus pour tout $u \in D(\beta A)$ et $\lambda > 0$, $\|C_\lambda u\|_\infty \leqq \|\beta A u\|_\infty$.

Utilisant les résultats de [2], on obtient donc:

THEOREME II.6. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (H1) *et qu'une application β de $\Omega \times \boldsymbol{R}$ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie* (H2) *et* (H3). *Soit βA non vide. Si β n'est pas univoque, on suppose de plus pour tout $g \in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda > 0$, il existe au plus un $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que $u + \lambda \beta A u \ni g$. Soient $f \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$, u solution intégrale de $\frac{du}{dt} + \beta A u \ni f$, t point de Lebesgue à droite de f. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) $u(t) \in D(\beta A)$,

(2) $\overline{\lim_{h \to 0+}} \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} \right\|_\infty < +\infty$.

En particulier, si $f \in VB(0, T; L^\infty(\Omega))$, alors u est lipschitzienne si et seulement si $u(0) \in D(\beta A)$, et alors pour tout $t \in [0, T]$, $u(t) \in D(\beta A)$.

II.2. Solutions faibles de $\frac{du}{dt} + \beta A u \ni 0$.

On suppose qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie:

$$(\mathrm{HC})\quad \begin{cases} A \text{ est } m\text{-accrétif dans } L^\infty(\Omega), \\ A \text{ est cycliquement monotone dans } L^2(\Omega), \text{ c'est-à-dire}, \end{cases}$$

pour toute suite cyclique $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n = u_0$ de $D(A)$ et toute suite $v_i \in Au_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, on a $\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (u_i - u_{i-1}) v_i \geqq 0$.

REMARQUE II.7. (1) Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie (HC). Alors il existe une fonction convexe s. c. i. propre φ de $L^2(\Omega)$ dans $]-\infty, +\infty]$ telle que $A_2 = \partial\varphi$, où $\partial\varphi$ est le sous différentiel de φ. En effet, A_2 est maximal monotone et cycliquement monotone dans $L^2(\Omega)$. D'après le théorème 2.5 de [8], il en résulte.

(2) Si un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie (HC), alors A vérifie (H1).

THEOREME II.8. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (HC) *et qu'une application β de $\Omega \times \boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie* (H2) *et* (H3). *Soit βA non vide. On suppose que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée:*

(1) *β est univoque,*

(2) *pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda > 0$, il existe au plus un $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que $u + \lambda\beta Au \ni f$,*

(3) *pour tout $M \geqq 0$, l'ensemble $\{u \in D(A) : \|u\|_\infty + \|Au\|_\infty \leqq M\}$*

soit relativement compact dans $L^\infty(\Omega)$.

Alors pour tout $u_0 \in D(\beta A)$, il existe $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[\,; L^\infty(\Omega))$ telle que

$$(2.1)\qquad \begin{cases} u(t) \in D(\beta A) \text{ pour tout } t \geqq 0 \\ \dfrac{du}{dt}(t) \in L^\infty(]0, +\infty[\,; \sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))) \\ \dfrac{du}{dt}(t) + \beta Au(t) \ni 0 \ p.p. \text{ sur }]0, +\infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

DEMONSTRATION. Sous les hypothèses du théorème, il existe un opérateur C m-accrétif de L^∞ tel que $C \subset \beta A$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère l'équation approchée

$$(2.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t-\varepsilon)}{\varepsilon} + Cu_\varepsilon(t) \ni 0 & \text{si } t > 0 \\ u_\varepsilon(t) = u_0 & \text{si } t \leqq 0 \end{cases}$$

dans L^∞. Puisque C est m-accrétif dans L^∞, l'équation (2.2) s'écrit

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t) = (I + \varepsilon C)^{-1} u_\varepsilon(t-\varepsilon) & \text{si } t > 0 \\ u_\varepsilon(t) = u_0 & \text{si } t \leqq 0 \end{cases}$$

et elle admet au plus une solution. Donc $u_\varepsilon(t)=(I+\varepsilon C)^{-k}u_0$ pour tout $t \in](k-1)\varepsilon, k\varepsilon]$ ou $u_\varepsilon(t)=(I+\varepsilon C)^{-[t/\varepsilon]}u_0$ pour tout $t>0$. D'après le théorème I de [12], $u_\varepsilon(t)$ converge uniformément pour tout t borné dans L^∞ vers $u(t)$ lorsque $\varepsilon\to 0+$ et si l'on pose $u(t)=S(t)u_0$, alors $S(t)$ est un semi-groupe continu de contractions non linéaires engendrés par C. D'après le théorème 1.1 de [2], la limite $u(t)$ est la solution intégrale sur $[0, +\infty[$ de $\dfrac{du}{dt}+Cu\ni 0$, $u(0)=u_0$. De plus d'après la proposition II.5,

$$\|u(t)-u(s)\|_\infty \leqq |t-s|\,\|\beta A u_0\|_\infty$$

pour tout t, $s\geqq 0$. Donc p. p. $t\in]0, +\infty[$, $u(t)$ est dérivable dans la topologie $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$.

Posons $w_\varepsilon(t)=\dfrac{u_\varepsilon(t)-u_\varepsilon(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$; on a pour tout $t>0$,

$$\|w_\varepsilon(t)\|_\infty=\frac{1}{\varepsilon}\|(I+\varepsilon C)^{-[t/\varepsilon]}u_0-(I+\varepsilon C)^{-[(t-\varepsilon)/\varepsilon]}u_0\|_\infty \leqq \|\beta A u_0\|_\infty ,$$

d'où w_ε est borné dans $L^\infty(]0, +\infty[\times\Omega)$. Puisque $C\subset\beta A$, soit $w_\varepsilon(t)\in L^\infty(\Omega)$ tel que $w_\varepsilon(t)+\beta v_\varepsilon(t)\ni 0$ et $v_\varepsilon(t)\in A u_\varepsilon(t)$. D'après la remarque I.6, v_ε est aussi borné dans $L^\infty(]0, +\infty[\times\Omega)$. Soit $\varepsilon_n>0$ tel que $v_{\varepsilon_n}\to v$ et $w_{\varepsilon_n}\to w$ dans $\sigma(L^\infty(]0, +\infty[\times\Omega), L^1(]0, +\infty[\times\Omega))$ lorsque $\varepsilon_n\to 0+$.

