J. Math. Soc. Japan
Vol. 22, No. 3, 1970

Idealgruppen und Dirichletsche Reihen in algebraischen Zahlkörpern

Von Sige-Nobu KURODA

(Eingegangen am 29. Sept. 1969)
(Verbessert am 8. Dez. 1969)

Nach dem Fundamentalsatz der algebraischen Zahlentheorie bildet die Gesamtheit der gebrochenen Ideale eines algebraischen Zahlkörpers k eine freie abelsche Gruppe, deren Basis durch die Primideale von k gebildet wird. Dadurch erkennt man, daß die Gruppe $A_{\mathfrak{m}}$ der zu einem vorgegebenen Ideal $\mathfrak{m}$ primen Ideale von k viele Untergruppen vom endlichen Index hat. Im Jahre 1897 beschäftigte sich H. Weber [**14**] mit den in $A_{\mathfrak{m}}$ enthaltenen Idealgruppen $H_{\mathfrak{m}}$, welche der folgenden Bedingung genügen: Es bezeichne $T(x, C)$ die Anzahl der in einer Idealklasse C nach $H_{\mathfrak{m}}$ enthaltenen ganzen Ideale, deren Normen nicht größer als eine positive Größe x sind. Dann soll eine Beziehung der Form

$$T(x, C) = gx + O(x^{1-\delta})$$

bestehen, wobei g eine positive Konstante bezeichnet und δ eine nur von k abhängende positive Zahl bedeutet, welche kleiner als 1 ist. Folglich existiert der Limes $\lim_{x\to\infty} T(x, C)/x = g$ und ist von der einzelnen Idealklasse C unabhängig.

Unter dieser Voraussetzung gelten unter anderem die folgenden Tatsachen:

i) Die Klassenzahl nach $H_{\mathfrak{m}}$, d. h. der Index $(A_{\mathfrak{m}} : H_{\mathfrak{m}})$, ist endlich (Vgl. [**13**], § 2).

ii) Wenn es einen $H_{\mathfrak{m}}$ im Sinne von [**14**], § 1, Bedingung 4 zugeordneten "Klassenkörper" gibt, so enthält jede Idealklasse nach $H_{\mathfrak{m}}$ unendlich viele Primideale (Vgl. Weber a. a. 0., Behauptung III).

Dies wird bewiesen, indem man die Dirichletschen Reihen

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}$$

betrachtet, welche mit denjenigen Charakteren χ von $A_{\mathfrak{m}}$ gebildet werden, welche auf $H_{\mathfrak{m}}$ den Wert 1 annehmen, und wo $\mathfrak{a}$ alle ganzen Ideale aus $A_{\mathfrak{m}}$ durchläuft, $N\mathfrak{a}$ die Norm von $\mathfrak{a}$ nach dem Körper $\boldsymbol{Q}$ der rationalen Zahlen bezeichnet. Weber zeigte a. a. 0., daß die Kongruenzidealgruppen in der Tat der obigen Bedingung mit $\delta = 1/n$ genügen, wo n den Absolutgrad von k

bezeichnet.[1] Die Existenz der Klassenkörper für die Kongruenzidealgruppen wird bekanntlich in der Klassenkörpertheorie bestätigt.

Nun kann man fragen, warum allein die Kongruenzidealgruppen in der algebraischen Zahlentheorie eine wichtige Rolle gespielt haben, oder anders ausgedrückt, ob es nicht noch eine andere Art von Idealgruppen gibt, welche dort eine Bedeutung haben könnten. In der vorliegenden Arbeit wird ein sehr bescheidener Versuch in diese Richtung unternommen, indem wir von vornherein einen beliebigen aber festen galoisschen Zahlkörper K/k vom endlichen Relativgrad zugrundelegen. Mittels der Frobeniusschen Beziehung zwischen den Primidealen aus dem Grundkörper k und den Klassen konjugierter Elemente der Galoisgruppe $\mathfrak{g}$ von K/k ordnen wir in § 1.2 einem galoisschen Körper K/k eine Idealgruppe $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ in k zu.[2] Bei der Konstruktion dieser Zuordnung verwenden wir nicht nur die irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{g}$, sondern auch die Eigenwerte der irreduziblen Darstellungsmatrizen von $\mathfrak{g}$. Zuvor werden in § 1.1 für die Eigenwerte gewisse geeignete Numerierungen eingeführt, und mit ihrer Hilfe wird eine Klasse $\mathcal{A}_K(K/k)$ von Funktionen von $\mathfrak{g}$ definiert, welche einerseits Klassenfunktionen von $\mathfrak{g}$ sind und deren Werte andererseits in der multiplikativen Gruppe $\boldsymbol{T}$ der komplexen Zahlen mit absolutem Betrag 1 liegen. Damit erhalten wir auf Grund der Frobeniusschen Zuordnung und des Fundamentalsatzes der algebraischen Zahlentheorie eine Klasse von Idealcharakteren. Die Idealgruppe $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ wird dann als der gemeinsame Kern dieser Idealcharaktere definiert.

Um die arithmetischen Eigenschaften unserer Idealgruppe $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ herzuleiten, müssen wir die Existenz der oben erwähnten Numerierungen der Eigenwerte beweisen. Der Existenzbeweis wird nur für den Fall ausgeführt, wo die Galoisgruppe $\mathfrak{g}$ von K/k einer gewissen gruppentheoretischen Forderung genügt. Die Forderung lautet: *Der Durchschnitt von jeden zwei zueinander nicht-konjugierten, maximal-zyklischen Untergruppen von* $\mathfrak{g}$ *ist in dem Zentrum von* $\mathfrak{g}$ *enthalten.* Dieser Forderung genügen z. B. die endlichen abelschen Gruppen und die Gruppen $GL(2, \boldsymbol{F}_q)$, $SL(2, \boldsymbol{F}_q)$, $PSL(2, \boldsymbol{F}_q)$ usw., wo $\boldsymbol{F}_q$ den Körper von q Elementen bezeichnet. Die Gruppe der Abbildungen der Gestalt $x = ax + b$ $(a \neq 0)$ auf einem endlichen Körper und die Suzukigruppen genügen auch unserer Forderung.

Es sei nunmehr (in dieser Einleitung) *K/k ein galoisscher Zahlkörper, dessen Galoisgruppe der obigen Forderung genügt.* Dann steht die Art der Zerlegung

1) Vgl. auch Landau [**10**], 5. Kapitel und Rieger [**11**].

2) Dabei ist $\mathfrak{m}$ ein ganzes Ideal, welches alle in K/k verzweigten Primideale als Faktoren enthält, und es gilt $H(K/k)_{\mathfrak{m}} \subset A_{\mathfrak{m}}$. Es wird in § 1.2 hervorgehen, daß die Klassengruppe $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ von den verschiedenen Wahlen solcher $\mathfrak{m}$ im kanonischen Sinne unabhängig ist.

der Primideale in K/k mit der Klassengruppe $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ in engem Zusammenhang, welcher in § 1.3 formuliert wird. Ein Beweis dieser Tatsachen wird in § 2 gegeben. Die K/k zugeordnete Klasse $\mathcal{A}_K(K/k)$ von Funktionen der Galoisgruppe $\mathfrak{g}$ bildet unter einer naturgemäßen Verknüpfungsregel eine abelsche Gruppe. Ist K/k abelsch, so ist $\mathcal{A}_K(K/k)$ nichts anders als die Charaktergruppe von $\mathfrak{g}$. In diesem Fall stimmt also die K/k zugeordnete Idealgruppe $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ mit der in der Klassenkörpertheorie K/k zugeordneten Kongruenzidealgruppe überein. Darüber hinaus wird im Rahmen dieser Arbeit keine explizite Charakterisierung unserer Idealgruppen in Begriffen des Grundkörpers gegeben. Neben der Konstruktion von $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ liegt der Hauptzweck dieser Arbeit darin, mit Hilfe der durch Charaktere von $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ gebildeten Dirichletschen Reihen

$$Z(s, \chi)=\sum_{\mathfrak{a}\in A_{\mathfrak{m}}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}, \qquad \mathfrak{a} \text{ ganz},$$

mit welchen wir uns in § 3 beschäftigen, die analytische Zahlentheorie unserer Idealgruppen zu entwickeln. Ein Resultat in dieser Richtung (Satz 4.1 in § 4.1) besteht in der Bestimmung der Dichtigkeit der in einer Idealklasse C nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ enthaltenen ganzen Ideale: diese Dichtigkeit hängt nicht von der einzelnen Klasse C ab, sondern nur von der jeweiligen Klasseneinteilung. Dies ist eine Verallgemeinerung des von Weber [**14**] für die Kongruenzeinteilung bewiesenen Satzes. Im allgemeinen ist jedoch das Restglied für die gennante Dichte einerseits von größerer Größenordnung als beim Spezialfall der Kongruenzidealgruppen, andererseits zeigt es ein Oszillationsphänomen. Dies hat seinen Grund, daß die analytischen Funktionen, welche durch unsere Dirichletschen Reihen definiert sind, im allgemeinen bei $s=1$ nicht mehr eindeutig sind (Vgl. Satz 3.1 in § 3.1). Dies folgt aus der Tatsache, daß die durch Formel (16) definierten Summen $S(\chi)$, welche für eine endliche abelsche Gruppe gleich Null oder Eins sind, im allgemeinen Fall einer nichtabelschen endlichen Gruppe $\mathfrak{g}$ nicht notwendig ganzrationale, sondern vielmehr komplexe Zahlen sind. Die arithmetische Bedeutung dieser zunächst rein gruppentheoretisch definierten Summen $S(\chi)$ wird erst klar gemacht werden, nachdem wir in § 5.1 den Gang des Beweises des von Frobenius [**5**] vermuteten und von Artin [**1**] unter Anwendung seiner L-Funktionen bewiesenen Primidealsatz (für die zu einer Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{g}$ gehörigen Primideale) mittels unserer Dirichletschen Reihen $Z(s, \chi)$ skizziert haben werden. Die Formel (29) für die asymptotische Verteilung unserer Idealcharaktere für Primideale von k gibt nämlich eine "Komponentenzerlegung" der Artinschen Formel (27) in [**1**] über die Summen der irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{g}$ für Primideale. Der Grund des Verfahrens in § 5.1 ist Satz 3.1 in § 3.1 und Lemma 2 in § 4.2. Entsprechendes für den Tschebotareffschen Satz soll in § 5.2 dargestellt werden.

Der analytische Teil unserer Theorie gehört zu einem Anwendungsgebiet der Theorie der Heckeschen L-Funktionen und ist noch allgemeiner Behandlung zugänglich. Wir stellen also am Ende von § 1.3 kurz die logischen Abhängigkeiten der verschiedenen Behauptungen dar.

Um unsere Dirichletschen Reihen in dem Fall, wo die Galoisgruppe $\mathfrak{g}$ zu einer gewissen speziellen Klasse von Frobeniusgruppen gehört, etwas eingehender zu untersuchen, führen wir in § 6 gewisse zahlentheoretische Funktionen ein, welche mit der Möbiusschen Funktion verwandt sind. Im letzten Paragraphen (§ 7) wird mit ihrer Hilfe im erwähnten Spezialfall der Zusammenhang zwischen unseren Reihen und den Heckeschen L-Funktionen (von Oberkörpern von k) hergeleitet. Es ist sehr zu vermuten, daß unsere Reihen im allgemeinen die imaginäre Achse als natürliche Grenze besitzen. Jedoch sind sie in einem sehr speziellen Fall in die ganze Ebene bis auf Verzweigungspunkte analytisch fortsetzbar und genügen dort für passende Zweige einer Funktionalgleichung "vom gewöhnlichen Typus" (Vgl. Satz 7.4).

Das Vorhandensein einer natürlichen Grenze wie bei unseren Reihen dürfte im Funktionenkörperfall viel einfacher zu beobachten sein. Darauf gehen wir jedoch hier nicht ein.

In § 1.4 ordnen wir auch einem gewissen Relativkörper K_0/k eine Idealgruppe $H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$ zu. Der Zusammenhang dieser Idealgruppe $H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$ mit der Art der Zerlegung der Primideale in K_0/k wird in § 1.4 formuliert und in § 2.4 bewiesen.

Herrn Professor H.-W. Leopoldt, der es mir ermöglicht hat, diese Arbeit an seinem Institut unter seiner Anregung durchzuführen, möchte ich auch hier meinen besten Dank aussprechen. Dasselbe gilt auch Herrn Dr. Klaus Barner, der so liebenswürdig war, das erste Manuskript dieser Arbeit durchzulesen, mich auf einige Undeutlichkeiten aufmerksam zu machen und mir eine ganze Reihe von sprachlichen Ratschlägen zu geben.

§ 1. Eine kanonische Zuordnung von Idealgruppen und Körpererweiterungen.

1.1. *Numerierung der Eigenwerte.* Es bezeichne $\boldsymbol{Q}$ den Körper der rationalen Zahlen. Wir legen eine algebraische Hülle Ω von $\boldsymbol{Q}$ fest und betrachten jeden algebraischen Zahlkörper als Teilkörper von Ω. Es sei k ein algebraischer Zahlkörper vom endlichen Grad über $\boldsymbol{Q}$, welcher unser Grundkörper ist. Die Galoisgruppe von Ω/k bezeichnen wir mit $G(\Omega/k)$. Ist L/k ein Relativkörper in Ω/k, so bezeichnen wir mit $G(\Omega/L)$ die Galoisgruppe von Ω/L, welche als Untergruppe von $G(\Omega/k)$ angesehen wird. Ist L/k galoissch, so bezeichnen wir durchweg mit $\mathfrak{g}(L/k)$ die Galoisgruppe von L/k, welche mit der Faktorgruppe $G(\Omega/k)/G(\Omega/L)$ kanonisch identifiziert wird. Es bezeichne $\boldsymbol{T}$ die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen mit absolutem Betrag 1. Die Menge $\mathscr{B}$ aller Funktionen von $G(\Omega/k)$ in $\boldsymbol{T}$ wird zu einer abelschen Gruppe, indem wir sie mit der Multiplikation und Potenzbildung versehen, welche elementweise definiert werden: für λ und μ aus $\mathscr{B}$ und für eine ganzrationale Zahl a sind also $\lambda\mu$ und λ^a definiert durch

$$(\lambda\mu)(S)=\lambda(S)\mu(S), \qquad \lambda^a(S)=(\lambda(S))^a$$

für alle S aus $G(\Omega/k)$.

Im folgenden beschäftigen wir uns mit einer besonderen Klasse von Funktionen aus $\mathscr{B}$. Wir betrachten nämlich diejenigen Funktionen λ aus $\mathscr{B}$, welche die folgenden Bedingungen 1 bis 5 erfüllen.

1. *Es gibt zu λ eine irreduzible Darstellung $\boldsymbol{D}$ von $G(\Omega/k)$ und einen galoisschen Körper N/k vom endlichen Relativgrad derart, daß der Kern von $\boldsymbol{D}$ die Gruppe $G(\Omega/N)$ enthält und daß der Wert $\lambda(S)$, $S\in G(\Omega/k)$, gleich einem Eigenwert der Darstellungsmatrix $\boldsymbol{D}(S)$ ist.*

Nach dieser Bedingung ist $\boldsymbol{D}$ eine kontinuierliche Darstellung von $G(\Omega/k)$, welche mit einer irreduziblen Darstellung von $G(\Omega/k)/G(\Omega/N)$ identifiziert werden kann, und die Eigenwerte von $\boldsymbol{D}(S)$ sind somit Elemente aus $\boldsymbol{T}$. Es gilt $\lambda(T)=1$ für alle T aus $G(\Omega/N)$. Weiter soll bestehen:

2. *Es gilt $\lambda(ST)=\lambda(S)$ für alle S aus $G(\Omega/k)$ und alle T aus $G(\Omega/N)$.*

Die Funktion λ kann dann als Funktion von der Galoisgruppe $\mathfrak{g}(N/k)$ betrachtet werden. Diese bezeichnen wir mit λ_N. Die weiteren Bedingungen beziehen sich auf λ_N.

3. *λ_N ist eine Klassenfunktion von $\mathfrak{g}(N/k)$, d. h. $\lambda_N(\tau^{-1}\sigma\tau)=\lambda_N(\sigma)$ gilt für σ, τ aus $\mathfrak{g}(N/k)$.*

Für eine Klasse $\mathfrak{K}$ konjugierter Elemente von $\mathfrak{g}(N/k)$ wird bekanntlich eine Potenz $\mathfrak{K}^a$ wohldefiniert, wo a eine ganzrationale Zahl ist. $\mathfrak{K}^a$ besteht nämlich aus den a-ten Potenzen von den Elementen aus $\mathfrak{K}$ und ist selbst eine Klasse von $\mathfrak{g}(N/k)$.

