L'UNIFORMISATION ET LA SÉPARABILITÉ DES ENSEMBLES PLANS I: THÉORÈMES FONDAMENTAUX

HIDEAKI WATANABE

(Received July 1, 1949, received in revised form November 5, 1951)

Introduction

Dans cette note nous étudirons les classes des ensembles qui sont munis par un ensemble plan donné. Les résultats fondamentaux seront donnés par le Tableau 1 (p. 40). Nous faisons quelques applications de ces résultats aux problèmes de l'uniformisation et de la séparabilité des ensembles plans qui sont importants dans la théorie des ensembles analytiques—ces applications seront publiées prochainement sous le même titre.

Sur l'uniformisation des ensembles, par example, M$^{\text{elle}}$ S. Braun a établit deux théorèmes suivants [1].

THÉORÈME B. 1. *Tout ensemble plan* (F) *peut être uniformisé au moyen d'un ensemble* (G_δ).

THÉORÈME B. 2. *Tout ensemble plan* (F_σ) *peut être uniformisé au moyen d'un ensemble* $(G_{\delta\sigma})$.

D'après nos résultats on peut montrer que Théorème B. 2 sera amélioré, c.-à-d., tout ensemble plan (F_σ) $[(F_\sigma^*)]$ peut être uniformisé au moyen d'un ensemble $(F_{\sigma\rho})$ $[(G_\delta)]$.

Sur le problème de séparation, N. Lusin a montré deux théorèmes suivants [5].

THÉORÈME L. 1. *Il existe deux courbes* C_1 *et* C_2 *qui sont des complémentaires analytiques et dont l'une est située au-dessus de l'autre telles que l'on ne peut trouver aucune courbe mesurable* (B) *entre* C_1 *et* C_2.

THÉORÈME L. 2. *Il existe deux courbes* C_1 *et* C_2 *qui sont des complémentaires analytiques et dont l'une est située au-dessus de l'autre telles que l'on ne sait trouver deux ensembles disjoints* H_1 *et* H_2 *mesurables* (B) *qui contiennent* C_1 *et* C_2 *respectivement.*

Et il a posé le problème; la proposition suivante, est elle vraie?

PROPOSITION L. *Entre deux courbes quelconques* C_1 *et* C_2 *qui sont des complémentaires analytiques et dont l'une est située au-dessus de l'autre, on peut trouver un ensemble mesurable* (B) *qui est coupé par toute droite parallèle à l'axe* OY *au moins en un point.*

Nous montrerons dans la deuxième partie que ce problème est résolu négativement comme une application de nos résultats, et cela en suivant la même méthode de N. Lusin qui est employée dans la démonstration du Théorème L. 1.

Notations et Définitions

P_x: la droite parallèle à l'axe OY qui est menée par le point $(x, 0)$.

$\uparrow E$ [$\downarrow E$] : l'ensemble de tous les points des semi-droites fermées parallèles à l'axe OY, qui sont menées à la direction positive [négative] par chaque point de l'ensemble plan E.

$\updownarrow E$: la somme des ensembles $\uparrow E$ et $\downarrow E$.

$(y > a)$: l'ensemble de tous les points du plan qui sont au-dessus de la droite $y = a$.

$(y \geqq a)$, $(y < a)$, $(y \leqq a)$ et $(y = a)$ seront définis d'une façon analogue.

$E \in (\sim)$ [$E \in (\sim')$]: pour tout x situé sur l'axe OX, l'ensemble EP_x est borné-supérieurement [inférieurement]. Dans ce cas nous dirons que l'ensemble E possède la propriété $(\sim)$ [$(\sim')$].

Un ensemble E est dit *uniforme* par rapport à l'axe OX, si $E P_x$ ne contient qu'un point au plus pour tout x situé sur l'axe OX, et l'on dit E un ensemble *semi-uniforme* si EP_x ne contient qu'un nombre dénombrable de points.

Si (Φ) est une classe d'ensembles nous désignons par Φ un ensemble quelconque de (Φ), et par $(C\Phi)$ la classe de tous les ensembles complémentaires $C\Phi$.

(G^{ξ}), (F^{ξ}) $(0 \leqq \xi < \Omega)$: les classes de Borel au sens de F. Hausdorff [2], en particulier $(G^0) = (G)$, $(F^0) = (F)$, $(G^1) = (G_\delta)$, $(F^1) = (F_\sigma)$ etc.

(K): la classe de tous les ensembles plans fermés et bornés.

$(\underline{F})$ la classe de tous les ensembles plans fermés qui sont situés entre deux droites parallèles à l'axe OX.

(B_n), (A_n), (C_n) $(n = 1, 2, \cdot\cdot)$: les classes d'ensembles mesurables (B), analytiques et complémentaires analytiques d'ordre n respectivement. (Voir [6] p. 270). Souvent nous désignerons (B), (A) et (C) au lieu de (B_1), (A_1) et (C_1) respectivement.

$(B_{1,\xi})$ $(1 \leqq \xi < \Omega)$: la classe d'ensembles qui sont (F^{ξ}) et (G^{ξ}) à la fois.

$(B^*_{1,1})$ [(F^*), (F^*_σ)]: la classe d'ensembles $(B_{1,1})$ [(F), (F_σ)] dont la projection[1] est (G_δ)[2].