Soit $T>0$. En particulier, pour tout $\zeta\in\mathfrak{D}(]0, T[\,; L^2(\Omega))$

$$\lim_{\varepsilon_n\to 0+}\langle w_{\varepsilon_n}, \zeta\rangle=\langle w, \zeta\rangle ,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\langle\frac{du}{dt}, \zeta\rangle &= -\langle u, \frac{d\zeta}{dt}\rangle \\
&= -\lim_{\varepsilon_n\to 0+}\langle u_{\varepsilon_n}(t), \frac{\zeta(t+\varepsilon_n)-\zeta(t)}{\varepsilon_n}\rangle \\
&= -\lim_{\varepsilon_n\to 0+}\int_0^T\int_\Omega u_{\varepsilon_n}(t)\frac{\zeta(t+\varepsilon_n)-\zeta(t)}{\varepsilon_n} \\
&= \lim_{\varepsilon_n\to 0+}\int_0^T\int_\Omega \frac{u_{\varepsilon_n}(t)-u_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\zeta(t)+\overline{\lim_{\varepsilon_n\to 0+}}\int_0^{\varepsilon_n}\int_\Omega \frac{u_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\zeta(t) \\
&= \lim_{\varepsilon_n\to 0+}\langle w_{\varepsilon_n}, \zeta\rangle=\langle w, \zeta\rangle .
\end{aligned}$$

On a donc $\dfrac{du}{dt}=w$ dans $\mathfrak{D}'(]0, +\infty[\,; L^2(\Omega))$.

D'autre part, puisque $u_{\varepsilon_n}\to u$ dans $L^\infty(]0, +\infty[\times\Omega)$ et $v_{\varepsilon_n}\to v$ dans $\sigma(L^\infty(]0, +\infty[\times\Omega), L^1(]0, +\infty[\times\Omega))$, d'après la proposition I.5,

$$(2.3) \qquad u(t) \in D(A) \quad \text{et} \quad v(t) \in Au(t) \text{ p.p. } t \in]0, +\infty[.$$

Pour montrer $\dfrac{du}{dt}+\beta v \ni 0$, soit $j: \Omega \times \boldsymbol{R} \mapsto]-\infty, +\infty]$ l'intégrande convexe normale telle que p.p. $x \in \Omega$, $\partial j(x, \cdot)=\beta^{-1}(x, \cdot)$. On pose pour tout $z \in L^2(]0, T[\times\Omega)$,

$$(2.4) \qquad J(z)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^T\int_\Omega j(z) & \text{si } j(z) \in L^1(]0, T[\times\Omega) \\ +\infty & \text{sinon}. \end{cases}$$

Alors J est une fonction convexe s.c.i. propre de $L^2(\Omega)$ dans $]-\infty, +\infty]$ et le sous différentiel ∂J de J coïncide avec le prolongement de β^{-1} à $L^2(]0, T[\times\Omega)$. Donc on a pour tout $z \in L^2(]0, T[\times\Omega)$,

$$J(z)-J(-w_{\varepsilon_n}) \geqq \int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n}(z+w_{\varepsilon_n}).$$

D'après (2.4), on a

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega j(-w_{\varepsilon_n}) &\leqq \int_0^T\int_\Omega j(z)-\int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n}(z+w_{\varepsilon_n}) \\ (2.5) \qquad &= \int_0^T\int_\Omega j(z)-\int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n} z-\int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n} w_{\varepsilon_n} \\ &= \int_0^T\int_\Omega j(z)-\int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n} z-\int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n} \frac{u_{\varepsilon_n}(t)-u_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}. \end{aligned}$$

On va estimer le dernier terme dans (2.5). D'après la remarque II.6, $A_2=\partial\varphi$. Puisque $v_{\varepsilon_n} \in \partial\varphi(u_{\varepsilon_n})$, on a

$$(2.6) \qquad \int_\Omega v_{\varepsilon_n}(t)(u_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n)-u_{\varepsilon_n}(t)) \leqq \varphi(u_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n))-\varphi(u_{\varepsilon_n}(t)).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (2.7) \qquad & \int_0^T \frac{\varphi(u_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n))-\varphi(u_{\varepsilon_n}(t))}{\varepsilon_n} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_n}\sum_{i=1}^k \int_{(i-1)\varepsilon_n}^{i\varepsilon_n} (\varphi(u_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n))-\varphi(u_{\varepsilon_n}(t))) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_n}\left(\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(u_0)-\int_{(k-1)\varepsilon_n}^{k\varepsilon_n}\varphi(u_{\varepsilon_n}(T))\right)=\varphi(u_0)-\varphi(u_{\varepsilon_n}(T)), \end{aligned}$$

où $T=k\varepsilon_n$. Or d'après le lemme 3.3 de [8], la fonction $t \mapsto \varphi(u(t))$ est absolument continue et p.p. $t \in]0, T[$,

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t))=\int_\Omega v(t)\frac{du}{dt}(t).$$

On a donc

$$\int_0^T\int_\Omega v(t)\frac{du}{dt}(t)=\int_0^T\frac{d}{dt}\varphi(u(t))=\varphi(u(T))-\varphi(u_0). \tag{2.8}$$

Donc d'après (2.6)-(2.8), on a

$$\int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n}(t)\frac{u_{\varepsilon_n}(t)-u_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \tag{2.9}$$

$$\leqq\varphi(u_{\varepsilon_n}(T))-\varphi(u(T))+\int_0^T\int_\Omega v(t)\frac{du}{dt}.$$

D'après (2.9), l'inégalité (2.5) s'écrit

$$\int_0^T\int_\Omega j(-w_{\varepsilon_n}) \tag{2.10}$$

$$\leqq\varphi(u(T))-\varphi(u_{\varepsilon_n}(T))+\int_0^T\int_\Omega j(z)-\int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n}z-\int_0^T v\frac{du}{dt}.$$

Notons que φ est s. c. i. dans $L^2(\Omega)$ et $u_{\varepsilon_n}(T)\to u(T)$ dans $L^\infty(\Omega)$ lorsque $\varepsilon_n\to 0+$ et donc $\varphi(u(T))\leqq\varliminf_{\varepsilon_n\to 0+}\varphi(u_{\varepsilon_n}(T))$. Passant à la limite dans (2.10) lorsque $\varepsilon_n\to 0+$, on a

$$\int_0^T\int_\Omega j\left(-\frac{du}{dt}\right)\leqq\varliminf_{\varepsilon_n\to 0+}\int_0^T\int_\Omega j(-w_{\varepsilon_n})$$

$$\leqq\int_0^T\int_\Omega j(z)-\int_0^T\int_\Omega v\left(z+\frac{du}{dt}\right),$$

d'où $\dfrac{du}{dt}+\beta v\ni 0$. Donc avec (2.3), on

$$\frac{du}{dt}(t)+\beta Au(t)\ni 0 \qquad \text{p.p.}\quad t\in]0,+\infty[.$$

D'après le théorème II.6, $u(t)\in D(\beta A)$ pour tout $t\geqq 0$.