4. *Es seien $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{g}(N/k)$. Ist $\mathfrak{K}'$ eine Potenz von $\mathfrak{K}$, so soll es eine ganzrationale Zahl a geben, welche $\mathfrak{K}^a=\mathfrak{K}'$ und zugleich $\lambda_N(\sigma)^a=\lambda_N(\sigma')$ genügt, wo σ und σ' Elemente aus $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}'$ sind.*

5. *Die Funktion λ_N ist ein Charakter (vom ersten Grade) des Zentrums von der Galoisgruppe $\mathfrak{g}(N/k)$, wenn wir sie nur auf dem Zentrum von $\mathfrak{g}(N/k)$ betrachten.*

Es sei nun ein galoisscher Körper K/k vorgegeben, welcher vorläufig nicht notwendig vom endlichen Grad sein muß. Die Gesamtheit der Funktionen λ aus $\mathscr{B}$, zu welchen *einzeln* ein in K/k enthaltener galoisscher Körper N/k vom endlichen Relativgrad existiert, so daß die obigen fünf Bedingungen für das Paar von λ und N/k gelten, bezeichnen wir mit $\mathscr{A}'(K/k)$. Die Menge

$\mathcal{A}'(K/k)$ ist durch K/k eindeutig bestimmt, da wir von vornherein weder $\boldsymbol{D}$ noch N/k festlegen. Betrachtet man die Einsdarstellung von $G(\Omega/k)$ und setzt $N=k$, so sieht man sofort ein, daß das Einselement von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}'(K/k)$ vorhanden ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}(K/k)$ die durch die Elemente von $\mathcal{A}'(K/k)$ erzeugte Untergruppe von $\mathcal{B}$. Ist L/k ein K/k umfassender galoisscher Körper, so gilt $\mathcal{A}(L/k) \supset \mathcal{A}(K/k)$.

Aus Bedingung 2 folgt für jedes λ aus $\mathcal{A}(K/k)$

$$\lambda(ST) = \lambda(S), \qquad S \in G(\Omega/k), \qquad T \in G(\Omega/K).$$

λ kann also naturgemäß auch als Funktion von $\mathfrak{g}(K/k)$ angesehen werden. Diese bezeichnen wir ebenfalls mit λ_K. λ_K ist dann eine Klassenfunktion von $\mathfrak{g}(K/k)$. Wir erhalten auch einen Charakter vom ersten Grad vom Zentrum von $\mathfrak{g}(K/k)$, wenn wir λ_K nur auf dem Zentrum von $\mathfrak{g}(K/k)$ betrachten. Man setze nun

$$\mathcal{A}_K(K/k) = \{\lambda_K \mid \lambda \in \mathcal{A}(K/k)\}.$$

$\mathcal{A}_K(K/k)$ wird naturgemäß zu einer abelschen Gruppe, welche mit $\mathcal{A}(K/k)$ durch die Zuordnung $\lambda_K \leftrightarrow \lambda$ kanonisch identifiziert werden kann. Ist K/k abelsch, so ist $\mathcal{A}_K(K/k)$ ersichtlich nichts anders als die Charaktergruppe von $\mathfrak{g}(K/k)$. Ist ein galoisscher Körper K/k vom endlichen Grad, so ist die abelsche Gruppe $\mathcal{A}_K(K/k)$ endlich. Außerdem sind die Funktionen aus $\mathcal{A}(\Omega/k)$ kontinuierlich, wovon im Rahmen dieses Aufsatzes kein Gebrauch mehr gemacht werden wird.

BEISPIEL. Die Galoisgruppe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(K/k)$ sei isomorph zur Quaternionengruppe (mit der Ordnung 8). Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ die Klassen von $\mathfrak{g}$ mit der Ordnung 1 bzw. 2 und mit $\mathfrak{K}_4$, $\mathfrak{K}'_4$, $\mathfrak{K}''_4$ diese mit der Ordnung 4. $\mathcal{A}'(K/k)$ besteht aus *zwölf* Funktionen, deren Werte für Elemente aus den Klassen von $\mathfrak{g}(K/k)$ in der folgenden Tafel gegeben werden:

$\mathfrak{K}_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathfrak{K}_2$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$\mathfrak{K}_4$	1	1	-1	-1	i	i	$-i$	i	$-i$	$-i$	i	$-i$
$\mathfrak{K}'_4$	1	-1	1	-1	i	$-i$	i	i	$-i$	i	$-i$	$-i$
$\mathfrak{K}''_4$	1	-1	-1	1	$-i$	i	i	i	i	$-i$	$-i$	$-i$

wobei die ersten vier Funktionen (Kollonnen) je von den verschiedenen irreduziblen Darstellungen vom Grad 1 stammen und die letzteren acht von dieser vom Grad 2. $\mathcal{A}(K/k)$ besteht aber aus sechzehn Funktionen.

1.2. *Die Idealgruppe* $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$. Es sei nunmehr K/k ein galoisscher Zahlkörper vom endlichen Relativgrad. Es bezeichne $\mathfrak{m}$ ein ganzes Ideal von k, welches alle in K/k verzweigten Primideale als Faktoren enthält. Wir bezeichnen mit $\tilde{\mathfrak{m}}$ den ganzen Divisor von k, der das Produkt von $\mathfrak{m}$ und den in K/k verzweigten unendlichen Primdivisoren von k ist. Die Gruppe aller zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale von k bezeichnen wir durchweg mit $A_{\mathfrak{m}}$. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $A_{\mathfrak{m}}$ und $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K. Wir bezeichnen mit $\sigma(\mathfrak{P})$ die Frobeniussubstitution von $\mathfrak{P}$ bezüglich K/k. Da $\mathfrak{p}$ in K/k unverzweigt ist, wird die Klasse $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$ konjugierter Elemente von $\mathfrak{g}(K/k)$, zu welcher $\sigma(\mathfrak{P})$ gehört, eindeutig durch $\mathfrak{p}$ selbst bestimmt. Wir sagen, $\mathfrak{p}$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$. Für λ aus $\mathcal{A}(K/k)$ ist der Wert $\lambda_K(\sigma(\mathfrak{P}))$ in $\boldsymbol{T}$ von der Wahl von den verschiedenen Primteilern von $\mathfrak{p}$ unabhängig, da λ_K eine Klassenfunktion von $\mathfrak{g}(K/k)$ ist. Wir setzen

$$\chi_{\lambda}(\mathfrak{p}) = \lambda_K(\sigma(\mathfrak{P})),$$

wo $\lambda_K \in \mathcal{A}_K(K/k)$ ist. Damit sind den zu $\mathfrak{m}$ primen Primidealen von k mittels Frobeniussubstitutionen gewisse Einheitswurzeln im Zusammenhang mit den irreduziblen Darstellungen der Galoisgruppe zugeordnet. Da die Idealgruppe $A_{\mathfrak{m}}$ eine freie abelsche Gruppe ist, deren Basis durch die Primideale in $A_{\mathfrak{m}}$ gebildet wird, läßt sich χ_{λ} multiplikativ zu einem Charakter von $A_{\mathfrak{m}}$ erweitern, welchen wir auch mit χ_{λ} bezeichnen. Unter dieser Vereinbarung setzen wir in $A_{\mathfrak{m}}$

$$H(K/k)_{\mathfrak{m}} = \bigcap_{\lambda} \operatorname{Kern} \chi_{\lambda},$$

wobei λ die sämtlichen Funktionen in $\mathcal{A}(K/k)$ durchläuft. $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ ist ja eine Untergruppe von $A_{\mathfrak{m}}$. Es gilt $H(K/k)_{\mathfrak{m}} = \bigcap' \operatorname{Kern} \chi_{\lambda}$, wobei diesmal λ nur die Funktionen aus $\mathcal{A}'(K/k)$ durchläuft.

Die Klassengruppe $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ ist ersichtlich endlich und wird durch diejenigen Klassen erzeugt, welche Primideale enthalten. Nach der Konstruktion von $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ ist andererseits klar, daß diejenigen Primideale von k, welche zu ein und derselben Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{g}$ gehören, zu ein und derselben Idealklasse nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ gehören. Nach dem Tschebotareffschen Dichtigkeitssatz enthält also diejenige Idealklasse, welche mindestens ein Primideal enthält, unendlich viele Primideale. Daraus sieht man sofort ein, daß jede Idealklasse nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ zu einem vorgegebenen Ideal teilerfremde Ideale enthält. Dies besagt aber, *daß die Struktur der Klassengruppe $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ kanonisch von der Wahl von $\mathfrak{m}$ unabhängig ist.*[3)]

Zwischen dem Körpergrad $n=[K:k]$ und der Klassenzahl $h=(A_{\mathfrak{m}} : H(K/k)_{\mathfrak{m}})$ kann jeder der drei Relationen $h<n$, $h=n$, $h>n$ bestehen. Ist z. B. die

---

3) Zum einfachsten Beweis des Tschebotareffschen Satzes vergleiche man Deuring [4]. Wir können aber (ausgenommen § 1.4 und § 2.4) ohne die oben angegebene Kenntnis und ohne Benutzung des Tschebotareffschen Satzes fortfahren, bis wir ihn für unseren K/k in § 5.2 mittels unserer Reihen herleiten. Das Reziprozitätsgesetz der Klassenkörpertheorie ist aber im folgenden unentbehrlich.

Galoisgruppe die alternierende Gruppe vom Grad 4, so ist $h=6$, ist sie isomorph zur symmetrischen Gruppe vom Grad 3, so ist gleichfalls $h=6$, und ist sie gleich einer der beiden nichtabelschen Gruppen der Ordnung 8, so ist $h=16$.

Ist speziell K/k abelsch, so besagt das Reziprozitätsgesetz der Klassenkörpertheorie, daß $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ nichts anders ist als die K/k zugeordnete, modulo einer Potenz von $\bar{\mathfrak{m}}$ erklärte Kongruenzidealgruppe. Der Weg zum Aufbau der Klassenkörpertheorie, den Chevalley in [3] verfolgte, besteht darin, direkt zu zeigen, daß dies in der Tat der Fall ist.[4]

1.3. *Zusammenstellung der Ergebnisse. Nunmehr legen wir einen galoisschen Zahlkörper K/k vom endlichen Relativgrad fest, dessen Galoisgruppe der in der Einleitung genannten Forderung genügt.* Wir formulieren nun die Eigenschaften von $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$, die wir später beweisen. Es bezeichne $\mathfrak{p}$ stets ein zu $\mathfrak{m}$ primes Primideal von k.

I. *Primideale $\mathfrak{p}$ von k, welche in ein und derselben Idealklasse nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ enthalten sind, gehören zu ein und derselben Klasse $\mathfrak{K}$ konjugierter Elemente von $\mathfrak{g}$. Umgekehrt sind Primideale $\mathfrak{p}$, welche zu ein und derselben Klasse $\mathfrak{K}$ gehören, in ein und derselben Idealklasse nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ enthalten.*

BEMERKUNG. Nach I ist die Anzahl derjenigen Idealklassen, welche Primideale enthalten, gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Elemente der Galoisgruppe $\mathfrak{g}$ von K/k. Dabei ist zu beachten, daß nicht notwendig jede Idealklasse nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ Primideale enthält.

II. *Ist $\mathfrak{p}^f$ $(f>0)$ die niedrigste in $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ enthaltene Potenz eines Primideals $\mathfrak{p}$ aus $A_{\mathfrak{m}}$, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in K in lauter Primideale f-ten Relativgrades.*

Nach II enthält $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ Normen derjenigen Ideale von K, welche zu $\mathfrak{m}$ prim sind.

III. *Ist K_0/k ein galoisscher Zwischenkörper von K/k, so gilt $H(K_0/k)_{\mathfrak{m}} \supset H(K/k)_{\mathfrak{m}}$.*

Da ein in K_0/k verzweigter Primdivisor in $\bar{\mathfrak{m}}$ aufgeht, ist $H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$ wohldefiniert. Die Eigenschaft III folgt unmittelbar aus der Tatsache $\mathcal{A}(K/k) \supset \mathcal{A}(K_0/k)$.

Um eine arithmetische Deutung von Bedingungen 4 und 5 in § 1.1 hervortreten zu lassen, formulieren wir nun einen Satz, der sich auf das Verhalten der Relativnormen nach k von Idealen in Zwischenkörpern von K/k bezieht. Der Kürze halber sagen wir, die K/k zugeordnete Idealgruppe $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ sei mit dem Modul $\bar{\mathfrak{m}}$ definiert. Ist Z ein Zwischenkörper von K/k, so kann auch die K/Z zugeordnete Idealgruppe von Z mit dem Modul $\bar{\mathfrak{m}}$ definierbar, wonach die Idealgruppe $H(K/Z)_{\mathfrak{m}}$ in Rede stehen kann. Ist insbesondere K/Z abelsch, so ist $H(K/Z)_{\mathfrak{m}}$ in der Tat die dem Klassenkörper K/Z zugeordnete Kongru-

4) Vgl. [3], Chapitre VI.

enzidealgruppe von Z, die mit dem Modul $\bar{\mathfrak{m}}$ definiert werden kann.

SATZ 1.3. *Es sei K/k wie oben und $\mathfrak{h}$ eine abelsche Untergruppe von $\mathfrak{g}(K/k)$, welche im Zentrum von $\mathfrak{g}(K/k)$ enthalten ist. Es bezeichne Z den Invariantenkörper von $\mathfrak{h}$. Genau dann ist die Relativnorm (von Z nach k) eines zu $\mathfrak{m}$ primen Ideals $\boldsymbol{a}$ von Z in $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ enthalten, wenn $\boldsymbol{a}$ in $H(K/Z)_{\mathfrak{m}}$ enthalten ist.*

Ein Beweis dieses Satzes wird in § 2.3 gegeben. Die entsprechende Aussage für eine allgemeine zyklische Untergruppe $\mathfrak{h}=\mathfrak{z}$ wird kompliziert. Es kommt auf die jeweils festgelegten Vertretersysteme der $N(\mathfrak{z})$-Bahnen der nach $H(K/Z)_{\mathfrak{m}}$ definierten Idealklassengruppe von Z an, wobei $N(\mathfrak{z})$ den Normalisator von $\mathfrak{z}$ bedeutet. Darüber hinaus erwähnen wir hier nur, daß die durch die in $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ enthaltenen Relativnormen von Idealen von Z erzeugte Idealgruppe $N(K/k)_{\mathfrak{m}}$, welche man erhält, indem man $\mathfrak{z}$ alle zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{g}(K/k)$ durchlaufen läßt, in $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ vom endlichen Index ist. In der Tat erhält man $(H(K/k)_{\mathfrak{m}}:N(K/k)_{\mathfrak{m}})=1$, wenn $\mathfrak{g}(K/k)$ zyklisch ist oder isomorph zu einer der in § 7 betrachteten Gruppen mit $\nu=1$ oder zur Quaternionengruppe ist. In diesen genannten Fällen ist bekanntlich auch der Schursche Multiplikator von $\mathfrak{g}(K/k)$ isomorph zur Einsgruppe.

Es bezeichne nun C eine Idealklasse nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ und $T(x, C)$ die Anzahl der in C enthaltenen ganzen Ideale $\mathfrak{a}$, deren Normen nach $\boldsymbol{Q}$ gleich oder kleiner als eine positive Größe x sind.

IV. *Es existiert der Limes $\lim_{x\to\infty} T(x, C)/x$, und dieser hängt nicht von der einzelnen Klasse C ab. Es gilt darüber hinaus*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{T(x, C)}{x}=\frac{g}{h}\prod_{\mathfrak{l}\mid\mathfrak{m}}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{l}}\right),$$

wobei h die Klassenzahl nach der Idealgruppe $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ bezeichnet, $\mathfrak{l}$ alle in $\mathfrak{m}$ aufgehenden Primideale von k durchläuft und g das Residuum der Dedekindschen ζ-Funktion von k bei $s=1$ bedeutet.

Diese Behauptung wird erst in § 4 bewiesen. Wir berechnen auch die Restglieder für den in IV auftretenden Limes, d. h. für die Dichtigkeit der ganzen Ideale in der Idealklasse C. Die genaue Formulierung findet sich in § 4.1.

Eine asymptotische Formel für die Summe $\sum \chi(\mathfrak{p})$ über Primideale $\mathfrak{p}$, wo χ ein Charakter von $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ ist, wird in § 5.1 gegeben.