REMARQUE II.9. Dans le théorème II.7, si $0\in\beta(x, 0)$ p.p. $x\in\Omega$, alors $t\mapsto\varphi(u(t))$ est décroissante. En effet, on a d'après $v_\varepsilon\in\partial\varphi(u_\varepsilon)$,

$$\varphi(u_\varepsilon(t-\varepsilon))-\varphi(u_\varepsilon(t))\geqq\varepsilon\int_\Omega v_\varepsilon(t)\frac{u_\varepsilon(t-\varepsilon)-u_\varepsilon(t)}{\varepsilon}$$

$$=-\varepsilon+\int_\Omega v_\varepsilon(t)w_\varepsilon(t)\geqq 0,$$

d'où $\varphi(u_\varepsilon(t))\leqq\varphi(u_\varepsilon(t-\varepsilon))$ et donc $\varphi(u_\varepsilon(t))\leqq\varphi(u_0)$ pour tout $t\geqq 0$. Passant à la limite lorsque $\varepsilon\to 0+$,

$$\varphi(u(t)) \leqq \varliminf_{\varepsilon_n \to 0+} \varphi(u_\varepsilon(t)) \leqq \varphi(u_0)$$

pour tout $t \geqq 0$. Soit $0 \leqq s \leqq t$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(u(t)) &= \varphi(S(t)u_0) = \varphi(S(t-s)S(s)u_0) \\ &\leqq \varphi(S(s)u_0) = \varphi(u(s)).\end{aligned}$$

Donc $\varphi(u(t))$ est décroissante en $t \geqq 0$.

REMARQUE II.10. Dans le théorème II.7, si A est linéaire injectif, alors il y a unicité de la solution u de (2.1). En effet, soient u_1, u_2 deux solutions de (2.1). D'après la monotonie de β, p.p. $t \in]0, +\infty[$, il existe $v_i \in Au_i(t)$ $(i=1, 2)$ tels que

$$\int_\Omega \frac{d}{dt}(u_1-u_2)(t)(v_1-v_2) \leqq 0.$$

Puisque A est linéaire et $A \subset \partial\varphi$, d'après le lemme 3.3 de [8], on a $\frac{d}{dt}\varphi(u_1-u_2) \leqq 0$ p.p. $t \in]0, +\infty[$; $\varphi(u_1-u_2)$ est décroissante en $t \geqq 0$ et donc $\varphi(u_1-u_2)=0$. Or d'après la proposition 2.15 de [8], $\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |A_2^{1/2}u|^2$, donc $A_2^{1/2}(u_1-u_2)=0$ et $A(u_1-u_2)=0$, d'où $u_1=u_2$.

COROLLAIRE II.11. *Supposons qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie* (HC) *et* (K1) *avec* $[0, 0] \in A$ *et que β soit un groupe maximal monotone avec* $0 \in \beta(0)$. *On suppose de plus, si β n'est pas univoque, que A est fortement injectif. Alors pour tout $u_0 \in D(\beta A)$, il existe $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[; L^\infty(\Omega))$ telle que*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in L^\infty(]0, +\infty[; \sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))) \\ \dfrac{du}{dt}(t) + \beta Au(t) \ni 0 \ p.p. \ t \in]0, +\infty[\\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

DEMONSTRATION. Soit $u_0 \in D(\beta A)$. Par définition, il existe v_0, $w_0 \in L^\infty(\Omega)$ tels que $v_0 \in Au_0$ et $w_0 \in \beta(v_0)$. Comme dans la démonstration du théorème II.8, soit $v_\varepsilon(t) \in L^\infty(\Omega)$ tel que $v_\varepsilon(t) \in Au_\varepsilon(t)$ et

$$\frac{u_\varepsilon(t)-u_\varepsilon(t-\varepsilon)}{\varepsilon} + \beta v_\varepsilon(t) \ni 0 . \tag{2.11}$$

On a $\|v_\varepsilon(t)\|_\infty \leqq \|Au_0\|_\infty$. En effet d'après (2.11)

$$u_\varepsilon(t) + \varepsilon\beta v_\varepsilon(t) \ni u_\varepsilon(t \quad \varepsilon) ,$$

d'où d'après le théorème I.18, $\|v_\varepsilon(t)\|_\infty \leqq \|Au_\varepsilon(t-\varepsilon)\|_\infty$. Or puisque $v_\varepsilon(t) \in Au_\varepsilon(t)$, $\|Au_\varepsilon(t)\|_\infty \leqq \|v_\varepsilon(t)\|_\infty$. Donc $\|Au_\varepsilon(t)\|_\infty$ est décroissant en t. On a $\|v_\varepsilon(t)\|_\infty \leqq \|Au_0\|_\infty$. On a donc

$$\|v(t)\|_\infty \leqq \varliminf_{\varepsilon_n \to 0+} \|v_\varepsilon(t)\|_\infty \leqq \|Au_0\|_\infty .$$

Soit $M>0$ tel que $\|Au_0\|_\infty < M$. Il existe $\tilde{\beta}$ un graphe maximal monotone surjectif tel que $\tilde{\beta}=\beta$ sur $]-M, M[$. Donc d'après le théorème II.8, il existe $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[\,; L^\infty(\Omega))$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in L^\infty(]0, +\infty[\,: \sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))) \\ \dfrac{du}{dt}(t)+\tilde{\beta}v(t) \ni 0 \quad \text{et} \quad v(t) \in Au(t) \ \text{p.p.} \ t \in]0, +\infty[\\ u(0)=u_0 . \end{cases}$$

Puisque $\|v(t)\|_\infty < M$, $\tilde{\beta}v(t)=\beta v(t)$. On a donc

$$\frac{du}{dt}(t)+\beta Au(t) \ni 0 \qquad \text{p.p.} \quad t \in]0, +\infty[.$$

Chapitre III. Exemples et applications.

Supposons que φ est une fonction de $L^2(\Omega)$ dans $[0, +\infty]$ convexe s.c.i. avec $\varphi(0)=0$ vérifiant:

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} \text{pour tout } u, \hat{u} \in L^2(\Omega) \ \text{ et } \ p \in \mathcal{C}^1(\boldsymbol{R}) \ \text{ avec } \ 0 \leqq p' \leqq 1, \quad p(0)=0, \\ \varphi(u-p(u-\hat{u}))+\varphi(\hat{u}+p(u-\hat{u})) \leqq \varphi(u)+\varphi(\hat{u}). \ \text{(cf. [6])}. \end{cases}$$

LEMME III.1. *Si φ est une fonction de $L^\infty(\Omega)$ dans $[0, +\infty]$ convexe s.c.i. avec $\varphi(0)=0$ vérifiant* (3.1), *alors $A=\partial\varphi \cap L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ vérifie* (HC) *et* (K1).

DEMONSTRATION. On va d'abord démontrer que A vérifie (K2). Utilisant (3.1), pour tout $[u, v]$, $[\hat{u}, \hat{v}] \in A$ et $p \in \mathcal{C}^1(\boldsymbol{R})$ avec $0 \leqq p' \leqq 1$, $p(0)=0$, on a

$$\text{(3.2)} \qquad \int_\Omega (v-\hat{v})p(u-\hat{u}) \geqq 0 .$$

En régularisant par convolution, étant donné $p \in \mathcal{P}_0$, il existe $p_k \in \mathcal{C}^1(\boldsymbol{R})$ avec $0 \leqq p_k' \leqq 1$, $p_k(0)=0$ tel que $p_k \to p$ uniformément sur tout compact. D'après (3.2), on a $\int_\Omega (v-\hat{v})p_k(u-\hat{u}) \geqq 0$. Or on a $|(v-\hat{v})p_k(u-\hat{u})| \leqq |(v-\hat{v})(u-\hat{u})|$. Donc on en déduit par convergence dominée que $\int_\Omega (v-\hat{v})p(u-\hat{u}) \geqq 0$.

Montrons $R(I+A)=L^{\infty}(\Omega)$. Soit $f\in L^{\infty}(\Omega)$.

Il existe $u\in L^{2}(\Omega)$ tel que $u+\partial\varphi(u)\ni f$, d'où comme $[0, 0]\in A$, on a $\|u\|_{\infty}\leqq\|f\|_{\infty}$ et donc $u\in L^{\infty}(\Omega)$ avec $u+Au\ni f$. Par conséquent, $R(I+A)=L^{\infty}(\Omega)$. Donc A vérifie (K2).

Comme (K2) est équivalente à (K1) (cf. [**6**]), A vérifie (K1).

D'après (K1), A est m-accrétif dans $L^{\infty}(\Omega)$. On sait que $\partial\varphi$ est cycliquement monotone dans $L^{2}(\Omega)$ (cf. [8]). Donc A vérifie (HC).

EXEMPLE 1. Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^{N}$ à bord Γ régulier. Soient j une fonction de $\boldsymbol{R}$ dans $[0, +\infty]$ convexe s. c. i. avec $j(0)=0$ et $\gamma=\partial j$. On définit φ une fonction de $L^{2}(\Omega)$ par

$$\varphi(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\Omega}\frac{1}{2}|\operatorname{grad} u|^{2}+\int_{\Gamma}j(u) & \text{si} \quad u\in H^{1}(\Omega)\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}\tag{3.4}$$

Alors φ est une fonction de $L^{2}(\Omega)$ dans $[0, +\infty]$ convexe s. c. i. avec $\varphi(0)=0$ et le sous différentiel de φ:

$$\partial\varphi=\{[u, v]\in L^{2}(\Omega)\times L^{2}(\Omega): u\in H^{2}(\Omega),\ v=-\Delta u \ \text{p. p. sur } \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma(u)\ni 0 \ \text{p. p. sur } \Gamma\},$$

où $\dfrac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale extérieure (cf. [7], [**9**]).

LEMME III.2.

(1) *φ vérifie* (3.1),

(2) *si γ est injectif dans $\boldsymbol{R}$, alors φ est strictement convexe dans $L^{2}(\Omega)$,*

(3) *pour tout $M\geqq 0$, l'ensemble $\{u\in D(\partial\varphi): \|u\|_{\infty}+\|\partial\varphi(u)\|_{\infty}\leqq M\}$ est relativement compact dans $C(\bar{\Omega})$.*

DEMONSTRATION. (1) Pour tout $r, \hat{r}\in\boldsymbol{R}$ et $p\in C^{1}(\boldsymbol{R})$ avec $0\leqq p'\leqq 1$, $p(0)=0$, on a $j(r-p(r-\hat{r}))+j(\hat{r}+p(r-\hat{r}))\leqq j(r)+j(\hat{r})$.

Soient $u, \hat{u}\in L^{2}(\Omega)$ et $p\in C^{1}(\boldsymbol{R})$ avec $0\leqq p'\leqq 1$ et $p(0)=0$.

Montrons (3.1). Si $\varphi(u)+\varphi(\hat{u})=+\infty$, alors c'est trivial. Si $\varphi(u)+\varphi(\hat{u})<+\infty$, on a $u, \hat{u}\in H^{1}(\Omega)$ et donc $u-p(u-\hat{u}), \hat{u}+p(u-\hat{u})\in H^{1}(\Omega)$. On a donc

$$\begin{aligned}&\varphi(u-p(u-\hat{u}))+\varphi(\hat{u}+p(u-\hat{u}))\\ &\quad=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|(1-p'(u-\hat{u}))\operatorname{grad} u+p'(u-\hat{u})\operatorname{grad}\hat{u}|^{2}\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|(1-p'(u-\hat{u}))\operatorname{grad}\hat{u}+p'(u-\hat{u})\operatorname{grad} u|^{2}\\ &\quad+\int_{\Gamma}j(u-p(u-\hat{u}))+\int_{\Gamma}j(\hat{u}+p(u-\hat{u}))\end{aligned}$$

$$\leqq \frac{1}{2}\int_\Omega (1-p'(u-\hat{u}))|\operatorname{grad} u|^2 + p'(u-\hat{u})|\operatorname{grad} \hat{u}|^2$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega (1-p'(u-\hat{u}))|\operatorname{grad} \hat{u}|^2 + p'(u-\hat{u})|\operatorname{grad} u|^2$$

$$+\int_\Gamma j(u) + \int_\Gamma j(\hat{u})$$

$$=\int_\Omega \frac{1}{2}|\operatorname{grad} u|^2 + \int_\Gamma j(u) + \int_\Omega \frac{1}{2}|\operatorname{grad} \hat{u}|^2 + \int_\Gamma j(\hat{u})$$

$$=\varphi(u)+\varphi(\hat{u}).$$

(2) Soit $\varphi\left(\frac{u+\hat{u}}{2}\right)=\frac{1}{2}(\varphi(u)+\varphi(\hat{u}))$ pour $u, \hat{u}\in D(\varphi)$. Par définition, $u, \hat{u} \in H^1(\Omega)$ et $j(u)$, $j(\hat{u})\in L^1(\Gamma)$. On a

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left|\operatorname{grad}\frac{u-\hat{u}}{2}\right|^2 + \int_\Gamma \frac{1}{2}(j(u)+j(\hat{u})) = \int_\Gamma j\left(\frac{u+\hat{u}}{2}\right).$$

Puisque $\frac{1}{2}(j(u)+j(\hat{u}))\geqq j\left(\frac{u+\hat{u}}{2}\right)$, on a $\operatorname{grad}\frac{u-\hat{u}}{2}=0$ p.p. sur Ω et $\frac{1}{2}(j(u)+j(\hat{u}))=j\left(\frac{u+\hat{u}}{2}\right)$ p.p. sur Γ. Donc $u=\hat{u}+c$ p.p. sur Ω et comme j est strictement convexe $u=\hat{u}$ p.p. sur Γ, d'où $u=\hat{u}$ dans $L^2(\Omega)$.