BEMERKUNG. Wenn die Galoisgruppe von K/k isomorph zur Quaternionengruppe ist, ist die Klassenzahl von $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ gleich 16. Es bezeichne K_0/k den in K/k enthaltenen maximal-abelschen Zwischenkörper von K/k. Es gibt eine $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ umfassende Untergruppe $H'_{\mathfrak{m}}$ von $A_{\mathfrak{m}}$ mit $(A_{\mathfrak{m}}:H'_{\mathfrak{m}})=8$, für welche die I und II entsprechenden Behauptungen gelten. Eine solche Gruppe $H'_{\mathfrak{m}}$ ist aber nicht in der K_0/k zugeordneten Kongruenzidealgruppe enthalten. In diesem Sinne folgt III nicht bereits aus I und II. Andererseits wird aus dem Beweis von Satz 3.1 hervorgehen, daß eine Aussage wie in Satz 3.1 bereits aus Eigenschaften wie in I und in II folgt. Darüber hinaus gilt dann dasselbe für Behauptungen wie in Satz 4.1 und Formel (29) in § 5.1.

1.4. *Die Idealgruppen zu Relativkörpern.* Es sei nun K_0/k ein Relativkörper vom endlichen Relativgrad derart, daß K/k der kleinste, K_0 umfassende galoissche Körper über k ist. Es bezeichne $\mathfrak{g}(K/K_0)$ die Galoisgruppe von K/K_0, welche eine Untergruppe von $\mathfrak{g}(K/k)$ ist. Es bezeichne ferner $\mathcal{A}'(K_0/k)$ die Menge derjenigen Funktionen λ aus $\mathcal{A}'(K/k)$, für welche $\lambda_K(\sigma)=1$, $\sigma\in\mathfrak{g}(K/k)$, gilt, wenn $\mathfrak{g}(K/K_0)$ ein in $\mathfrak{g}(K/k)$ zu σ konjugiertes Element enthält. Dem Relativkörper K_0/k ordnen wir die Idealgruppe

$$H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}=\cap \operatorname{Kern}\chi_\lambda\,,\qquad \lambda\in\mathcal{A}'(K_0/k)\,,$$

in $A_{\mathfrak{m}}$ zu, welche offensichtlich $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ enthält. Die Struktur von $A_{\mathfrak{m}}/H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$ ist ebenfalls kanonisch unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{m}$.

Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale aus $A_{\mathfrak{m}}$ und f die Ordnung von $C(\mathfrak{a})$ $(=\mathfrak{a}H(K/k)_{\mathfrak{m}})$ nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$. Gibt es für jeden Idealcharakter χ_λ mit $\lambda\in\mathcal{A}'(K/k)$ eine zu f prime ganzrationale Zahl $a(\lambda)$ derart, daß $\chi_\lambda(\mathfrak{a})^{a(\lambda)}=\chi_\lambda(\mathfrak{b})$ gilt, so schreiben wir $\mathfrak{a}\sim\mathfrak{b}$. Wir bezeichnen mit n_0 den Grad von K_0/k.

V. *Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $A_{\mathfrak{m}}$. Ferner sei f_0 (>0) der niedrigste Exponent von $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}^{f_0}\in H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$. Es gibt dann ein Primideal $\mathfrak{q}$ in $H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$ derart, daß $\mathfrak{p}^{f_0}\sim\mathfrak{q}$ gilt. Es seien f_i' $(1\leqq i\leqq t)$ die verschiedenen Relativgrade von Primteilern von $\mathfrak{q}$ in K_0 und $\mathfrak{q}$ habe in K_0 g_i' $(1\leqq i\leqq t)$ Primteiler f_i'-ten Relativgrades. Dann zerfällt $\mathfrak{p}$ in K_0 in insgesamt $\sum_{i=1}^{t}g_i'f_0^{-1}$ Primideale, von denen je $g_i'f_0^{-1}$ den Relativgrad f_if_0 $(1\leqq i\leqq t)$ haben. Insbesondere geht also f_0 in g_i' $(1\leqq i\leqq t)$ auf und hat jeder Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K_0 einen durch f_0 teilbaren Relativgrad.*

§ 2. Beweis von I, II, V und Satz 1.2.

2.1. *Konstruktion einer Reihe von λ.* Es sei $\mathfrak{g}$ eine endliche Gruppe. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{g}$ der folgenden Forderung genügt. Es seien nämlich $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ maximal-zyklische Untergruppen von $\mathfrak{g}$, *welche zueinander nicht konjugiert sind.* Dann soll

$$\mathfrak{z}_1\cap\mathfrak{z}_2\subset\mathfrak{C} \tag{1}$$

bestehen, wobei $\mathfrak{C}$ das Zentrum von $\mathfrak{g}$ bezeichnet. Aus der Forderung (1) folgt die folgende Tatsache. Es seien $\mathfrak{z}_1'$ und $\mathfrak{z}_2'$ Untergruppen von $\mathfrak{z}_1$ bzw. $\mathfrak{z}_2$, welche zueinander konjugiert sind. Dann gilt $\mathfrak{z}_1'=\mathfrak{z}_2'\subset\mathfrak{C}$.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{z}_i$ $(1\leqq i\leqq u)$ die Vertreter der Klassen maximalzyklischer Untergruppen von $\mathfrak{g}$. Mit anderen Worten: Zu jeder maximalzyklischen Untergruppe $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{g}$ gibt es ein und nur ein $\mathfrak{z}_i$ derart, daß mit einem geeigneten Element τ aus $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{z}=\{\tau^{-1}\sigma\tau \mid \sigma\in\mathfrak{z}_i\}$ gilt. Es bezeichne nun $\mathfrak{K}$ eine Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{g}$. Es gibt mindestens ein i $(1\leqq i\leqq u)$, so daß $\mathfrak{z}_i\frown\mathfrak{K}$ nicht leer ist. Wir wählen aus $\mathfrak{z}_i\frown\mathfrak{K}$ einen Vertreter $\sigma_{i,\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$. Ist $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{C}$, so besteht $\mathfrak{K}$ aus einem einzigen Element, und $\sigma_{i,\mathfrak{K}}$ wird also eindeutig durch $\mathfrak{K}$ bestimmt. Ist dagegen $\mathfrak{K}\not\subset\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{z}_i\frown\mathfrak{K}$ nicht leer, so folgt nach unserer Forderung, daß $\mathfrak{z}_{i'}\frown\mathfrak{K}$ leer ist, wo $1\leqq i'\ (\neq i)\leqq u$ ist. Das System von $\sigma_{i,\mathfrak{K}}$ bildet also ein vollständiges Vertretersystem der Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{g}$. Ein solches Vertretersystem $\sigma_{i,\mathfrak{K}}$ der Klassen von $\mathfrak{g}$ legen wir fest.

Es sei nun eine irreduzible Darstellung $\boldsymbol{D}$ von $\mathfrak{g}$ gegeben, deren Grad wir mit d bezeichnen. Es sei ferner $\boldsymbol{D}_c$ eine Darstellung vom Zentrum $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{g}$, welche aus diagonalen Matrizen

$$\boldsymbol{D}_c(\sigma)=\begin{pmatrix}\lambda_1(\sigma) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d(\sigma)\end{pmatrix}, \qquad \sigma\in\mathfrak{C}, \tag{2}$$

besteht und auf $\mathfrak{C}$ mit $\boldsymbol{D}$ äquivalent ist. Wir bezeichnen mit σ_i und τ_i erzeugende Elemente von $\mathfrak{z}_i$ bzw. $\mathfrak{z}_i\frown\mathfrak{C}$. Es gilt $\tau_i=\sigma_i^{d_i}$ mit einem ganzrationalen d_i. Die diagonalen Elemente von (2) sind Eigenwerte von $\boldsymbol{D}(\sigma)$. Es gibt dann eine auf $\mathfrak{z}_i$ mit $\boldsymbol{D}$ äquivalente Darstellung $\boldsymbol{D}_i$ von $\mathfrak{z}_i$, welche aus diagonalen Matrizen

$$\boldsymbol{D}_i(\sigma)=\begin{pmatrix}\lambda_1^{(i)}(\sigma) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d^{(i)}(\sigma)\end{pmatrix}, \qquad \sigma\in\mathfrak{z}_i,$$

besteht und für welche $\boldsymbol{D}_i(\sigma_i)^{d_i}=\boldsymbol{D}_c(\tau_i)$ gilt. Es gilt dann $\boldsymbol{D}_i(\sigma)=\boldsymbol{D}_c(\sigma)$ für σ aus $\mathfrak{z}_i\frown\mathfrak{C}$. Ein System solcher diagonalen Darstellungen $\boldsymbol{D}_i$ $(1\leqq i\leqq u)$ von $\mathfrak{z}_i$ legen wir fest. Es gilt alsdann

$$\boldsymbol{D}_i(\sigma_{i,\mathfrak{K}})=\boldsymbol{D}_{i'}(\sigma_{i',\mathfrak{K}}), \tag{3}$$

wenn $\boldsymbol{D}_i(\sigma_{i,\mathfrak{K}})$ und $\boldsymbol{D}_{i'}(\sigma_{i',\mathfrak{K}})$ beide definiert sind. Wir führen nun eine Klassenfunktion λ_j von $\mathfrak{g}$ ein durch die Festsetzung

$$\lambda_j(\sigma)=\lambda_j^{(i)}(\sigma_{i,\mathfrak{K}}), \qquad \sigma\in\mathfrak{K}, \tag{4}$$

wo j $(1\leqq j\leqq d)$ beliebig aber fest ist, während $\mathfrak{K}$ diejenige Klasse von $\mathfrak{g}$ bezeichnet, welche σ enthält, und i diejenige Indizien bedeutet, für welche $\mathfrak{z}_i\frown\mathfrak{K}$ nicht leer ist. Nach (3) hängt die Funktion λ_j von den verschiedenen, möglichen Wahlen von i nicht ab. Es gilt ferner

$$\sum_{j=1}^{d}\lambda_j(\sigma)=\text{Charakterwert von } \boldsymbol{D} \text{ für } \sigma. \tag{5}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Funktionen λ_j Elemente von $\mathcal{A}_K(K/k)$ sind, wenn $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(K/k)$ die Galoisgruppe eines galoisschen Zahlkörpers K/k ist.

Wir stellen noch einen Hilfssatz bereit, den wir zum Beweis von Satz 1.2 benötigen.

HILFSSATZ 2.1. *Die Galoisgruppe* $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(K/k)$ *eines galoisschen Zahlkörpers* K/k *genüge der Forderung* (1). *Es sei ein Charakter* ρ (*vom ersten Grad*) *des Zentrums* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{g}$ *vorgegeben. Dann gibt es ein* λ_K *in* $\mathcal{A}_K(K/k)$, *so daß* $\rho(\sigma) =\lambda_K(\sigma)$ *gilt für* σ *aus* $\mathfrak{C}$.

BEWEIS. Es bezeichne $\boldsymbol{D}$ einen irreduziblen Bestandteil der von ρ induzierten Darstellung von $\mathfrak{g}$. Unter Berücksichtigung der Frobeniusschen Reziprozität erhalten wir, daß unter geeigneter Wahl von $\boldsymbol{D}_c$ $\lambda_1=\rho$ gilt. Nach dem obigen Schluß wird also unser Hilfssatz bewiesen.

Im nachstehenden Abschnitt legen wir einen Vertreter $\sigma(\mathfrak{K})$ *aus einer Klasse* $\mathfrak{K}$ *von* $\mathfrak{g}$ *fest, so daß es einen Index* i $(1\leqq i\leqq u)$ *gibt mit* $\sigma(\mathfrak{K})=\sigma_{i,\mathfrak{K}}$.

2.2. *Beweis von* I *und* II. Zunächst wollen wir II beweisen. Der Kürze halber setzen wir $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(K/k)$. Für ein zu $\mathfrak{K}$ gehöriges, zu $\mathfrak{m}$ primes Primideal $\mathfrak{p}$ von k wählen wir einen Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ in K, dessen Frobeniussubstitution $\sigma(\mathfrak{P})$ mit dem in § 2.1 festgelegten Vertreter $\sigma(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{K}$ übereinstimmt: $\sigma(\mathfrak{P}) =\sigma(\mathfrak{K})$. Es bezeichne ferner $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})$ die durch $\sigma(\mathfrak{K})$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{g}$ und f' die Ordnung von $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})$. Es sei nun $\rho(\sigma)$, $\sigma\in\mathfrak{z}(\mathfrak{p})$, eine Darstellung von $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})$ derart, daß $\rho(\sigma(\mathfrak{P}))$ eine primitive f'-te Einheitswurzel ω ist. Es bezeichne $\boldsymbol{D}$ einen irreduziblen Bestandteil der von ρ auf $\mathfrak{g}$ induzierten Darstellung. Nach der Frobeniusschen Reziprozität ist mindestens einer der Eigenwerte von $\boldsymbol{D}(\sigma(\mathfrak{P}))$ gleich ω. Es gibt also einen mittels (4) erklärten Charakter χ von $A_\mathfrak{m}$ mit $\chi(\mathfrak{p})=\omega$ und $\chi(\mathfrak{a})=1$ für $\mathfrak{a}\in H(K/k)_\mathfrak{m}$. Daraus folgt, daß die Ordnung f von der Idealklasse $C(\mathfrak{p})$ nach $H(K/k)_\mathfrak{m}$ durch f' teilbar ist. Dann gilt aber $f'=f$, denn die f'-ten Potenzen der Eigenwerte jeder irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{g}$ sind für $\sigma(\mathfrak{P})$ gleich 1. Daraus folgt II.

Nun seien zwei Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ aus $A_\mathfrak{m}$ gegeben, welche beziehentlich zu den Klassen $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{g}$ gehören mögen. Stimmen die sämtlichen Eigenwerte einer irreduziblen Darstellung $\boldsymbol{D}$ von $\mathfrak{g}$ bei $\sigma(\mathfrak{K})$ und $\sigma(\mathfrak{K}')$ überein, so sind die Charakterwerte von $\boldsymbol{D}$ für $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gleich. Also muß es, wenn nur $\mathfrak{K}\neq\mathfrak{K}'$ ist, mindestens eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$ geben, deren Eigenwerte bei $\sigma(\mathfrak{K})$ bzw. $\sigma(\mathfrak{K}')$ nicht sämtlich übereinstimmen, denn die irreduziblen Charaktere bilden eine Basis des Raumes der Klassenfunktionen von $\mathfrak{g}$. Daher nach (5) und der Konstruktion unserer Idealgruppe $H(K/k)_\mathfrak{m}$ $C(\mathfrak{p})\neq C(\mathfrak{p}')$, wenn $\mathfrak{K}\neq\mathfrak{K}'$ ist. Die übrigbleibende Teilaussage in I ist eine unmittelbare Konsequenz der Konstruktion von $H(K/k)_\mathfrak{m}$.

2.3. *Beweis von Satz* 1.2. Bezeichnungen und Voraussetzungen seien wie in Satz 1.2. Ferner bezeichnen wir mit $N_\mathfrak{h}$ die Normbildung von Z nach k. Es sei λ ein Element aus $\mathcal{A}'(K/k)$ und N/k ein zur Definition von λ auftretender galoisscher Zwischenkörper von K/k. Die Galoisgruppe von K/N bezeichnen wir mit $\mathfrak{n}$. Nach der Voraussetzung von Satz 1.2 über $\mathfrak{h}$ sieht man leicht, daß λ_N ein Charakter von $\mathfrak{h}\mathfrak{n}/\mathfrak{n}$ und also auch λ_K ein Charakter von $\mathfrak{h}$ ist, wenn wir λ_N und λ_K nur auf $\mathfrak{h}\mathfrak{n}/\mathfrak{n}$ bzw. auf $\mathfrak{h}$ betrachten.

Es sei $\boldsymbol{p}$ ein zu $\mathfrak{m}$ primes Primideal von Z und $\boldsymbol{p}^a$ eine Potenz von $\boldsymbol{p}$. Es bezeichne $\mathfrak{p}$ das durch $\boldsymbol{p}$ teilbare Primideal von k, und es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\boldsymbol{p}$ in K und $\sigma(\mathfrak{P})$ die Frobeniussubstitution von $\mathfrak{P}$ bezüglich K/k. Es sei schließlich $N_{\mathfrak{h}}\boldsymbol{p}=\mathfrak{p}^{f'}$. Dann ist $\sigma(\mathfrak{P})^{f'}$ die Frobeniussubstitution von $\mathfrak{P}$ bezüglich K/Z. Nach der Voraussetzung über $\mathfrak{h}$ ist $\sigma(\mathfrak{P})^{f'}$ eindeutig durch $\mathfrak{p}$ bestimmt, d.h. die Klasse der zu $\sigma(\mathfrak{P})^{f'}$ konjugierten Elemente von $\mathfrak{g}(K/k)$ besteht aus dem einzigen Element $\sigma(\mathfrak{P})^{f'}$. Bezeichnet man mit $\overline{\sigma(\mathfrak{P})}$ das Element $\sigma(\mathfrak{P})\mathfrak{n}/\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, so besteht ebenfalls die Klasse von $\overline{\sigma(\mathfrak{P})}^{f'}$ aus dem einzigen Element. Nach der Definition von χ_λ und λ gilt dann

$$\begin{aligned}\chi_\lambda(N_{\mathfrak{h}}\boldsymbol{p}^a)&=\chi_\lambda(\mathfrak{p}^{f'a})=\chi_\lambda(\mathfrak{p})^{f'a}\\&=\lambda_K(\sigma(\mathfrak{P}))^{f'a}=\lambda_N(\overline{\sigma(\mathfrak{P})})^{f'a}=\lambda_N(\overline{\sigma(\mathfrak{P})}^{f'})^a=\lambda_K(\sigma(\mathfrak{P})^{f'})^a.\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung folgt nach der Bedingung 4 in § 1.1 und der oben genannten Eigenschaft. Andererseits erhält man aus der Voraussetzung über $\mathfrak{h}$ und dem Reziprozitätsgesetz bezüglich K/Z, daß ein zu $\mathfrak{m}$ primes Ideal von Z, dessen Relativnorm nach k gleich dem Einsideal ist, in $H(K/Z)_{\mathfrak{m}}$ enthalten ist.

Zusammenfassend sieht man ohne weiteres unter Anwendung des Reziprozitätsgesetz bezüglich K/Z, daß $\chi_\lambda(N_{\mathfrak{h}}\boldsymbol{a})=1$ ist, wenn $\boldsymbol{a}\in H(K/Z)_{\mathfrak{m}}$ und $\lambda\in\mathcal{A}'(K/k)$ ist. Dasselbe gilt dann für jeden λ aus $\mathcal{A}(K/k)$, da $\mathcal{A}(K/k)$ durch die Elemente von $\mathcal{A}'(K/k)$ erzeugt wird.

Es sei andererseits ρ ein Charakter vom ersten Grad des Zentrums $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{g}$. Wir haben in Hilfssatz 2.1 gezeigt, daß es in $\mathcal{A}_K(K/k)$ ein Element λ_K gibt mit $\rho(\sigma)=\lambda_K(\sigma)$, wo $\sigma\in\mathfrak{C}$ ist. Wir erhalten also, daß genau dann $\chi_\lambda(N_{\mathfrak{h}}\boldsymbol{a})=1$ gilt für alle λ aus $\mathcal{A}(K/k)$, wenn $\boldsymbol{a}\in H(K/Z)_{\mathfrak{m}}$ ist. Damit ist Satz 1.2 bewiesen.

2.4. *Beweis von* V. Zunächst stellen wir einen Hilfssatz über die in § 1.4 genannte Relation $\sim$ bereit.

HILFSSATZ 2.4. *Es seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Primideale aus $A_{\mathfrak{m}}$. Es sei f' eine ganzrationale Zahl. Genau dann gilt $\mathfrak{p}^{f'}\sim\mathfrak{q}$, wenn $\sigma(\mathfrak{P})^{f'}$ und $\sigma(\mathfrak{Q})$ zu ein und derselben Abteilung von $\mathfrak{g}(K/k)$ gehören, wobei $\sigma(\mathfrak{P})$ und $\sigma(\mathfrak{Q})$ die Frobeniussubstitutionen (bezüglich K/k) eines Primteilers $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ in K bedeuten.*[4a)]

4a) Eine Abteilung von $\mathfrak{g}$ besteht aus einer Klasse $\mathfrak{K}$ und ihren Potenzen $\mathfrak{K}^a$, deren Exponenten a zur Ordnung von den Elementen aus $\mathfrak{K}$ prim sind.

BEWEIS. Wir setzen zur Abkürzung $\tau=\sigma(\mathfrak{P})^{f'}$ und $\sigma=\sigma(\mathfrak{Q})$. Es sei $\boldsymbol{D}$ eine beliebige aber feste irreduzible Darstellung vom Grad d von $\mathfrak{g}(K/k)$, und es seien $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$ eine Reihe der durch Formel (4) mittels $\boldsymbol{D}$ definierten Funktionen in $\mathcal{A}_K(K/k)$. Wir bezeichnen *hier* mit $\boldsymbol{D}'$ die $\boldsymbol{D}$ enthaltende Darstellung von $\mathfrak{g}(K/k)$, deren Charakter in $\boldsymbol{Q}$ liegt und rational irreduzibel ist. Ist $\mathfrak{p}^{f'}\sim\mathfrak{q}$, so gilt $(\lambda_j(\tau))^{a(j)}=\lambda_j(\sigma)$ für jeden $1\leqq j\leqq d$ mit einer jeweils geeigneten zur Ordnung von $C(\mathfrak{p}^{f'})$ nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ primen ganzrationalen Zahl $a(j)$. Der Exponent $a(j)$ wirkt auf die Zahl $\lambda_j(\tau)$ als ein Automorphismus von $\boldsymbol{Q}(\lambda_j(\tau))/\boldsymbol{Q}$, da $a(j)$ nach Behauptung II zur Ordnung von τ prim sein muß. Unter Berücksichtigung von (5) erhalten wir dann, daß die Charakterwerte von $\boldsymbol{D}'$ für τ und σ dieselben sind. Da $\boldsymbol{D}$ beliebig ist, erhalten wir, daß τ und σ zu ein und derselben Abteilung von $\mathfrak{g}(K/k)$ gehören. Denn die rational irreduziblen Charaktere bilden bekanntlich nach Artin eine Basis des Raumes der Funktionen von den Abteilungen (Vgl. E. Artin, Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren, Hamb. Abh. 8 (1930), 292–306). Die gegenseitige Aussage in Hilfssatz 2.4 ist eine unmittelbare Folgerung der Konstruktion von $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$. Damit ist Hilfssatz 2.4 bewiesen.

Es sei $\mathfrak{p}$ wie in V und $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$ die zugehörige Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{g}(K/k)$. Es sei ferner $\mathfrak{q}$ ein Primideal aus $A_{\mathfrak{m}}$, welches zu derjenigen Klasse gehört, welche aus f_0-ten Potenzen von Elementen aus $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$ besteht, wo f_0 wie in V ist. Diese Klasse bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_{\mathfrak{q}}$. Es seien $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})$ und $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})$ die durch $\sigma(\mathfrak{K}_{\mathfrak{q}})$ bzw. $\sigma(\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}})$ erzeugten Untergruppen von $\mathfrak{g}(K/k)$, wo $\sigma(\mathfrak{K}_{\mathfrak{q}})$ und $\sigma(\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}})$ die in § 2.1 festgelegten Vertreter von $\mathfrak{K}_{\mathfrak{q}}$ bzw. $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$ bedeuten. Es gilt dann $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})\supset\mathfrak{z}(\mathfrak{q})$. $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})$ und $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})$ sind jeweils die Zerlegungsgruppen eines Primteilers von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ in K. Es gilt also nach II

$$(\mathfrak{z}(\mathfrak{p}):\mathfrak{z}(\mathfrak{q}))=f_0\,. \tag{6}$$

Nach Hilfssatz 2.4 gilt aber Formel (6) genau dann, wenn $\mathfrak{p}^{f_0}\sim\mathfrak{q}$ gilt. Andererseits besagt Hilfssatz 2.4 zusammen mit der Definition der K_0/k zugeordneten Idealgruppe $H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$, daß genau dann $\mathfrak{p}^{f_0}\sim\mathfrak{q}$ gilt, wenn $\mathfrak{q}$ ein in Behauptung V auftretendes Primideal ist, d. h. $\mathfrak{q}'\in H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$ folgt aus $\mathfrak{q}'\sim\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}\in H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$.

Nunmehr sei $\mathfrak{q}$ also ein Primideal aus $A_{\mathfrak{m}}$, welches für ein vorgegebenes $\mathfrak{p}$ Formel (6) genügt. $\mathfrak{q}$ ist dann ja notwendig in $H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$ enthalten. Wir setzen $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(K/k)$ und $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}(K/K_0)$. Es sei nun

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\sigma_1\mathfrak{g}_0+\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\sigma_2\mathfrak{g}_0+\cdots+\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\sigma_r\mathfrak{g}_0 \tag{7}$$

die Frobeniussche Zerlegung von $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})$ und $\mathfrak{g}_0$, d. h. $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ aus $\mathfrak{g}$ bilden ein vollständiges Vertretersystem von $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\backslash\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$. Ferner habe die Zerlegung

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{z}(\mathfrak{p})\sigma_1'\mathfrak{g}_0+\mathfrak{z}(\mathfrak{p})\sigma_2'\mathfrak{g}_0+\cdots+\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\sigma_{r'}'\mathfrak{g}_0 \tag{8}$$

dieselbe Bedeutung für $\mathfrak{p}$ wie (7) für $\mathfrak{q}$. Eine Klasse von $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})\backslash\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ ist offensichtlich eine Vereinigung von Klassen von $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\backslash\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$, und die Anzahl der in eine Klasse von $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})\backslash\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ fallenden Klassen von $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\backslash\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ ist wegen (6) gleich oder kleiner als f_0. Es gilt andererseits

$$|\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\backslash\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0|/|\mathfrak{z}(\mathfrak{p})\backslash\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0|=f_0\,. \tag{9}$$

Es gelten nämlich nach einer allgemeinen gruppentheoretischen Formel von Iwahori [8]

$$|\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\backslash\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0|=\frac{|\mathfrak{g}|}{|\mathfrak{z}(\mathfrak{q})|\cdot|\mathfrak{g}_0|}\cdot\sum_{\mathfrak{K}}|\mathfrak{K}\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{q})|\cdot|\mathfrak{K}\cap\mathfrak{g}_0|/|\mathfrak{K}|$$

und

$$|\mathfrak{z}(\mathfrak{p})\backslash\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0|=\frac{|\mathfrak{g}|}{|\mathfrak{z}(\mathfrak{p})|\cdot|\mathfrak{g}_0|}\cdot\sum_{\mathfrak{K}}|\mathfrak{K}\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{p})|\cdot|\mathfrak{K}\cap\mathfrak{g}_0|/|\mathfrak{K}|,$$

wobei $\mathfrak{K}$ alle Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{g}$ durchläuft. Ist $\mathfrak{p}$ selbst in $H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$ enthalten, so ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})=\mathfrak{z}(\mathfrak{q})$. In diesem Fall ist (9) klar, da $f_0=1$ ist. Es sei nun $\mathfrak{p}$ nicht in $H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$ enthalten. Ist sogar $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\neq\mathfrak{K}\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{p})$, so folgt unter Berücksichtigung der Definition von $H(K_0/k)_{\mathfrak{m}}$, daß $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{g}_0$ leer ist. Aus der obigen Formel von Iwahori und (6) folgt also (9).

Zusammenfassend erhalten wir, daß jede Klasse von $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})\backslash\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ aus f_0 Klassen von $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\backslash\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ besteht. Daher gilt für ein beliebiges Element τ aus $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{p})\tau\mathfrak{g}_0=\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\tau\mathfrak{g}_0+\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\sigma\tau\mathfrak{g}_0+\cdots+\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\sigma^{f_0-1}\tau\mathfrak{g}_0\,,$$

wo σ ein erzeugendes Element von $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})$ bezeichnet. Da $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})$ zyklisch ist, sieht man leicht ein, daß die Anzahl der in $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})\sigma^i\tau\mathfrak{g}_0$ $(0\leqq i\leqq f_0-1)$ enthaltenen linken Nebenklassen nach $\mathfrak{g}_0$ vom Index i unabhängig ist. Daher ist sie gleich $1/f_0$ die Anzahl der in $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})\tau\mathfrak{g}_0$ enthaltenen linken Nebenklasse nach $\mathfrak{g}_0$. Nach einem bekannten Schluß erhalten wir nun die Behauptung in V.[5)]

§ 3. Eine Klasse Dirichletscher Reihen.

3.1. *Definition und Aufspaltung.* Es sei wie früher K/k ein galoisscher Körper, dessen Galoisgruppe der Forderung (1) genügt. Der K/k zugeordneten Idealklassengruppe $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ wollen wir nun Dirichletsche Reihen zuordnen, welche im abelschen Fall mit den (nicht notwendigerweise eigentlichen) Heckeschen L-Funktionen für die K/k zugeordnete Kongruenzeinteilung übereinstimmen. Dazu sei χ ein Charakter von $A_{\mathfrak{m}}$, welche für die in $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ enthaltenen Ideale den Wert 1 annimmt.[6)] Wir setzen

---

5) Vgl. Artin [2], § 1. An Stelle von $\sigma(\mathfrak{P})$ in [2] denken wir uns $\mathfrak{P}^{\sigma}$. Der Relativgrad bezüglich K_0/k des zu $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})\tau\mathfrak{g}_0$ gehörigen Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K_0 ist gleich der Anzahl der in $\mathfrak{z}(\mathfrak{p})\tau\mathfrak{g}_0$ enthaltenen linken Nebenklassen nach $\mathfrak{g}_0$.

6) Dieser Idealcharakter wird, wie man sich an Hand des in § 1.1 angegebenen Beispiels überzeugt, nicht notwendig durch die Formel (4) charakterisiert.

$$(10)\qquad Z(s,\chi)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}\,,\qquad \Re(s)>1\,,$$

wobei $\mathfrak{a}$ alle zu $\mathfrak{m}$ primen ganzen Ideale von k durchläuft und N die Norm von k nach $\boldsymbol{Q}$ bedeutet. Diese Reihen konvergieren absolut in der Halbebene $\Re(s)>1$ und definieren dort eindeutige holomorphe Funktionen. Es gilt dort auch die Produktentwicklung

$$(11)\qquad Z(s,\chi)=\prod_{\mathfrak{p}}\Big(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\Big)^{-1},\qquad \Re(s)>1\,,$$

wobei $\mathfrak{p}$ alle zu $\mathfrak{m}$ primen Primideale durchläuft. Bezeichnet man mit C eine Klasse nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$, so kann man (11) wie folgt umformen:

$$Z(s,\chi)=\prod_{C}\Big\{\prod_{\mathfrak{p}\subset C}\Big(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\Big)^{-1}\Big\}.$$

Wenn eine Klasse C kein Primideal enthält, so vereinbaren wir, daß der Klasse C entsprechende Faktor von $Z(s,\chi)$ den Wert 1 annimmt. Setzt man

$$Z(s,\chi,C)=\prod_{\mathfrak{p}\in C}\Big(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\Big)^{-1},$$

so gilt

$$\log Z(s,\chi,C)=\sum_{m,\mathfrak{p}\in C}\frac{1}{m}\frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{N\mathfrak{p}^{ms}}\,,\qquad \Re(s)>1\,,$$

wobei m alle natürlichen Zahlen, $\mathfrak{p}$ alle in C enthaltenen Primideale durchläuft. Hierbei ist der Zweig von $\log Z(s,\chi,C)$ so festgelegt, daß $\log Z(s,\chi,C)$ gegen Null strebt, wenn $s\to+\infty$ geht. Enthält C kein Primideal, so verstehen wir unter $\log Z(s,\chi,C)$ den Wert Null.