(3) Utilisant le lemme suivant, on a (3) immédiatement par Ascoli.

LEMME III.3. *Pour tout* $p>N$, *il existe* c_p: $\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$ *telle que lorsque* $u\in H^2(\Omega)$, $u-\Delta u\in L^p(\Omega)$ *et* $\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma(u)\ni 0$ *p.p. sur* Γ, *alors* $\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\leqq c_p(\|u-\Delta u\|_p)$. (cf. [**10**]).

REMARQUE III.4. (1) Soit β une application de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifiant (H2) et (H3); si γ est injectif ou si β est univoque, alors pour tout $f\in L^2(\Omega)$, il y a unicité de la solution $u\in D(\partial\varphi)$ tel que $u+\beta\partial\varphi(u)\ni f$. (cf. Théorème I.19).

(2) Par contre si γ n'est pas injectif et β n'est pas univoque, alors il n'y a pas nécessairement unicité comme le montre le résultat suivant:

Soient $N=1$, $\Omega=]0, 1[$, γ, β deux graphes maximaux monotones de $\boldsymbol{R}$ avec $0\in\gamma(0)$, $0\in\beta(0)$, γ non injectif et β non univoque. Alors il existe $u\in W^{2,\infty}(0, 1)$, $f\in L^\infty(0, 1)$ et $c\neq 0$ tels que

$$(3.5)\qquad \begin{cases} u'(0)\in\gamma(u(0))\cap\gamma(u(0)+c), & -u'(1)\in\gamma(u(1))\cap\gamma(u(1)+c),\\ (u(x)-\beta(u''(x)))\cap(u(x)+c-\beta(u''(x)))\ni f(x) & \text{p.p. } x\in]0, 1[. \end{cases}$$

En effet, soient $a_1, a_2, a, b_1, b_2, b\in\boldsymbol{R}$ tels que $a_1<a_2$, $b_1<b_2$ et $\gamma([a_1, a_2])=a$, $[b_1, b_2]=\beta(b)$.

On pose $$0<c\leqq a_2-a_1,$$

$$u(x)=\begin{cases} ax+a_1 & \text{si} \quad x\in\left[0, \frac{1}{3}\right] \\ r\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+s & \text{si} \quad x\in\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ a(1-x)+a_1 & \text{si} \quad x\in\left[\frac{2}{3}, 1\right], \end{cases}$$

où r, $s\in\boldsymbol{R}$ tels que $u\left(\frac{1}{3}\right)=u\left(\frac{2}{3}\right)=a_1+\frac{a}{3}$,

$$b=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\in\left[0, \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ 2r & \text{si} \quad x\in\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \end{cases}$$

et

$$u(x)+c-b_2\leqq f(x)\leqq u(x)-b_1$$

p. p. $x\in]0, 1[$. Alors $u\in W^{2,\infty}(0, 1)$, $f\in L^\infty(0, 1)$ et $c\neq 0$ vérifiant (3.5).

Supposons que β soit une application de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifiant (H2) et (H3). On pose $D(\beta, \gamma)=D(\beta A)$, où $A=\partial\varphi\cap L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$. On a

$$D(\beta, \gamma)=\{u\in L^\infty(\Omega)\cap H^2(\Omega): \frac{\partial u}{\partial n}+\gamma(u)\ni 0 \text{ p. p. sur } \Gamma \text{ et il existe}$$
$$w\in L^\infty(\Omega) \text{ tel que } w\in\beta(\cdot, \Delta u) \text{ p. p. sur } \Omega\}, \text{ et}$$
$$\beta A=\{[u, w]\in L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega): u\in H^2(\Omega), \exists v\in L^\infty(\Omega) \text{ tel que}$$
$$w\in\beta(\cdot, v), v=-\Delta u \text{ p. p. sur } \Omega, \frac{\partial u}{\partial n}+\gamma(u)\ni 0 \text{ p. p. sur } \Gamma\}.$$

THEOREME III.5. *Supposons qu'une application β de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie* (H2), (H3) *avec* $0\in\beta(\cdot, 0)$ *p. p. sur Ω et γ soit un graphe maximal monotone avec* $0\in\gamma(0)$. *Alors pour tout $u_0\in D(\beta, \gamma)$, il existe $u\in W^{1,\infty}(]0, +\infty[\times\Omega)\cap L^\infty(]0, +\infty[; H^2(\Omega))$ tel que*

$$\text{(3.6)} \qquad \begin{cases} \Delta u\in L^\infty(]0, +\infty[\times\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}\in\beta(\cdot, \Delta u) & p. p. \quad sur\ ]0, +\infty[\times\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}+\gamma(u)\ni 0 & p. p. \quad sur\ ]0, +\infty[\times\Gamma \\ u(0)=u_0 & sur\ \Omega. \end{cases}$$

DEMONSTRATION. Soient j une fonction de $\boldsymbol{R}$ dans $[0, +\infty]$ convexe s. c. i. avec $j(0)=0$ et $\gamma=\partial j$. On définit φ une fonction de $L^2(\Omega)$ par (3.4).