Es sei C eine Idealklasse nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$, welche Primideale enthält. Nach Behauptung I in § 1.3 ist die Klasse konjugierter Elemente der Galoisgruppe $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(K/k)$, zu welcher Primideale aus C gehören, nicht von den einzelnen Primidealen aus C abhängig, sondern durch die Klasse C bestimmt. Wir legen einen Vertreter σ_C aus der Klasse konjugierter Elemente fest, zu welcher die Primideale aus der Idealklasse C gehören. Es bezeichne K_C den Invariantenkörper der durch σ_C erzeugten zyklischen Untergruppe von $\mathfrak{g}$. Es bezeichne ferner $\mathfrak{H}$ die dem Klassenkörper K/K_C zugeordnete, mit dem Modul $\tilde{\mathfrak{m}}$ definierte Kongruenzidealgruppe von K_C. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{C}$ die Klasse nach $\mathfrak{H}$, welche nach dem Reziprozitätsgesetz hisichtlich K/K_C auf σ_C abgebildet wird. Der Index des Normalisators von σ_C in $\mathfrak{g}$ bezeichnen wir mit n_C. n_C ist also gleich der Anzahl der zu σ_C konjugierten Elemente in $\mathfrak{g}: n_C=|\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}|$. Die Anzahl der Primteiler in K eines Primideals aus C, deren Frobeniussubstitution mit dem festgelegten σ_C identisch sind, ist gleich $n/n_C f_C$, wobei n den Körpergrad von K/k und f_C die Ordnung von σ_C in $\mathfrak{g}$ bezeichnet. Die Relativgrade bezüglich K_C/k von in $\mathfrak{C}$ enthaltenen Primteilern eines zu $\mathfrak{m}$ primen Primideal $\mathfrak{p}$

von k sind genau dann gleich Eins, wenn $\mathfrak{p}$ in der Idealklasse C von k enthalten ist. Die Anzahl dieser in $\mathfrak{C}$ enthaltenen Primteiler in K_C von $\mathfrak{p}$ aus C ist dann gleich $n/n_C f_C$. Bezeichnet man mit $g_i(s)$, $1 \leqq i \leqq 4$, gewisse Dirichletsche Reihen, welche in der Halbebene $\Re(s) > 1/2$ absolut konvergent sind, so gilt zunächst

$$\frac{n}{n_C f_C} \log Z(s, \chi, C) = \sum_{m, \boldsymbol{p} \in \mathfrak{C}} \frac{1}{m} \frac{\chi(C)^m}{N_C \boldsymbol{p}^{ms}} + g_1(s) \tag{12}$$

$$= \chi(C) \sum_{\boldsymbol{p} \in \mathfrak{C}} \frac{1}{N_C \boldsymbol{p}^s} + g_2(s),$$

wobei m alle natürlichen Zahlen und $\boldsymbol{p}$ alle Primideale in $\mathfrak{C}$ durchläuft und N_C die Normbildung von K_C nach $\boldsymbol{Q}$ bedeutet. Bezeichnet man ferner mit η die eigentlichen Charaktere der K/K_C zugeordneten Kongruenzklassengruppe und mit $L(s, \eta, K/K_C)$ die mit η gebildeten Heckeschen L-Funktionen von K_C, so gilt andererseits

$$\frac{\chi(C)}{f_C} \sum_{\eta} \frac{1}{\eta(\mathfrak{C})} \log L(s, \eta, K/K_C) = \frac{\chi(C)}{f_C} \sum_{\eta} \left(\frac{1}{\eta(\mathfrak{C})} \sum_{m, \boldsymbol{p}} \frac{1}{m} \frac{\eta(\boldsymbol{p})^m}{N_C \boldsymbol{p}^{ms}} \right) \tag{13}$$

$$= \chi(C) \sum_{\boldsymbol{p} \in \mathfrak{C}} \frac{1}{N_C \boldsymbol{p}^s} + g_3(s)$$

wobei im zweiten Glied $\boldsymbol{p}$ alle zum Führer von η primen Primideale von K_C durchläuft, im letzten Glied nur diejenigen unter ihnen, welche in $\mathfrak{C}$ enthalten sind. Aus (12), (13) erhalten wir

$$\frac{n}{n_C f_C} \log Z(s, \chi, C) = \frac{\chi(C)}{f_C} \sum_{\eta} \frac{1}{\eta(\mathfrak{C})} \log L(s, \eta, K/K_C) + g_4(s)$$

und also den folgenden

Satz 3.1. *Die Dirichletsche Reihe*

$$Z(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}, \quad \begin{array}{l} \mathfrak{a} \text{ ganz aus } A_{\mathfrak{m}}, \\ \Re(s) > 1, \end{array} \tag{10}$$

läßt sich in das Produkt

$$Z(s, \chi) = Z^*(s, \chi) \Phi(s, \chi) \tag{14}$$

aufspalten, wobei $Z^*(s, \chi)$ und $\Phi(s, \chi)$ vermöge

$$Z^*(s, \chi) = \prod_C \left(\prod_{i=1}^{f_C} L(s, \eta_C^{(i)}, K/K_C)^{n_C \chi(C)/n \eta_C^{(i)}(\mathfrak{C})} \right) \tag{15}$$

und

$$\Phi(s, \chi) = \exp(g(s))$$

erklärt sind. Ferner bedeutet $L(s, \eta_C^{(i)}, K/K_C)$ $(1 \leqq i \leqq f_C)$ die K/K_C zugeordneten eigentlichen Heckeschen L-Funktionen, $g(s)$ eine gewisse in der Halbebene $\Re(s) > 1/2$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe und durchläuft C alle Klassen nach

$H(K/k)_{\mathfrak{m}}$, welche Primideale enthalten, während n, n_C, $\mathfrak{C}$ wie oben sind. Der bei der Definition der in (15) *auftretenden komplexen Potenzen der L-Funktionen verwendete Zweig des Logarithmus sei so festgelegt, daß* $\log L(s, \eta_C^{(i)}, K/K_C)$ *gegen Null strebt, wenn* $s \to +\infty$ *geht.*

Der Ausdruck (15) ist bis auf die Benennung der auftretenden L-Funktionen von der Wahl von σ_C unabhängig.

3.2. *Analytische Fortsetzung.* Da die durch (15) erklärte Funktion $Z^*(s, \chi)$ auf der ganzen Ebene bis auf multiplikative Verzweigungspunkte und eventuelle Pole analytisch ist, ist $Z(s, \chi)$ nach Satz 3.1 mindestens in die Halbebene $\Re(s) > 1/2$ mit Ausnahme von multiplikativen Verzweigungspunkten und eventuellen Polen analytisch fortsetzbar. Dabei ist aber das folgende zu bemerken: *Nach unserem Schluß können die Zweige der in* (15) *auftretenden Potenzen der einzelnen L-Funktionen gar nicht voneinander unabhängig gewählt werden.* Diese Bemerkung gilt auch für die in Satz 7.2 und Satz 7.4 auftretenden Potenzen von L-Funktionen.

Die Funktion $\Phi(s, \chi)$ ist in jeder Halbebene $\Re(s) \geqq 1/2+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ absolut beschränkt und besitzt dort keine Nullstelle. Es gilt insbesondere das folgende

KOROLLAR 3.2. *Für s mit* $\Re(s) \geqq 1/2+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ *gilt*

$$|Z(s, \chi)| \leqq M |Z^*(s, \chi)|$$

mit einer positiven Konstante M, die nur von ε und K/k abhängt.

3.3. *Analytisches Verhalten bei* $s=1$. Um das analytische Verhalten von $Z(s, \chi)$ bei $s=1$ zu erkennen, entnehmen wir in (15) die Faktoren mit $\eta_C=1$ heraus. Diese liefern den Beitrag

$$\prod_C L(s, \eta_C^{(1)}, K/K_C)^{n_C \chi(C)/n},$$

wobei $\eta_C^{(1)}$ den Hauptcharakter der ganzen Idealgruppe von K_C bezeichnet. Also ist $L(s, \eta_C^{(1)}, K/K_C)$ nichts anders als die ζ-Funktion von K_C. Die Summe

$$S(\chi) = \sum_C \frac{n_C \chi(C)}{n}, \tag{16}$$

in welcher C alle diejenigen Klassen nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ durchläuft, welche Primideale enthalten, ist dann und nur dann gleich 1, wenn $\chi(C)=1$ ist für alle in der Summe vorhandenen Klassen C, wenn also χ der Hauptcharakter von $A_{\mathfrak{m}}$ ist. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} S(\chi) &= 1, \qquad \text{wenn } \chi = 1 \text{ ist}, \\ |\Re(S(\chi))| &< 1, \qquad \text{sonst}. \end{aligned} \tag{17}$$

Wenn wir auch die Summe $S(\chi)$ mit Hilfe der Idealklassengruppe $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ eingeführt haben, sind sie in der Tat ein rein gruppentheoretischer Gegenstand, da man die in (16) auftretenden Idealklassen durch die Klassen konjugierter

Elemente von $\mathfrak{g}(K/k)$ ersetzen kann. Im Punkt $s=1$ ist nun nach Satz 3.1 und dem bekannten Verhalten der Heckeschen L-Funktionen [**6**] die Funktion

$$\log Z(s, \chi) - S(\chi) \log \frac{1}{s-1}$$

holomorph. Wir erhalten also die folgende Entwicklung bei $s=1$:

$$Z(s, \chi) = \frac{1}{(s-1)^{S(\chi)}} (a_0 + a_1(s-1) + \cdots), \tag{18}$$

wo $a_0 \neq 0$ und $\mathfrak{P}(s) = a_0 + a_1(s-1) + \cdots$ in $s=1$ holomorph ist.

Die Formel (17) legt es nun nahe, hinsichtlich $S(\chi)$ die folgenden Fälle zu unterscheiden. Es gelten nämlich die Beziehungen

$$\lim_{s\to 1+0} |Z(s, \chi)| = \infty, \qquad \text{wenn } 0 < \Re(S(\chi)) \leqq 1 \text{ ist},$$

$$\lim_{s\to 1+0} Z(s, \chi) = g_\chi, \qquad \text{wenn } -1 < \Re(S(\chi)) \leqq 0 \text{ ist},$$

wo $|g_\chi| < \infty$ ist und wo genau dann $g_\chi \neq 0$ ist, wenn $\Re(S(\chi)) = 0$ ist.

Zur Summe $S(\chi)$ kommen wir wieder in § 7.5 zurück.

§ 4. Anzahl der ganzen Ideale in einer Idealklasse.

4.1. Es sei C eine Idealklasse nach der K/k zugeordneten Idealgruppe $H_\mathfrak{m} = H(K/k)_\mathfrak{m}$. Es gilt

$$\sum_{\mathfrak{a}\in C} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \frac{1}{h} \sum_{\chi} \frac{1}{\chi(C)} Z(s, \chi), \qquad \Re(s) > 1,$$

wobei $h = (A_\mathfrak{m} : H_\mathfrak{m})$ ist, $\mathfrak{a}$ alle in der Klasse C enthaltenen ganzen Ideale und χ alle Charaktere von $A_\mathfrak{m}/H_\mathfrak{m}$ durchläuft. Wir erhalten also nach (17) und (18)

$$\lim_{s\to 1+0} (s-1) \sum_{\mathfrak{a}\in C} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \frac{1}{h} \prod_{\mathfrak{l}\mid\mathfrak{m}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{l}}\right) \cdot g, \tag{19}$$

wobei dieselben Bezeichnungen wie bei Behauptung IV in § 1.3 verwendet wurden. Falls man die Existenz der Dichte $\lim_{x\to\infty} T(x, C)/x$ bewiesen hat, so folgt IV aus (19) wegen eines bekannten Satzes aus der Theorie der Dirichletschen Reihen.[7] Das Ziel dieses Paragraphen besteht darin, den folgenden genaueren Satz zu beweisen.

Satz 4.1. *Es sei K/k ein galoisscher Körper, dessen Galoisgruppe der Forderung* (1) *genügt, und C eine Idealklasse nach der K/k zugeordneten Idealgruppe $H(K/k)_\mathfrak{m}$. Es sei eine nicht-negative ganze Zahl ν gegeben. Alsdann gilt*

7) Vgl. etwa Landau [**9**], § 31.

$$T(x, C)=\frac{1}{h}\Big\{g_0x+\sum_{\chi'}\Big(\sum_{\mu=1}^{\nu+1}\frac{g_\mu(\chi')}{\chi'(C)}\frac{x}{(\log x)^{\mu-S(\chi')}}\Big)$$
$$+\sum_{\chi''}\Big(\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{g_\mu(\chi'')}{\chi''(C)}\frac{x}{(\log x)^{\mu-S(\chi'')}}\Big)\Big\}+O\Big(\frac{x}{(\log x)^{\nu+1}}\Big),$$

wobei χ' und χ'' beziehentlich die sämtlichen Charaktere von $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ mit $0<\Re(S(\chi'))<1$ und $-1<\Re(S(\chi''))\leqq 0$, $S(\chi'')\neq 0$, durchlaufen, während g_0, $g_\mu(\chi')$ und $g_\mu(\chi'')$ gewisse, von der Klasse C unabhängige Konstanten bezeichnen, für welche insbesondere $g_0\neq 0$, $g_1(\chi')\neq 0$, $g_1(\chi'')\neq 0$ gilt. Falls $\nu=0$ ist, ist die Summe, deren Index von $\mu=1$ bis ν durchläuft, als Null zu verstehen. Hier sei der bei der Definition der oben auftretenden komplexen Potenzen reeller Zahlen verwendete Zweig des Logarithmus wie üblich festgelegt.

BEMERKUNG. Da die Konstante g_0 gleich dem in (19) auftretenden Grenzwert ist, ist sie reell. Es sei χ ein in der Formel von Satz 4.1 vorkommender Charakter und $\bar{\chi}$ der komplex-konjugierte von χ. Offenbar sind $S(\chi)$ und $S(\bar{\chi})$ zueinander konjugiert. Es wird aus dem unten angegebenen Beweis hervorgehen, daß auch die Konstanten $g_\mu(\chi)$ und $g_\mu(\bar{\chi})$ konjugiert sind (vgl. Formel (27)). Also ist die Summe

$$\frac{g_\mu(\chi)x}{\chi(C)(\log x)^{\mu-S(\chi)}}+\frac{g_\mu(\bar{\chi})x}{\bar{\chi}(C)(\log x)^{\mu-S(\bar{\chi})}}$$

reell. Das Vorzeichen dieser Summe für $g_\mu(\chi)\neq 0$ ändert sich bei wachsendem x unendlich oft, wenn der imaginäre Teil von $S(\chi)$ nicht verschwindet.

4.2. Zum Beweis von Satz 4.1 stellen wir zunächst einige Lemmata über die Reihen $Z(s, \chi)$ bereit.

LEMMA 1. *Es gilt für $x\to\infty$*

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2i}^{2+x^2i}\frac{x^s}{s^2}Z(s, \chi)ds+O(1), \tag{20}$$

wobei $\mathfrak{a}$ alle ganzen Ideale aus $A_{\mathfrak{m}}$ mit $N\mathfrak{a}\leqq x$ durchläuft.

Der Beweis schließt sich dem Vorbild bei Landau [**9**], § 50 an. Wir betrachten nämlich die Funktion

$$\frac{x^s}{s^2}Z(s, \chi)=\sum_{\mathfrak{a}\in A_{\mathfrak{m}}}\frac{x^s}{s^2}\frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}, \qquad \mathfrak{a}\text{ ganz}, \tag{21}$$

in der Halbebene $\Re(s)>1$. Da auf der geradlinigen Strecke $\sigma=\Re(s)=2$, $-T\leqq t\leqq T$, wo $T>0$ und $s=\sigma+ti$ gesetzt ist, die Reihe (21) gleichmäßig konvergent ist, so kann man die Reihe dort auf der geraden Strecke von $2-Ti$ bis $2+Ti$ gliedweise integrieren. Es ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{x^s}{s^2}Z(s, \chi)ds=\sum_{\mathfrak{a}}\chi(\mathfrak{a})\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^s}{s^2}ds.$$

Beachtet man[8)]

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{y^s}{s^2}ds\right|<\frac{y^2}{T} \qquad \text{für} \quad 0<y\leqq 1$$

und

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{y^s}{s^2}ds-\log y\right|<\frac{y^2}{T} \qquad \text{für} \quad 1\leqq y,$$

so ist also in den Gliedern mit $1\leqq N\mathfrak{a}\leqq x$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^s}{s^2}ds-\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right|<\frac{x^2}{TN\mathfrak{a}^2}$$

und in den Gliedern mit $N\mathfrak{a}>x$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^s}{s^2}ds\right|<\frac{x^2}{TN\mathfrak{a}^2}.$$

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{x^s}{s^2}Z(s,\chi)ds-\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right|\\ &=\left|\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^s}{s^2}ds-\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{N\mathfrak{a}>x}\chi(\mathfrak{a})\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^s}{s^2}ds\right|<\left|\sum_{\mathfrak{a}}\chi(\mathfrak{a})\frac{x^2}{TN\mathfrak{a}^2}\right|\\ &=\frac{x^2}{T}\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{N\mathfrak{a}^2}.\end{aligned}$$

Setzt man $T=x^2$, so folgt

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{x^2}{s^2}Z(s,\chi)ds-\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right|<\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{N\mathfrak{a}^2},$$

und damit ist (20) bewiesen.