Appliquant l'exemple 1, d'après le théorème II.8 et le lemme III.2, il existe $u\in\mathcal{C}([0, +\infty[; L^\infty(\Omega))$ tel que

$$\begin{cases} u(t)\in D(\beta,\gamma) & \text{pour tout } t\geqq 0 \\ \dfrac{du}{dt}\in L^\infty(]0,+\infty[\,;\,\sigma(L^\infty(\Omega),L^1(\Omega))) & \\ \dfrac{du}{dt}(t)+\beta Au(t)\ni 0 & \text{p.p. } t\in]0,+\infty[\\ u(0)=u_0\,. & \end{cases}$$

D'après la définition de $D(\beta, \gamma)$, $u(t)\in L^\infty(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ pour tout $t\geqq 0$ et d'après (H3), $\Delta u(t)\in L^\infty(\Omega)$ pour tout $t\geqq 0$ et donc

$$u\in L^\infty(]0,+\infty[\times\Omega)\cap L^\infty(]0,+\infty[\,;\,H^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \Delta u\in L^\infty(]0,+\infty[\times\Omega).$$

Montrons $u\in W^{1,\infty}(]0,+\infty[\times\Omega)$. On a $u(t)\in H^2(\Omega)$, $u(t)-\Delta u(t)\in L^\infty(\Omega)$ pour tout $t\geqq 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n}+\gamma(u)\ni 0$ p.p. sur $]0,+\infty[\times\Gamma$. Donc d'après le lemme III.3, il existe $a\geqq 0$ tel que $\|u(t)\|_{W_0^{1,\infty}(\Omega)}\leqq a$, en particulier, $\|\mathrm{grad}_x u(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqq a$ p.p. $t\in]0,+\infty[$, et donc $\|\mathrm{grad}_x u\|_{L^\infty(]0,+\infty[\times\Omega)}\leqq a$. Or comme on peut identifier $L^\infty(]0,+\infty[\times\Omega)$ avec $L^\infty(]0,+\infty[\,;\,\sigma(L^\infty(\Omega),L^1(\Omega)))$, il existe $b\geqq 0$ tel que $\left\|\dfrac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^\infty(]0,+\infty[\times\Omega)}\leqq b$. Donc $u\in W_0^{1,\infty}(]0,+\infty[\times\Omega)$. Enfin d'après la définition de βA, on a $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta\Delta u\ni 0$ p.p. sur $]0,+\infty[\times\Omega$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n}+\gamma(u)\ni 0$ p.p. sur $]0,+\infty[\times\Gamma$. On a donc (3.6).

Remarque III.6. D'après la remarque II.9, si γ est linéaire et injectif, alors il y a unicité de la solution u de (3.6).

Exemple 2. Soient j une fonction de $\boldsymbol{R}$ dans $[0,+\infty]$ convexe continue coercive (c'est-à-dire $\lim_{|\zeta|\to+\infty}(j(\xi)/|\xi|)=+\infty$), avec $j(0)=0$ et $\gamma=\partial j$. On définit φ une fonction de $L^2(0,1)$ dans $[0,+\infty]$ par

$$\varphi(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 j(u') & \text{si } u\in W_0^{1,1}(0,1)\\ +\infty & \text{sinon}\,.\end{cases} \tag{3.7}$$

Alors φ est une fonction de $L^2(0,1)$ dans $[0,+\infty]$ convexe s.c.i avec $\varphi(0)=0$ et le sous-différentiel de φ:

$\partial\varphi=\{[u,v]\in L^2(0,1)\times L^2(0,1)$: $u\in W_0^{1,1}(0,1)$, il existe $w\in W^{1,1}(0,1)$ tel que $v=-w'$ et $w\in\gamma(u')$ p.p. sur $]0,1[\}$. (cf. [**1**]).

Lemme III.7.

(1) *φ vérifie* (3.1),

(2) *si j est strictement convex, alors φ est strictement convexe dans* $L^2(0,1)$.

Demonstration.

(1) Soient u, $\hat{u}\in L^2(\Omega)$ et $p\in C^1(\boldsymbol{R})$ avec $0\leqq p'\leqq 1$ et $p(0)=0$. On montre

(3.1). Si $\varphi(u)+\varphi(\hat{u})=+\infty$, alors c'est trivial. Si $\varphi(u)+\varphi(\hat{u})<+\infty$, alors par définition, u, $\hat{u}\in W_0^{1,1}(0, 1)$ et donc $u-p(u-\hat{u})$, $\hat{u}+p(u-\hat{u})\in W_0^{1,1}(0, 1)$. On a donc

$$\begin{aligned}\varphi(u-p(u-\hat{u}))+\varphi(\hat{u}+p(u-\hat{u}))&=\int_0^1 j((1-p'(u-\hat{u}))u'+p'(u-\hat{u})\hat{u}')\\&\quad+\int_0^1 j((1-p'(u-\hat{u}))\hat{u}'+p'(u-\hat{u})u')\\&\leqq\int_0^1(1-p'(u-\hat{u}))j(u')+p'(u-\hat{u})j(\hat{u}')\\&\quad+\int_0^1(1-p'(u-\hat{u}))j(\hat{u}')+p'(u-\hat{u})j(u')\\&=\int_0^1 j(u')+\int_0^1 j(\hat{u}')=\varphi(u)+\varphi(\hat{u}).\end{aligned}$$

(2) Soit $\varphi\left(\frac{u+\hat{u}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\varphi(u)+\varphi(\hat{u})\right)$ pour u, $\hat{u}\in D(\varphi)$. Par définition, on a u, $\hat{u}\in W_0^{1,1}(0, 1)$ et $j(u')$, $j(\hat{u}')\in L^1(0, 1)$. On a donc

$$\int_0^1\frac{1}{2}\left(j(u')+j(\hat{u}')\right)=\int_0^1 j\left(\frac{u'+\hat{u}'}{2}\right),$$

d'où

$$\frac{1}{2}\left(j(u')+j(\hat{u}')\right)=j\left(\frac{u'+\hat{u}'}{2}\right)\quad \text{p. p. sur }]0, 1[.$$

Donc $u'=\hat{u}'$ p. p. sur $]0, 1[$. On a $u=\hat{u}+c$ p. p. sur $]0, 1[$. Or comme u, $\hat{u}\in W_0^{1,1}(0, 1)$ on a $u=\hat{u}$ dans $L^2(0, 1)$.

REMARQUE III.8. Lemme III.7 est le cas où $N=1$, $\Omega=]0, 1[$. Il est encore valable dans le cas général.

LEMME III.9. *Soit* $A=\partial\varphi\cap L^\infty(0, 1)\times L^\infty(0, 1)$. *On a*

(1) $A=\{[u, v]\in L^\infty(0, 1)\times L^\infty(0, 1):\ u\in W_0^{1,\infty}(0, 1)$, *il existe* $w=W^{1,\infty}(0, 1)$ *tel que* $v=-w'$ *et* $w\in\gamma(u')$ *p. p. sur* $]0, 1[\}$.