Nun gibt es bekanntlich für eine Heckesche L-Funktion $L(s)$ zwei Konstanten a, b derart, daß $L(s)$ in dem Gebiet

$$(22)\qquad \begin{cases}\sigma\geqq 1-\dfrac{1}{a\log|t|}, & |t|\geqq b,\\[2ex] \sigma\geqq\vartheta=1-\dfrac{1}{a\log b}\left(>\dfrac{1}{2}\right), & |t|\leqq b,\end{cases}$$

8) Vgl. Landau [**9**], S. 183.

welches noch von ϑ bis 1 aufgeschnitten ist, holomorph und von Null verschieden ist. Ist ferner ε eine vorgegebene positive Zahl, so gilt $|\log L(s)| < \varepsilon \log |t|$ für $s=\sigma+ti$ mit (22) und $|t|>c$, wobei $c\ (>b)$ eine von ε abhängige hinreichend große Konstante bedeutet.[9] Aus Satz 3.1 folgt daher mit neuen Konstanten a, b und c das folgende

LEMMA 2. *Für die durch* (14) *in die Halbebene* $\Re(s)>1/2$ *fortgesetzte, durch die Reihe* (10) *definierte Funktion* $Z(s, \chi)$ *gibt es zwei Konstanten* $a, b\ (>0)$ *derart, daß* $Z(s, \chi)$ *auf dem von* ϑ *bis* 1 *aufgeschnittenen Gebiet, welches durch* (22) *definiert wird, eindeutig ist und dort weder singuläre Punkte noch Nullstellen besitzt. Ist ferner* ε *eine vorgegebene positive Zahl, so gilt für* s *mit* (22) *und* $|t|>c$ *die Relation*

$$|Z(s, \chi)| \leqq M|t|^{\varepsilon},$$

wobei M *und* c *hinreichend große Konstanten bedeuten.*

Unter der Voraussetzung $x>\sqrt{c}$ setzen wir nun

$$A=2-x^2 i, \qquad B=2+x^2 i, \qquad C=1-\frac{1}{a \log (x^2)}+x^2 i,$$

$$D=1-\frac{1}{a \log c}+ci=\vartheta+ci, \qquad E=1-\frac{1}{a \log c}-ci,$$

$$F=1-\frac{1}{a \log (x^2)}-x^2 i.$$

Hier haben wir die Konstante ϑ, welche links von 1 liegt, erneut noch näher zu 1 als in Lemma 2 festgelegt. Ferner bezeichnen wir mit (ϑ) die gerichtete Kurve, welche auf dem oberen Ufer des Schnittes von ϑ bis $1-\delta$ ($\delta>0$ hinreichend klein) verläuft, sodann den Punkt $s=1$ im negativen Sinne auf einem Kreis mit dem Radius δ verläuft und schließlich auf dem unteren Ufer des Schnittes zum Punkt ϑ zurückkehrt. Wir wenden nun den Cauchyschen Satz auf den Integranden $x^s s^{-2} Z(s, \chi)$ und den Integrationsweg $ABCD\vartheta(\vartheta)\vartheta EFA$ an, wo AB, BC, $D\vartheta$, ϑE und FA geradlinig sind, während die Teilstücke CD, EF auf der Kurve

$$\sigma=1-\frac{1}{a \log |t|}$$

verlaufen. Es gelten unter Berücksichtigung von Lemma 2 die folgenden Abschätzungen:

---

9) Die Abschätzung wie oben für die Artinschen L-Funktionen wurden von Suetuna bei seiner Untersuchungen über die asymptotische Verteilung der Normen von Idealen eines algebraischen Zahlkörpers benutzt: Vgl. [**12**], insb. § 5. Der Schluß des unten angegebenen Beweises von Satz 4.1 schließt sich dem Vorbild Suetunas a. a. O. an. Vgl. auch Landau [**9**], 17. Teil sowie Wilson [**16**].

$$\int_B^C \frac{x^s}{s^2} Z(s, \chi) ds = O(x^{\varepsilon-2}), \quad \text{wo } \varepsilon \text{ eine hinreichend kleine positive Zahl ist},$$

$$\int_A^F = O(x^{\varepsilon-2}), \quad \int_D^{\vartheta} = O(x^{\vartheta}), \quad \int_{\vartheta}^E = O(x^{\vartheta})$$

sowie

$$\int_C^D = O(xe^{-2^{-1}\sqrt{a}^{-1}\sqrt{\log x}}), \qquad \int_E^F = O(xe^{-2^{-1}\sqrt{a}^{-1}\sqrt{\log x}}).$$

Die letzteren erhalten wir wie folgt:

$$\int_C^D \frac{x^s}{s^2} Z(s, \chi) ds = O\Big(\int_c^{x^2} \frac{x^{1-\frac{1}{a\log t}}}{t^2} t^{\varepsilon} dt\Big)$$

$$= O\Big(x \int_1^{x^2} \frac{x^{\frac{-1}{a\log t}}}{t^{2-\varepsilon}} dt\Big);$$

setzt man $m(x) = \exp(\sqrt{a}^{-1}\sqrt{\log x})$, so folgt weiter:

$$= O\Big(x\int_1^{m(x)} \frac{x^{\frac{-1}{a\log t}}}{t^{2-\varepsilon}} dt + x\int_{m(x)}^{x^2} \frac{x^{\frac{-1}{a\log t}}}{t^{2-\varepsilon}} dt\Big)$$

$$= O\Big(x\int_1^{m(x)} x^{\frac{-1}{\sqrt{a}\sqrt{\log t}}} \frac{1}{t^{2-\varepsilon}} dt + x\int_{m(x)}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{t^{3/2-\varepsilon}} dt\Big)$$

$$= O\Big(xe^{-\sqrt{a}^{-1}\sqrt{\log x}} \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{2-\varepsilon}} dt + xe^{\frac{-1}{2}\sqrt{a}^{-1}\sqrt{\log x}} \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{3/2-\varepsilon}} dt\Big)$$

$$= O(xe^{-2^{-1}\sqrt{a}^{-1}\sqrt{\log x}}).$$

Alsdann folgt auf Grund der obigen Abschätzungen unter Verwendung von Lemma 1

$$2\pi i \sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} \chi(\mathfrak{a}) \log \frac{x}{N\mathfrak{a}} = -\int_{(\vartheta)} \frac{x^s}{s^2} Z(s, \chi) ds + O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}). \tag{23}$$

Auf den beiden Ufern von (ϑ) nimmt $(s-1)^{S(x)}$ im allgemeinen verschiedene Werte an. Für $s^{-2}Z(s, \chi)$ ergibt sich an beiden Ufern mit dem jeweiligen Wert von $(s-1)^{S(x)}$, wie bei (18),

$$\frac{1}{s^2} Z(s, \chi) = \frac{1}{(s-1)^{S(x)}} (A_0 + A_1(s-1) + A_2(s-1)^2 + \cdots)$$

mit $A_0 \neq 0$. Auf der Strecke $\vartheta \leqq s \leqq 1$ ist nun für eine nicht-negative ganze Zahl λ

$$|A_{\lambda+1}(s-1)^{\lambda+1} + A_{\lambda+2}(s-1)^{\lambda+2} + \cdots| \leqq B(1-s)^{\lambda+1}$$

mit einer positiven Konstante B und folglich

$$\left| x^s \frac{A_{\lambda+1}(s-1)^{\lambda+1} + A_{\lambda+2}(s-1)^{\lambda+2} + \cdots}{(s-1)^{S(x)}} \right| \leqq Bx^s(1-s)^{\lambda+1-\Re(S(x))}.$$

Den hier zwischen Betragstrichen stehenden Ausdruck können wir wegen (17) in $s=1$ hinein integrieren und dies liefert auf dem Wege hin und zurück den Beitrag

$$O\Big(\int_0^1 x^s(1-s)^{\lambda+1-\Re(S(\chi))}\,ds\Big).$$

Daher ergibt sich unter Berücksichtigung von $x^{\vartheta}=O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}})$

$$\begin{aligned}(24)\qquad \int_{(\vartheta)}\frac{x^s}{s^2}Z(s,\chi)ds &= \sum_{\mu=0}^{\lambda}\int_{(\vartheta)}\frac{A_\mu x^s(s-1)^\mu}{(s-1)^{S(\chi)}}ds+O\Big(\int_0^1 x^s(1-s)^{\lambda+1-\Re(S(\chi))}\,ds\Big)\\ &=\sum_{\mu=0}^{\lambda}\int_0^0\frac{A_\mu x^s(s-1)^\mu}{(s-1)^{S(\chi)}}ds+O\Big(\int_0^0 x^s(1-s)^{\lambda+1-\Re(S(\chi))}\,ds\Big)\\ &\quad+O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}),\end{aligned}$$

wo die Integrale $\int_0^0$ am oberen Ufer von 0 bis $1-\delta$, über den Kreis um 1 im negativen Sinne bis $1-\delta$ und dann am unteren Ufer bis 0 zu erstrecken sind.

Wir unterscheiden nun in Bezug auf $S(\chi)$ vier Fälle.

1. Ist $\Re(S(\chi))=1$, so ist χ der Hauptcharakter von $A_{\mathfrak{m}}$. $Z(s,\chi)$ hat dann einfach einen Pol erster Ordnung im Punkt $s=1$ mit dem von Null verschiedenen Residuum g_0. Damit gilt nach (23) und (24)

$$(25)\qquad \sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}=g_0x+O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}})\qquad \text{für}\quad \chi=1\,.$$

2. $0<\Re(S(\chi))<1$. In diesem Fall sowie im 4. Fall unten kann die Integration in (24) auch nach $s=1$ hinein erstreckt werden, und man hat nach (23) und (24)

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}=\sum_{\mu=0}^{\lambda}B_\mu\int_0^1\frac{x^s(1-s)^\mu}{(1-s)^{S(\chi)}}ds+O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}})$$

mit $B_0=A_0(\exp(-\pi iS(\chi))-\exp(\pi iS(\chi)))\neq 0$, wobei $(1-s)^{S(\chi)}$ den Hauptwert bedeutet. Da $\Re(1+\mu-S(\chi))>0$ ist, folgt wie bei Landau [**9**], SS. 655-656

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{x^s}{(1-s)^{-\mu+S(\chi)}}ds\\ &\quad=\int_0^1\frac{x^{1-u}}{u^{-\mu+S(\chi)}}du=x\int_0^1 e^{-u\log x}u^{\mu-S(\chi)}du\\ &\quad=\frac{x}{(\log x)^{1+\mu-S(\chi)}}\int_0^{\log x}e^{-v}v^{\mu-S(\chi)}dv\sim\frac{x}{(\log x)^{1+\mu-S(\chi)}}\Gamma(1+\mu-S(\chi))\end{aligned}$$

für $x\to\infty$. Daraus folgt nach (23), (24)

$$(26)\qquad \sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}=\sum_{\mu=1}^{\lambda}\frac{C_\mu x}{(\log x)^{\mu-S(\chi)}}+O\Big(\frac{x}{(\log x)^{\lambda+1-\Re(S(\chi))}}\Big)$$

mit $C_\mu=B_{\mu-1}\Gamma(\mu-S(\chi))$ und speziell $C_1\neq 0$.

3. Ist $S(\chi)=0$, so ist $Z(s, \chi)$ bei $s=1$ holomorph. Es gilt

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} \chi(\mathfrak{a}) \log \frac{x}{N\mathfrak{a}} = O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}) .$$

4. $-1<\Re(S(\chi))\leqq 0$ und zugleich $S(\chi)\neq 0$. Es gilt wie beim 2. Fall auch die Formel (26).

4.3. *Übergang zur Summe von* $\chi(\mathfrak{a})$. Zunächst betrachten wir den 1. Fall, wo $\chi=1$ ist. Es bezeichne ξ eine positive Konstante. Aus (25) folgt

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x+\xi x} \log \frac{x+\xi x}{N\mathfrak{a}} - \sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} \log \frac{x}{N\mathfrak{a}} = \log(1+\xi) \sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} 1 + \sum_{x<N\mathfrak{a}\leqq x+\xi x} \log \frac{x+\xi x}{N\mathfrak{a}}$$
$$= g_0 \xi x + O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}) .$$

Also gilt einerseits

$$\log(1+\xi) \sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} 1 \leqq g_0 \xi x + O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}})$$

und folglich

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} 1 \leqq g_0 x + O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}) .$$

Andererseits gilt

$$\log(1+\xi) \sum_{N\mathfrak{a}\leqq x+\xi x} 1 \geqq g_0 \xi x + O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}) ,$$

d. h.

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} 1 \geqq \frac{g_0 \xi}{\log(1+\xi)} \frac{x}{1+\xi} + O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}) ,$$

und folglich

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} 1 \geqq g_0 x + O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}) .$$

Zusammen ergibt sich für $\chi=1$

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} \chi(\mathfrak{a}) = g_0 x + O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}) ,$$

was ausreichend für unseren Zweck ist.[1]

Nun betrachten wir die 2. und 4. Fälle in § 4.2. Diesmal setzen wir $\xi=\xi(x) =(\log x)^{-(\lambda+1)/2}$. Da die Anzahl der ganzen Ideale $\mathfrak{a}$ in $A_\mathfrak{m}$ mit $x\leqq N\mathfrak{a}\leqq x+\xi x$ auf Grund der obigen Formel (oder des Weberschen Satzes) $O(\xi x)$ ist, erhalten wir

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x+\xi x} \chi(\mathfrak{a}) \log \frac{x+\xi x}{N\mathfrak{a}} - \sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} \chi(\mathfrak{a}) \log \frac{x}{N\mathfrak{a}}$$
$$= \log(1+\xi)\Big(\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} \chi(\mathfrak{a}) + \sum_{x<N\mathfrak{a}\leqq x+\xi x} \chi(\mathfrak{a}) \log \frac{x}{N\mathfrak{a}} \Big)$$
$$= \log(1+\xi) \sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} \chi(\mathfrak{a}) + O(\xi x) ,$$

weil $x/(x+\xi x)$ für wachsenden x nach 1 hin strebt. Andererseits folgt aus (26) leicht

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x+\xi x}\chi(\mathfrak{a})\log\frac{x+\xi x}{N\mathfrak{a}}-\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}$$
$$=\sum_{\mu=1}^{\lambda}C_\mu\Big(\frac{x+\xi x}{(\log(x+\xi x))^{\mu-S(\chi)}}-\frac{x}{(\log x)^{\mu-S(\chi)}}\Big)+O\Big(\frac{x}{(\log x)^{1+\lambda-\Re(S(\chi))}}\Big).$$

Benutzt man wie auch etwa in [12] die aus der Taylorschen Entwicklung folgenden Gleichung

$$\frac{x+\xi x}{(\log(x+\xi x))^{\mu-S(\chi)}}-\frac{x}{(\log x)^{\mu-S(\chi)}}$$
$$=\frac{\xi x}{(\log x)^{\mu-S(\chi)}}-(\mu-S(\chi))\frac{\xi x}{(\log x)^{\mu+1-S(\chi)}}+O\Big(\frac{\xi^2 x}{(\log x)^{\mu+1-\Re(S(\chi))}}\Big),$$

so erhält man also

$$\frac{\log(1+\xi)}{\xi}\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})=\sum_{\mu=1}^{\lambda}\frac{g_\mu x}{(\log x)^{\mu-S(\chi)}}+\frac{\log(1+\xi)}{\xi}O(\xi x)$$
$$+O\Big(\frac{\xi^{-1}x}{(\log x)^{1+\lambda-\Re(S(\chi))}}\Big)+O\Big(\frac{\xi x}{(\log x)^{2-\Re(S(\chi))}}\Big)$$

mit $g_1=C_1\neq 0$ und $g_\mu=C_\mu-(\mu-S(\chi))C_{\mu-1}$ für $\mu>1$. Daraus folgt

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})=\sum_{\mu=1}^{\lambda}\frac{g_\mu x}{(\log x)^{\mu-S(\chi)}}+O\Big(\frac{x}{(\log x)^{\lambda+1-\Re(S(\chi))}}\Big).$$

Nimmt man endlich λ mit $\lambda\geqq 2\nu+3$, so folgt also die Formel

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})=\sum_{\mu=1}^{\lambda}\frac{g_\mu x}{(\log x)^{\mu-S(\chi)}}+O\Big(\frac{x}{(\log x)^{\nu+1-\Re(S(\chi))}}\Big),\tag{27}$$

wo $S(\chi)\neq 0,\ 1$ ist.

Für den Fall, wo $S(\chi)=0$ ist, erhalten wir einfacher

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})=O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}),$$

da in diesem Fall $Z(s,\chi)$ auch in $s=1$ holomorph ist.

Aus der Identität

$$T(x,C)=\frac{1}{h}\sum\Big(\frac{1}{\chi(C)}\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\chi(\mathfrak{a})\Big),\qquad h=(A_{\mathrm{m}}:H_{\mathrm{m}})$$

zusammen mit den obigen Formeln für die Summen von $\chi(\mathfrak{a})$ erhalten wir ohne weiteres die Behauptung in Satz 4.1.

§ 5. Primidealsatz für Idealklassen.

5.1. *Summe von* $\chi(\mathfrak{p})$. Für eine Idealklasse C nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ bezeichnen wir mit $\pi(x, C)$ die Anzahl der in C enthaltenen Primideale $\mathfrak{p}$ mit $N\mathfrak{p} \leqq x$. Enthält C Primideale, so wird nach Behauptung I in § 1.3 der Idealklasse C eineindeutig eine Klasse $\mathfrak{K}$ konjugierter Elemente der Galoisgruppe $\mathfrak{g}$ von K/k zugeordnet. $\pi(x, C)$ ist gleich der Anzahl der zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Primideale aus k mit $N\mathfrak{p} \leqq x$, sofern diese nicht in $\mathfrak{m}$ aufgehen. Für eine solche Klasse C bedeute n_C wie früher die Anzahl der in $\mathfrak{K}$ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{g}$. Ferner setzen wir $n_C = 0$, wenn die Idealklasse C keine Primideale enthält. Unter dieser Vereinbarung gilt zunächst

$$S(\chi) = \sum_C \frac{n_C \chi(C)}{n}, \qquad n = [K : k], \tag{16'}$$

wobei C jetzt alle Klassen nach $H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ durchläuft. Es gilt ferner mit $h = (A_{\mathfrak{m}} : H(K/k)_{\mathfrak{m}})$ und mit einer festen Klasse C

$$\sum_\chi \chi(C^{-1}) S(\chi) = \frac{n_C}{n} h, \tag{28}$$

wobei χ alle Charaktere von $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ durchläuft.

Nach Satz 3.1 und (18) gilt nun bei $s = 1$ die Entwicklung

$$\frac{Z'(s, \chi)}{Z(s, \chi)} = \frac{-S(\chi)}{s-1} + \mathfrak{P}'(s)\mathfrak{P}(s)^{-1} = \frac{-S(\chi)}{s-1} + b_0 + b_1(s-1) + \cdots .$$

Die Funktion $Z'(s, \chi)/Z(s, \chi)$ ist nämlich bei $s = 1$ eindeutig und hat höchstens einen Pol erster Ordnung. Unter Berücksichtigung von Lemma 2 in § 4.2 erhalten wir also nach bekannten Methoden[10)]

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \chi(\mathfrak{p}) = S(\chi) \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}). \tag{29}$$

Diese Formel liefert eine Komponentenzerlegung der Artinschen Formel (27) in [**1**] über die Summe des irreduziblen Charakters von $\mathfrak{g}$ für Primideale. Ferner folgt aus (29) wegen (28) und

$$h\pi(x, C) = \sum_\chi (\chi(C^{-1}) \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \chi(p))$$

der Artinsche Primidealsatz für unseren K/k:

$$\pi(x, C) = \frac{n_C}{n} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}).$$

Wegen (28) zeigen sich die Koeffizienten n_C/n für die verschiedenen C als

10) Vgl. etwa Landau [**10**].

Werte der Funktion $h^{-1}\sum_{\chi} S(\chi)\chi^{-1}(C)$ von den Idealklassen C.

5.2. *Summe von* $\chi(\mathfrak{p})/N\mathfrak{p}$. Nimmt man in der Halbebene $\Re(s)>1$ den Logarithmus von $Z(s,\chi)$ und läßt dort $s\to 1$ streben, so folgt auch aus Satz 3.1 und (18)

$$\lim_{\substack{s\to 1\\ \Re(s)>1}}\Big(\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\Big)\Big(\log\frac{1}{s-1}\Big)^{-1}=S(\chi)\,. \tag{30}$$

Aus (30) folgt wiederum wegen (28) der Tschebotareffsche Dichtigkeitssatz für unseren K/k:

$$\lim_{\substack{s\to 1\\ \Re(s)>1}}\Big(\sum_{\mathfrak{p}\in C}\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\Big)\Big(\log\frac{1}{s-1}\Big)^{-1}=\frac{n_C}{n}\,.$$

§ 6. Eine Klasse zahlentheoretischer Funktionen.

Bevor wir in § 7 einen Spezialfall von K/k betrachten, führen wir zunächst eine dafür benötige Klasse zahlentheoretischer Funktionen ein, welche von einer Primzahl l und einer gewissen Restklasse mod. l abhängen. Im folgenden bezeichnen wir mit m eine natürliche Zahl, *welche größer als* 1 *ist*. Wir legen eine Primzahl l fest und bezeichnen mit r eine ganze Zahl mit $2\leqq r\leqq l-1$. Ferner setzen wir

$$\delta_r(m)=\begin{cases}1, & \text{wenn } m\equiv r \pmod{l} \text{ ist},\\ 0, & \text{sonst}.\end{cases}$$

Wir definieren unsere Funktion durch

$$\begin{cases}\lambda_r(m)=0\,, & m\equiv 0 \pmod{l}\,,\\ \lambda_r(m)=\delta_r(m)+\sum\limits_{\substack{d\mid m\\ d\equiv r (\mathrm{mod.}\, l)\\ 1<d<m}}\{-1+\sum\limits_{\substack{d\mid d'\mid m\\ d<d'<m}}(+1+\sum\limits_{\substack{d'\mid d''\mid m\\ d'<d''<m}}(-1 & \\ \qquad\qquad +\sum(\cdots\quad\cdots)))\}\,, & m\not\equiv 0 \pmod{l}\,.\end{cases} \tag{31}$$

Um diese Funktion in einfache Gestalt zu bringen, setzen wir zunächst

$$\mu'(m)=\sum_{\substack{d\mid m\\ 1<d<m}}\{+1+\sum_{\substack{d\mid d'\mid m\\ d<d'<m}}(-1+\sum_{\substack{d'\mid d''\mid m\\ d'<d''<m}}(+1+\sum(\cdots\quad\cdots)))\}\,.$$

Im Gegensatz zu λ_r hängt $\mu'(m)$ weder von l noch von r ab. Es gilt dann für $m\not\equiv 0 \pmod{l}$

$$\lambda_r(m)=\delta_r(m)+\sum_{\substack{d\mid m\\ d\equiv r\ (\mathrm{mod.}\, l)\\ 1<d<m}}(-1+\mu'(m/d))\,. \tag{32}$$

Ist m eine Primzahl, ist also insbesondere $m=2$, so gilt offensichtlich

$$\mu'(m)=1+\mu(m)\,, \tag{33}$$

wobei $\mu(m)$ die Möbiussche Funktion bezeichnet. Die Formel (33) für allgemeine $m > 2$ beweisen wir durch Induktion nach m. Es bezeichne $t(m)$ die Anzahl der positiven Teiler (hier einschließlich 1 und m) von m. Ist m keine Primzahl, so bedeute p einen Primteiler von m und sei $m' = p^{-1}m$ gesetzt. Wir nehmen an, die Formel (33) sei für die echten Teiler von m richtig. Alsdann gilt

$$\begin{aligned}\mu'(m) = \mu'(pm') &= 2t(m') - 2 - \Big(\sum_{\substack{d \mid m \\ d \neq 1}} \mu'(d) + \sum_{\substack{d \mid m' \\ d \neq m'}} \mu'(pd)\Big) \\ &= 2t(m') - 2 - \Big(\sum_{\substack{d \mid m' \\ d \neq 1}} (1 + \mu(d)) + \sum_{\substack{d \mid m' \\ d \neq m}} (1 + \mu(pd))\Big) \\ &= -\sum_{d \mid m'} \mu(d) - \sum_{d \mid m'} \mu(pd) + \mu(1) + \mu(pm') \\ &= \mu(1) + \mu(m) .\end{aligned}$$

Damit ist (33) für alle natürlichen Zahlen $m \geqq 2$ bewiesen. Nach (32) und (33) gilt nun für $m \not\equiv 0 \pmod{l}$ und $m \geqq 2$

$$\lambda_r(m) = \delta_r(m) + \sum_{\substack{d \mid m \\ d \equiv r \,(\mathrm{mod.}\, l) \\ 1 < d < m}} \mu(m/d) . \tag{34}$$

Für die durch (31) erklärte Funktion $\lambda_r(m)$, welche von l und r abhängt, benutzen wir in § 7 die Abschätzung

$$|\lambda_r(m)| < m , \tag{35}$$

die für $m \equiv 0 \pmod{l}$ nach (31) und für $m \not\equiv 0 \pmod{l}$ nach (34) einleuchtet.

§ 7. Ein Spezialfall.

7.1. Es sei K/k ein galoisscher Körper. Im folgenden sei angenommen, daß die Galoisgruppe $\mathfrak{g}$ von K/k isomorph ist zur Gruppe der sämtlichen 'linearen Transformationen' $z \mapsto az + b$, wobei a ($\neq 0$) und b die Elemente eines endlichen Körpers mit l^ν Elementen durchlaufen. Dabei bedeutet l eine beliebige Primzahl. Wir wollen den Zusammenhang zwischen den K/k zugeordneten Dirichletschen Reihen $Z(s, \chi)$ und den zu Zwischenkörpern von K/k gehörigen Heckeschen L-Funktionen herstellen. Wenn dies geschehen ist, so kann man umgekehrt über die primitiven Heckeschen L-Funktionen auch die χ zugeordnete primitive Reihe definieren. Dann erhebt sich unter anderem die Frage, ob sie eine günstige Eulersche Produktdarstellung hat. Diese Frage läßt sich unter einer zusätzlichen Annahme über das Verzweigungsverhalten von K/k bejahend beantworten. Unter einer weiteren Voraussetzung ist die so erklärte primitive Reihe in die ganze Ebene bis auf Verzweigungspunkte analytisch fortsetzbar und genügt dort einer Funktionalgleichung 'vom gewöhnlichen

Typus'.

Den Fall, wo $l=2$ und $\nu=1$ ist, schließen wir aus, da K/k dann relativ-quadratisch ist.

Nun kehren wir zur Gruppe $\mathfrak{g}$ zurück. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{g}_0$ die der Gruppe von $z\mapsto z+b$ entsprechende Untergruppe von $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ ist das semi-direkte Produkt von $\mathfrak{g}_0$ und einer zyklischen Untergruppe $\mathfrak{h}$ mit der Ordnung $l^\nu-1$. Ferner ist $\mathfrak{g}$ die Frobeniusgruppe zu $\mathfrak{h}$ mit dem Frobeniuskern $\mathfrak{g}_0$. In unserem Fall ist sogar $\mathfrak{g}_0-\{1\}$ eine Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ genügt also der Forderung (1). Ferner hat $\mathfrak{g}$ also $l^\nu-1$ lineare Charaktere und einen irreduziblen Charakter vom Grad $l^\nu-1$, welcher von einem nicht-trivialen linearen Charakter von $\mathfrak{g}_0$ induziert wird.[11]

Es bezeichne K_0 den Invariantenkörper von $\mathfrak{g}_0$. Wir haben $[K:K_0]=l^\nu$ und $[K_0:k]=l^\nu-1$. Die Galoisgruppe von K/K_0 ist vom Typus $(l, l, \cdots, l)$ und K_0/k ist zyklisch. Bezeichnet man mit $\mathfrak{H}(K/K_0)$ die dem Klassenkörper K/K_0 zugeordnete Kongruenzidealgruppe, welche nach dem Führer von K/K_0 erklärt sei, so sieht man leicht das Folgende ein. Es sei $\mathfrak{p}$ ein in K/k unverzweigtes Primideal von k und $\boldsymbol{p}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K_0. Ist der Relativgrad von $\boldsymbol{p}$ bezüglich K_0/k größer als 1, so ist $\boldsymbol{p}$ in $\mathfrak{H}(K/K_0)$ enthalten. Ist dagegen $\boldsymbol{p}$ nicht in $\mathfrak{H}(K/K_0)$ enthalten, so ist $\boldsymbol{p}$ vom Relativgrad 1 bezüglich K_0/k, und jede von der Hauptklasse $\mathfrak{H}(K/K_0)$ verschiedenen Klasse nach $\mathfrak{H}(K/K_0)$ enthält eine Konjugierte von $\boldsymbol{p}$.

Die K/k zugeordnete Idealgruppe $H(K/k)_\mathfrak{m}$ bezeichnen wir im folgenden mit $H_\mathfrak{m}$. Das Ideal $\mathfrak{m}$ enthalte nunmehr alle und nur diejenigen Primideale, die in K/k verzweigt sind. Wir stellen nun einige einfache Eigenschaften von $H_\mathfrak{m}$ bereit. Die Klassenzahl $(A_\mathfrak{m}:H_\mathfrak{m})$ ist gleich $l(l^\nu-1)$. Es bezeichne $H_\mathfrak{m}^{(0)}$ die modulo einer Potenz von $\tilde{\mathfrak{m}}$ erklärte, K_0/k zugeordnete Kongruenzidealgruppe in k. Dann ist $H_\mathfrak{m}$ in $H_\mathfrak{m}^{(0)}$ enthalten, und es gilt $(A_\mathfrak{m}:H_\mathfrak{m}^{(0)})=l^\nu-1$ und $(H_\mathfrak{m}^{(0)}:H_\mathfrak{m})=l$. Es existiert also eine Untergruppe $H'_\mathfrak{m}$ von $A_\mathfrak{m}$ mit $A_\mathfrak{m}\supset H'_\mathfrak{m}\supset H_\mathfrak{m}$ derart, daß $A_\mathfrak{m}=H'_\mathfrak{m}H_\mathfrak{m}^{(0)}$, $H'_\mathfrak{m}\cap H_\mathfrak{m}^{(0)}=H_\mathfrak{m}$ gilt. $H'_\mathfrak{m}$ ist in der Tat gleich der Idealgruppe $H(L/k)_\mathfrak{m}$, wo L der Invariantenkörper von $\mathfrak{h}$ ist. Nun sei $\mathfrak{a}\in H'_\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}\notin H_\mathfrak{m}$. Die Klasse $\mathfrak{a}H_\mathfrak{m}$ enthält genau diejenigen Primideale, welche in $\mathfrak{a}H_\mathfrak{m}^{(0)}$ enthalten sind. Dagegen gibt es außer der Hauptklasse $H_\mathfrak{m}$ nur eine weitere in $H_\mathfrak{m}^{(0)}$ enthaltene Klasse C, welche Primideale enthält. C enthält genau diejenigen zu $\mathfrak{m}$ primen Primideale, welche vom Relativgrad l bezüglich K/k sind. Anders ausgedrückt enthält C genau diejenigen zu $\mathfrak{m}$ primen Primideale von k, deren Primteiler in K_0 nicht in $\mathfrak{H}(K/K_0)$ enthalten sind.

Die im obigen aufgestellten Tatsachen und Bezeichnungen benutzen wir im folgenden stillschweigend.

7.2. *Zurückführung von $Z(s, \chi)$ auf Heckesche L-Funktionen.* Es sei χ ein

11) Vgl. etwa Huppert [7], Kap. V.