(2) *Pour* $[u, v]\in A$, *il existe* $c: \boldsymbol{R}^+\mapsto\boldsymbol{R}^+$ *tel que*

$$\|u\|_{W_0^{1,\infty}(0,1)}\leqq c(\|v\|_{L^\infty(0,1)}). \tag{3.8}$$

(3) *Pour tout* $M\geqq 0$, *l'ensemble*

$$\{u\in D(A):\ \|u\|_{L^\infty(0,1)}+\|Au\|_{L^\infty(0,1)}\leqq M\}$$

est relativement compact dans $C([0, 1])$.

(4) *Soit* $[u, v]\in A$ *avec* $u\neq 0$. *Alors* $u\in W_0^{1,\infty}(0, 1)$ *et il existe* $w\in W^{1,\infty}(0, 1)$ *unique tel que*

(3.9) $$v=-w' \quad et \quad w\in\gamma(u') \quad p.p. \ sur \ ]0, 1[,$$

et l'application $[u, v]\mapsto w$ *est continue de* A *muni de la topologie induite par* $L^\infty(0, 1)\times\sigma(L^\infty(0, 1), L^1(0, 1))$ *dans* $L^\infty(0, 1)$ *et l'application* $[u, v]\mapsto w'$ *est continue de* A *muni de la topologie induite par* $L^\infty(0, 1)\times\sigma(L^\infty(0, 1), L^1(0, 1))$ *dans* $\sigma(L^\infty(0, 1), L^1(0, 1))$.

DEMONSTRATION. (1) Soit $[u, v]\in A$. Par définition, $u\in W_0^{1,1}(0, 1)$, il existe $w\in W^{1,1}(0, 1)$ tel que $v=-w'$ et $w\in\gamma(u')$ p. p. sur $]0, 1[$. On a $\|w'\|_{L^\infty(0,1)}=\|v\|_{L^\infty(0,1)}$ et donc $w\in L^\infty(0, 1)$. Puisque γ est surjectif, $u'\in L^\infty(0, 1)$. Donc $u\in W_0^{1,\infty}(0, 1)$ et $w\in W^{1,\infty}(0, 1)$.

(2) On suppose que (3.8) soit fausse. Il exist $[u_n, v_n]\in A$ tel que lorsque v_n est borné dans L^∞, u_n est non borné dans $W_0^{1,\infty}$. Par définition w_n' est borné dans L^∞.

On suppose qu'il existe $x_0\in]0, 1[$ tel que $w_n(x_0)$ soit borné. Alors w_n est borné dans L^∞ et u_n' est borné dans L^∞, et donc u_n est borné dans L^∞. Donc u_n est borné dans $W_0^{1,\infty}$.

On suppose que pour tout $x\in]0, 1[$, $w_n(x)$ est non borné. Il existe n_k tel que $w_{n_k}(0)\to\pm\infty$; par exemple, on suppose $w_{n_k}(0)\to+\infty$. On a donc pour tout $x\in]0, 1[$,

$$w_{n_k}(x)=w_{n_k}(0)+\int_0^x w_{n_k}'(\xi)d\xi\to+\infty$$

uniformément. On a $u_{n_k}'\in\gamma^{-1}(w_{n_k})$ p. p. sur $]0, 1[$. Puisque γ est surjectif, il existe $r_0\in\boldsymbol{R}$ tel que lorsque $r>r_0$, on a $s\geqq1$ et $s\in\gamma^{-1}(r)$. Donc il existe k tel que lorsque $w_{n_k}(x)>r_0$ p. p. $x\in]0, 1[$, on a $u_{n_k}'(x)\geqq1$ p. p. $x\in]0, 1[$. Or $\int_0^1 u_{n_k}'(\xi)d\xi=0$.

(3) Utilisant (2), d'après la hypothèse, il existe $a\geqq0$ tel que $\|u\|_{W_0^{1,\infty}(0,1)}\leqq a$. Donc on a (3) par Ascoli.

(4) Soient $w, \hat{w}\in W^{1,\infty}(0, 1)$ vérifiant (3.9). On a $w'=-v=\hat{w}'$ et donc $\hat{w}=w+c$.

Soit $c\neq0$. Soit j^* la fonction convexe conjugée de j définie sur $\boldsymbol{R}$. Alors $\gamma^{-1}=\partial j^*$ et $u'\in\gamma^{-1}(w)\cap\gamma^{-1}(\hat{w})$, d'où $j^*(w)'=-u'v=j^*(\hat{w})'$. Donc $j^*(\hat{w})=j^*(\hat{w})+C$. Mais $u'w=j^*(w)+j(u')$ et $u'(w+c)=j^*(\hat{w})+j(u')$, donc $u'(w+c)=u'w+C$ et $u'=C/c$, d'où $\int_0^1 u'=0=C/c$. On en déduit $C=0$; donc $u'=0$ et $u=0$. Or d'après la hypothèse, on a $u\neq0$. Donc $c=0$, d'où $w=\hat{w}$.

On va démontrer la continuité. Soient $[u_i, v_i]\in A$ et $[u, v]\in A$ tels que $u_i\to u$ dans L^∞ et $v_i\to v$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$. Par définition, il existe w_i, $w\in W^{1,\infty}$ tels que $v_i=-w_i'$, $w_i\in\gamma(u_i')$ et $v=-w'$, $w\in\gamma(u')$ p. p. sur $]0, 1[$. D'où $w_i'\to w'$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$. Montrons $w_i\to w$ dans $L^\infty(0, 1)$. D'après (2), $\{w_i\}$ est borné dans L^∞ et donc relativement compact dans L^∞. D'après (2), $\{u_i'\}$ est borné dans L^∞. Soient $w_{i_j}\to\bar{w}$ dans L^∞ et $u'_{i_j}\to u'$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$. On a $w\in\gamma(u')$. Comme $w'_{i_j}\to\bar{w}'$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$, $v_{i_j}\to-\bar{w}'$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$. Donc $v=-\bar{w}'$. D'après la unicité de w, on a $w=\bar{w}$. On a $w_i\to w$ dans $L^\infty(0, 1)$.