Charakter von $A_{\mathfrak{m}}$, der auf $H_{\mathfrak{m}}$ den Wert 1 annimmt. χ läßt sich eindeutig in die Charaktere χ' und $\chi^{(0)}$ zerlegen, wo χ' und $\chi^{(0)}$ Charaktere von $A_{\mathfrak{m}}$ sind, welche auf $H'_{\mathfrak{m}}$ bzw. auf $H^{(0)}_{\mathfrak{m}}$ den Wert 1 annehmen: $\chi=\chi'\chi^{(0)}$ mit $\chi'(\mathfrak{a})=1$, $\chi^{(0)}(\mathfrak{a})=\chi(\mathfrak{a})$ für $\mathfrak{a}\in H'_{\mathfrak{m}}$, und $\chi'(\mathfrak{b})=\chi(\mathfrak{b})$, $\chi^{(0)}(\mathfrak{b})=1$ für $\mathfrak{b}\in H^{(0)}_{\mathfrak{m}}$. Man setze

$$L(s, \chi^{(0)})=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\chi^{(0)}(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s},$$

wobei $\mathfrak{a}$ alle zu $\mathfrak{m}$ primen ganzen Ideale von k durchläuft. Es gilt dann

$$\frac{L(s,\chi^{(0)})}{Z(s,\chi)}=\prod_{\mathfrak{p}\in C}\left\{\left(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1}\right\} \tag{36}$$

$$=\exp\left(\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{1}{m}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}-\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{1}{m}\frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{N\mathfrak{p}^{ms}}\right),$$

wobei $\mathfrak{p}$ nur diejenigen Primideale, die in C enthalten sind, und m alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}}$ die Gruppe der zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale von K_0 und mit $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}$ die K/K_0 zugeordnete, modulo einer Potenz von $\tilde{\mathfrak{m}}$ erklärte Kongruenzidealgruppe. Es seien η_i $(i=1, 2, \cdots, l^\nu)$ die Charaktere von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}}$, die auf $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}$ den Wert 1 annehmen. Wir setzen

$$\zeta(s, K_0)=\sum_{\boldsymbol{a}}\frac{1}{\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^s}, \qquad L(s,\eta_i)=\sum_{\boldsymbol{a}}\frac{\eta_i(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^s},$$

wobei $\boldsymbol{a}$ alle zu $\mathfrak{m}$ primen ganzen Ideale von K_0 durchläuft und $\boldsymbol{N}$ die Norm von K_0 nach $\boldsymbol{Q}$ bezeichnet. Bezeichnet man mit η_1 den Hauptcharakter von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}}$, so gilt $\zeta(s, K_0)=L(s,\eta_1)$. Die $l^\nu-1$ L-Reihen $L(s,\eta_i)$, $2\leqq i\leqq l^\nu$, stellen die gleiche Funktion dar. Wir setzen $L(s, K/K_0)=L(s,\eta_i)$ für $i\neq 1$, wenn wir den einzelnen Charakter η_i, $i\neq 1$, nicht eigens hervorheben wollen. Es sei $\mathfrak{C}$ eine von der Hauptklasse $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}$ verschiedenen Klasse nach $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}$. Es gilt

$$\frac{1}{l^\nu}\sum_{i=1}^{l^\nu}\frac{1}{\eta_i(\mathfrak{C})}\log L(s,\eta_i)=\sum_{\boldsymbol{p}^m\in\mathfrak{C}}\frac{1}{m}\frac{1}{\boldsymbol{N}\boldsymbol{p}^{ms}},$$

wobei $\boldsymbol{p}^m$ alle Primidealpotenzen durchläuft, welche in $\mathfrak{C}$ enthalten sind. Da $\boldsymbol{p}\notin\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}$ ist, so ist $\boldsymbol{N}\boldsymbol{p}=N\mathfrak{p}$, wo $\mathfrak{p}$ das durch $\boldsymbol{p}$ teilbare Primideal von k ist. Wegen $\mathfrak{C}\neq\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}$ folgt daher

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in C\\(m,l)=1}}\frac{1}{m}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}=\frac{1}{l^\nu}\sum_{i=1}^{l^\nu}\frac{1}{\eta_i(\mathfrak{C})}\log L(s,\eta_i)$$

$$=\frac{1}{l^\nu}\{\log\zeta(s,K_0)-\log L(s,K/K_0)\}.$$

Da $\chi(\mathfrak{p}^m)=1$, $\mathfrak{p}\in C$, für eine durch l teilbare ganze Zahl m ist, folgt daher nach (36)

$$Z(s, \chi)=L(s, \chi^{(0)})\zeta(s, K_0)^{-(1-\chi(C))/l^\nu}L(s, K/K_0)^{(1-\chi(C))/l^\nu}$$

$$\cdot \exp\Big(\sum_{\substack{m>1\\ m\not\equiv 0(l)\\ \mathfrak{p}\in C}}(\chi(C)^m-\chi(C))\frac{1}{m}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}\Big).$$

Mit Hilfe der in § 6 eingeführten Funktionen $\lambda_r(m)$ gilt nun, abgesehen von der Bestätigung der Konvergenz,

$$Z(s, \chi)=L(s, \chi^{(0)})\zeta(s, K_0)^{-(1-\chi(C))/l^\nu}L(s, K/K_0)^{(1-\chi(C))/l^\nu}$$

$$\cdot \exp\Big\{\sum_{\substack{m>1\\ l\nmid m}}\Big(\sum_r\frac{\lambda_r(m)(\chi(C)^r-\chi(C))}{ml^\nu}(\log\zeta(ms, K_0)-\log L(ms, K/K_0))\Big)\Big\},$$

wo m alle natürlichen Zahlen, welche größer als 1 und nicht durch l teilbar ist, durchläuft und $1<r<l$ ist. Nun sei s eine komplexe Zahl mit $\sigma=\Re(s)>\sigma_0>0$, wo σ_0 eine vorgegebene positive Zahl ist. Es sei m_0 eine hinreichend große positive ganze Zahl, so daß $\Re(m_0 s)>1$ gilt. Unter Berücksichtigung von (35) erhalten wir

$$\Big|\sum_{m>m_0}\Big(\sum_{1<r<l}\frac{\lambda_r(m)(\chi(C)^r-\chi(C))}{ml^\nu}(\log\zeta(ms, K_0)-\log L(ms, K/K_0))\Big)\Big| \tag{37}$$

$$\leqq c\Big|\sum_{m\geqq m_0}\Big(\sum_p\frac{1}{p^{m\sigma}}\Big)\Big|=c\sum_p\frac{1}{p^{m_0\sigma}}\Big(1-\frac{1}{p^\sigma}\Big)^{-1}$$

$$=c\sum_p\frac{1}{(p^\sigma-1)p^{(m_0-1)\sigma}}<\frac{1}{2^{\sigma_0}-1}\sum_p\frac{1}{p^{(m_0-1)\sigma}},$$

wobei c eine nur von k und l^ν abhängige positive Konstante bezeichnet und p alle Primzahlen durchläuft. Nimmt man m_0 hinreichend groß, so wird (37) kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Zahl. Da $\Re(m_0 s)>1$ ist, sind $\zeta(ms, K_0)\neq 0$ und $L(ms, K/K_0)\neq 0$ für $m\geqq m_0$. In der Halbebene $\Re(s)>\sigma_0$ ist daher $Z(s, \chi)$ eine analytische Funktion, welche an den Nullstellen von $\zeta(ms, K_0)$ und $L(ms, K/K_0)$, $1\leqq m<m_0$ $(m\not\equiv 0 \pmod{l})$ und bei $s=1, 1/2, 1/3, \cdots$ singulär (verzweigt) sein kann. Zusammenfassend erhalten wir den

SATZ 7.2. *Es sei K/k wie in* § 7.1 *und $\chi^{(0)}$ wie am Anfang von* § 7.2. *Dann läßt sich die durch* (10) *definierte Dirichletsche Reihe $Z(s, \chi)$ in die Halbebene $\Re(s)>0$ mit Ausnahme von Verzweigungspunkten (und eventuellen Polen) durch*

$$Z(s, \chi)=L(s, \chi^{(0)})\zeta(s, K_0)^{-(1-\chi(C))/l^\nu}L(s, K/K_0)^{(1-\chi(C))/l^\nu} \tag{38}$$

$$\cdot\prod_{m\geqq 2}\Big(\prod_{1<r<l}\zeta(ms, K_0)^{\lambda_r(m)(\chi(C)^r-\chi(C))/ml^\nu}$$

$$\cdot L(ms, K/K_0)^{-\lambda_r(m)(\chi(C)^r-\chi(C))/ml^\nu}\Big)$$

analytisch fortsetzen. (Hierbei sind die in der rechten Seite auftretenden L-Funktionen nicht notwendigerweise primitiv, sondern modulo einer Potenz von $\mathfrak{m}$ erklärt.)

7.3. *Primitive Reihen.* Unter der weiteren Annahme, daß K/K_0 unverzweigt sei, ändern wir die Ausgangsdefinition unserer Reihen ab. Es sei $\mathfrak{p}$ ein in K/k verzweigtes Primideal von k. Da K/K_0 unverzweigt angenommen ist, folgt leicht, daß jeder Primteiler $\boldsymbol{p}$ von $\mathfrak{p}$ in K_0 in K/K_0 voll zerlegt ist: $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{H}(K/K_0)$. Aus der obigen Berechnung sieht man dann leicht ein, daß die rechte Seite von (38) gleich

$$\tilde{Z}(s, \chi) = Z(s, \chi) \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}} \left(1 - \frac{\chi^{(0)}(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1} \tag{39}$$

ist, wenn man sich in die rechte Seite von (38) für die einzelnen Heckeschen L-Funktionen jeweils die mit den primitiven Charakteren eingesetzt denkt. Es bezeichne $\mathfrak{f}_0$ den Führer des Kongruenzidealcharakters $\chi^{(0)}$. Dann gilt

$$\tilde{Z}(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\tilde{\chi}(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\tilde{\chi}(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1},$$

wobei $\mathfrak{a}$ alle zu $\mathfrak{f}_0$ primen ganzen Ideale von k durchläuft und wo $\tilde{\chi}$ ein Charakter der Gruppe der zu $\mathfrak{f}_0$ primen Ideale von k ist. Die Reihe $\tilde{Z}(s, \chi)$ nennen wir die zu χ gehörige primitive Reihe.

7.4. Ist speziell $l = 2$, so haben die Funktion $\lambda_r(m)$ keine Bedeutung, und das in (38) auftretende Produkt tatsächlich ein endliches Produkt. Darüber hinaus gilt der folgende

SATZ 7.4. *Es sei K/k wie in* § 7.1 *und es sei speziell $l = 2$. Ferner sei angenommen, daß K/K_0 unverzweigt (diesmal einschließlich der unendlichen Primstellen) ist. Es sei χ ein Charakter von $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$, welche keine Kongruenzcharakter ist: $\chi \neq \chi^{(0)}$. Dann ist die zu χ gehörige primitive Reihe* (39) *in die ganze Ebene bis auf sämtlich im Gebiet $0 < \mathfrak{R}(s) < 1$ sowie bei $s = 1$ liegende Verzweigungspunkte analytisch fortsetzbar und genügt dort für passende Zweige einer Funktionalgleichung von genau demselben Typus wie die zu $\chi^{(0)}$ gehörige primitive Heckesche L-Funktion.*

Da unter der Annahme von Satz 7.4 die Quadrate der Charaktere η_i gleich 1 sind, sind η_i selbst konjugiert. Die Differente eines algebraischen Zahlkörpers gehört bekanntlich zu einer absoluten Idealklasse, welche Quadrat einer anderen (eventuell derselben) Klasse ist.[12] Die $\zeta(s, K_0)$ bzw. $L(s, K/K_0)$ entsprechenden primitiven Heckeschen L-Funktionen genügen daher einer Funktionalgleichung von genau demselben Typus.[13] Unter Berücksichtigung von (38) erhalten wir also Satz 7.4.

7.5. *Irreduzible Bestandteile der Idealcharaktere.* Für den in Satz 7.2 betrachteten Fall haben wir zwei Aufspaltungen von $Z(s, \chi)$, welche in Satz 3.1 bzw. in Satz 7.2 gegeben wurden. Für diesen Fall ist das Produkt der

---

12) Vgl. etwa Weil [**15**], SS. 290–291.

13) Vgl. Hecke [**6**], die dritte Formel auf S. 195.

ersten drei Faktoren in der rechten Seite von (38) gleich der in Satz 3.1 mit $Z^*(s, \chi)$ bezeichneten Funktion. Nun kehren wir wieder auf einen allgemeinen galoisschen körper K/k, dessen Galoisgruppe aber der Forderung (1) genügt, und geben eine "irreduzible Zerlegung" der Charaktere χ_i $(1 \leqq i \leqq h)$ von $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$. Betrachtet man nämlich χ_i als Funktionen von der Idealklassen, welche Primideale enthalten, so kann man χ_i nach der Behauptung I in § 1.3 als Klassenfunktionen von $\mathfrak{g}$ ansehen. In diesem Sinne gilt

$$\chi_i = \sum_{j=1}^{r} c_{i,j}\rho_j, \qquad (1 \leqq i \leqq h) \tag{40}$$

wo ρ_j $(1 \leqq j \leqq r)$ die irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{g}$ und $c_{i,j}$ komplexe Zahlen sind. Abgesehen von den Beiträgen von in $\mathfrak{m}$ aufgehenden Primidealen gilt dann

$$Z^*(s, \chi_i) = \prod_j L(s, \rho_j)^{c_{i,j}},$$

wobei $L(s, \rho_j)$ die zu ρ_j gehörige Artinsche L-Funktion bezeichnet.

Die Koeffizienten $c_{i,j}$ in (40) werden durch

$$c_{i,j} = S_j(\chi_i) = \sum_C \frac{n_C \chi_i(C)}{n} \rho_j(\mathfrak{K}_C^{-1})$$

gegeben, wo $\mathfrak{K}_C$, wenn eine Idealklasse C Primideale enthält, die C entsprechende Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{g}$ bedeutet und sonst $\rho_j(\mathfrak{K}_C^{-1})$ als Null zu verstehen ist. Bezeichnet man mit ρ_1 den Einscharakter von $\mathfrak{g}$, so ist $S(\chi) = S_1(\chi)$.

Nach II in § 1.3 erhält man nach den bekannten Methoden

$$(\zeta_K(s))^{h/n} = \prod_\chi Z(s, \chi),$$

wobei $\zeta_K(s)$ die ζ-Funktion (mit dem Exkludenten $\mathfrak{m}$) von K bezeichnet und χ alle Charaktere von $A_{\mathfrak{m}}/H(K/k)_{\mathfrak{m}}$ durchläuft, während man die Potenz von $\zeta_K(s)$ in der linken Seite reellwertig für reelles s wählt. Nach den bekannten Eigenschaften der regulären Darstellung von $\mathfrak{g}$ und der Artinschen L-Funktionen erhalten wir also die folgenden Relationen

$$\sum_{i=1}^{h} S_j(\chi_i) = \frac{h}{n} d_j \qquad (1 \leqq j \leqq r)$$

mit $d_j = \rho_j(1)$.

Mathematisches Institut
Universität Karlsruhe
und
College of General Education
University of Tokyo

Literatur

[1] E. Artin, Über eine neue Art von L-Reihen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **3** (1923), 83–108; "Collected Papers" 1965, 105–124.

[2] E. Artin, Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitätsgesetz, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **7** (1927), 46–51; "Collected Papers" 1965, 159–164.

[3] C. Chevalley, Sur la théorie du corps des classes dans les corps finis et les corps locaux, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sect. I, **2**, Part 9 (1933), 365–476.

[4] M. Deuring, Über den Tschebotareffschen Dichtigkeitssatz, Math. Ann., **110** (1934), 414–415.

[5] G. Frobenius, Über die Beziehung zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, Sitzungsber. K. Preuß. Akad. Wiss. zu Berlin, 1896, 689–703; "Gesammelte Abhandlungen" II, 1968, 719–733.

[6] E. Hecke, Mathematische Werke, Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen, 1959. (Insb. 9. und 14. Abhandlungen).

[7] B. Huppert, Endliche Gruppe I, Springer-Verlag, Berlin etc., 1967.

[8] N. Iwahori, On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, **10** (1963/64), 215–236.

[9] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Second Edition with an Appendix by Dr. Paul T. Bateman, Chelsea Publ. Comp., New York, 1953.

[10] E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Chelsea Publ. Comp., New York, 1948.

[11] G. J. Rieger, Über die Anzahl der Ideale in einer Idealklasse mod $\mathfrak{f}$ eines algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann., **135** (1958), 444–466.

[12] Z. Suetuna, Über die Maximalordnung einiger Funktionen in der Idealtheorie, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sect. I, **1**, Part 3 (1925), 105–153; Vgl. auch Part 11 (1928), 435–437.

[13] T. Takagi, Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers, J. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo, **41**, Article 9 (1920), 1–133.

[14] H. Weber, Über Zahlgruppen in algebraischen Körpern (zweite Abhandlung), Math. Ann., **49** (1897), 83–100.

[15] A. Weil, Basic Number Theory, Springer-Verlag, Berlin etc., 1967.

[16] B. M. Wilson, Proofs of some Formulae enunciated by Ramanujan, Proc. London Math. Soc., (2), **21** (1923), 235–255.

Zusatz am 4. März 1970. Wir möchten hier bemerken, daß die gegenseitige Aussage von III in §1.3 unmittelbar aus II und einem Satz von M. Bauer folgt. Hierzu vergleiche man H. Hasseschen Bericht, Teil II, S. 141 (Physica Verlag, Würzburg-Wien, 1965).