On suppose que β soit une application de $]0, 1[\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$ vérifiant (H2) et (H3). On pose $D(\beta, \gamma)=D(\beta A)$, où $A=\partial\varphi\cap L^\infty(0, 1)\times L^\infty(0, 1)$ On a

$$
\begin{aligned}
D(\beta, \gamma)=\{u\in W_0^{1,\infty}(0, 1):\ &\text{il existe } w\in W^{1,\infty}(0, 1) \text{ tel que } w\in\gamma(u')\\
&\text{p. p. sur }]0, 1[\text{ et il existe } z\in L^\infty(0, 1) \text{ tel que } z\in\beta(\cdot, -w')\\
&\text{p. p. sur }]0, 1[\}\,,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\beta A=\{[u, z]\in L^\infty(0, 1)\times L^\infty(0, 1):\ &u\in W_0^{1,\infty}(0, 1), \text{ il existe } v'\in L^\infty(0, 1)\\
&\text{tel que } z\in\beta(\cdot, v) \text{ p. p. sur }]0, 1[\text{ et il existe } w\in W^{1,\infty}(0, 1)\\
&\text{tel que } v=-w' \text{ et } w\in\gamma(u') \text{ p. p. sur }]0, 1[\}\,.
\end{aligned}
$$

THEOREME III.10. *Supposons qu'une application β de $]0, 1[\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie* (H2), (H3) *avec $0\in\beta(\cdot, 0)$ p. p. sur $]0, 1[$ et γ soit un graphe maximal monotone avec $D(\gamma)=R(\gamma)=\boldsymbol{R}$ et $0\in\gamma(0)$. Alors pour tout $u_0\in D(\beta, \gamma)$, il existe $u\in W^{1,\infty}(]0, +\infty[\times]0, 1[)$ et $w\in L^\infty(]0, +\infty[\times]0, 1[)$ tels que*

$$
\begin{cases}
w_x\in L^\infty(]0, +\infty[\times]0, 1[)\\
u_t\in\beta(\cdot, w_x) \ \textit{p. p. sur}\ ]0, +\infty[\times]0, 1[\\
w\in\gamma(u_x) \ \textit{p. p. sur}\ ]0, +\infty[\times]0, 1[\\
u(t, 0)=u(t, 1)=0 \ \textit{pour tout}\ t\geqq 0\\
u(0, x)=u_0(x) \ \textit{pour tout}\ x\in]0, 1[\,.
\end{cases}
$$

DEMONSTRATION. Soint j une fonction de $\boldsymbol{R}$ dans $[0, +\infty]$ convexe s. c. i avec $j(0)=0$ et $\gamma=\partial j$. D'après les hypothèses de γ, la fonction j est continue et coercive. On définit φ une fonction de $L^2(0, 1)$ par (3.1). Appliquant l'exemple 2, d'après le théorème II.8, le lemme III.7 et le lemme III.9, il existe $u\in\mathcal{C}([0, +\infty[\,; L^\infty(0, 1))$ tel que

$$
\begin{cases}
u(t)\in D(\beta, \gamma) \ \text{pour tout}\ t\geqq 0\\
\dfrac{du}{dt}\in L^\infty(]0, +\infty[\,; \sigma(L^\infty(0, 1), L^1(0, 1)))\\
\dfrac{du}{dt}(t)+\beta Au(t)\ni 0 \ \text{p. p.}\ t\in]0, +\infty[\\
u(0)=u_0\,.
\end{cases}
$$

D'après la définition de $D(\beta, \gamma)$, $u(t)\in W_0^{1,\infty}(0, 1)$ pour tout $t\geqq 0$ et donc u, $u_x\in L^\infty(]0, +\infty[\times]0, 1[)$. Or comme on peut identifier $L^\infty(]0, +\infty[\times]0, 1[)$

avec $L^\infty(]0, +\infty[; \sigma(L^\infty(0, 1), L^1(0, 1)))$, on a $u_t \in L^\infty(]0, +\infty[\times]0, 1[)$. Donc $u \in W^{1,\infty}(]0, +\infty[\times]0, 1[)$ et $u(t, 0)=u(t, 1)=0$ pour tout $t \geqq 0$.

Utilisant de façon précise la démonstration du théorème II.8, il existe $v \in L^\infty(]0, +\infty[; \sigma(L^\infty(0, 1), L^1(0, 1)))$ tel que $v(t) \in Au(t)$ et $\frac{du}{dt}(t)+\beta v(t) \ni 0$ p. p. $t \in]0, +\infty[$. Si $u(t_0)=0$, alors pour tout $t \geqq t_0$, on peut prendre $u(t)=0$; on peut donc supposer $u(t) \neq 0$ pour tout $t \geqq 0$. D'après le lemme III.9, (4), il existe $w \in L^\infty(]0, +\infty[; L^\infty(0, 1))$ avec $w_x \in L^\infty(]0, +\infty[; \sigma(L^\infty(0, 1), L^1(0, 1)))$ tel que $v(t)=-w_x(t)$, $w(t) \in \gamma(u_x(t))$ p. p. $t \in]0, +\infty[$. D'où le résultat par identification de $L^\infty(]0, +\infty[\times]0, 1[)$ et $L^\infty(]0, +\infty[; \sigma(L^\infty(0, 1), L^1(0, 1)))$.

Bibliographie

[1] H. Attouch et A. Damlamian, Convexité et monotonie dans certaines équations aux dérivées partielles non linéaires, à paraître.

[2] Ph. Bénilan, Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et application (Thèse de Doctora d'Etat), Publications Mathématiques d'Orsay n° 25, Université de Paris XI, 1972.

[3] Ph. Bénilan, Semi-groupes invariants par un cône de fonctions convexes, Analyse Convexe et ses applications, Lecture Notes in Economics Math. Systems n° 102, 49-65, Springer-Verlag, 1974.

[4] Ph. Bénilan, Sur le problème $\Delta u \in \gamma(\cdot, -\partial u/\partial t)$ dans $L^\infty(\Omega)$, non publié.

[5] Ph. Bénilan et K. S. Ha, Equation d'évolution du type $(du/dt)+\beta\partial\varphi(u) \ni 0$ dans $L^\infty(\Omega)$, C. R. Acad. Sci. Paris, **281** (1975), Série A, 947-950.

[6] Ph. Bénilan et C. Picard, Quelques aspects non linéaires de la théorie du potentiel, Séminaire de la Théorie du Potentiel n° 18-n° 19, Equipe d'Analyse, Université de Paris VI, 1974-1975.

[7] H. Brézis, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Academic Press, New York, 1971, 101-156.

[8] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Math. Studies 5, North Holland, 1973.

[9] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., **51** (1972), 1-168.

[10] H. Brézis, Seuil de régularité pour certains problèmes unilatéraux, C. R. Acad. Sci. Paris, **273** (1971), Série A, 35-37.

[11] M. G. Crandall, Generalized domain for semi-group generator, Proc. Amer. Math. Soc., **37** (1973), 434-440.

[12] M. G. Crandall and T. M. Liggett, Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math., **93** (1971), 265-298.

Ki Sik HA
Department of Mathematics
Busan National University
Jangjeon-Dong, Busan 607
Korea