(B^*_n) [(A^*_n)]: la sous-classe de (B_n) [(A_n)] dont l'ensemble a une projection (B_n).

(F_ρ) [$(F_{\sigma\rho})$, $(A_{n\rho})$ $(n = 1, 2, \cdots\cdot)$]: la classe d'ensembles qui sont représentables comme la différence de deux ensembles (F) [(F_σ), (A_n)] (Voir [8]).

(A_τ): la classe d'ensembles (CA_ρ), c.-à-d., la classe d'ensembles qui sont représentable comme une somme d'un ensemble analytique et un complémentaire analytique.

$(\widetilde{\Phi})$ [(Φ)]: la sous-classe de (Φ) dont l'ensemble possède la propriété $(\sim)$ [$(\sim')$].

$\rightarrow$: l'inclusion logique.

$\leftrightarrow$: l'équivalence logique.

---

1) Dans cette note la projection d'ensemble plan est "la projection par rapport à l'axe OX."

2) En général, cettes projections sont (F_σ).

Points supérieurs α, β, γ etc.

DÉFINITION. Soit E un ensemble plan donné. Nous dirons qu'un point (x_0, y_0) est supérieur [inférieur] α à l'ensemble E—ou plus simplement sup [inf] α à E—si

$$P_{x_0} \cdot (y \leqq y_0) \cdot E \neq 0 \qquad [P_{x_0} \cdot (y \geqq y_0) \cdot E \neq 0],$$

supérieur [inférieur] β—ou sup [inf] β—si

$$P_{x_0} \cdot (y < y_0) \cdot E \neq 0 \qquad [P_{x_0} \cdot (y > y_0) \cdot E \neq 0],$$

supérieur [inférieur] γ—ou sup [inf] γ—si

$$P_{x_0} \cdot E \neq 0,\ P_{x_0} \cdot (y \geqq y_0) \cdot E = 0 \qquad [P_{x_0} \cdot (y \leqq y_0) \cdot E = 0],$$

et supérieur [inférieur] δ—ou sup [inf] δ—si

$$P_{x_0} \cdot E \neq 0,\ P_{x_0} \cdot (y > y_0) \cdot E = 0 \qquad [P_{x_0} \cdot (y < y_0) \cdot E = 0].$$

Nous dirons encore qu'un point (x_0, y_0) est supérieur [infrieur] ζ—ou sup [inf] ζ—s'il est sup [inf] δ à E et si

$$P_{x_0} \cdot (y > a) \cdot E \neq 0 \qquad [P_{x_0} \cdot (y < a) \cdot E \neq 0]$$

pour tout nombre $a < y_0$ $[a > y_0]$, et en outre si $(x_0, y_0) \in E$ nous dirons que ce point est supérieur [inférieur] η—ou sup [inf] η.

Un point (x_0, y_0) est appelé point θ [θ'] de l'ensemble E, si

$$P_{x_0} \cdot (y > n) \cdot E \neq 0 \qquad [P_{x_0} \cdot (y < -n) \cdot E \neq 0]$$

pour tout nombre naturel n.

L'ensemble de tous les points qui sont sup α à E est désigné par αE,

E	G	$\widetilde{G}$	$\overline{\underline{F}}$	$\widetilde{F}^*$	F^*	$\widetilde{F}$	F	F_σ	$\widetilde{F}_\sigma$	F_σ^*	$\widetilde{F}_\sigma^*$	$\widetilde{B}_n^*$	B_n^*	$\widetilde{B}_n$	B_n	A_n	$\widetilde{A}_n$	A_n^*	$\widetilde{A}_n^*$
α	G		F			F_σ									A_n				
β																			
θ	G	0			$F_{\sigma\delta}$	0	$F_{\sigma\delta}$		0	$F_{\sigma\delta}$	0			0		0		0	
η																			
δ	F_ρ			G_δ						G_δ			C_n						C_n
γ							$F_{\sigma\rho}$								$A_{n\rho}$				
$\gamma\zeta$								$G_{\delta\sigma}$											
$\gamma'\zeta$	F_σ	G	F_σ		$G_{\delta\sigma}$	F_σ			F_σ	$G_{\delta\sigma}$	F_σ	A_n	$A_{n\rho}$	A_n			A_n	$A_{n\rho}$	A_n
$\updownarrow\zeta$			F	$B_{1,1}$							$B_{1,1}$	B_n	C_n					C_n	B_n
ζ				G_δ					$F_{\sigma\delta}$										

Tableau 1

3) D'après S. Mazurkiewicz, ηE est l'ensemble de tous les points y-maximum ; Voir [7] et [6] p. 281.

et inf α à E par $\alpha' E$. De même on peut définir des notations βE, $\beta' E$, γE etc.[3)]

L'ensemble de tous les points $\theta[\theta']$ de E est désigné par $\theta E[\theta' E]$.

Ceci posé, les ensembles ζE et ηE sont évidemment uniformes.

Pour les ensembles qui viennent d'être définis, ***nous avons le Tableau*** 1 dont la démonstration est l'objet du § 1. Dans le § 2 nous prouverons par certains exemples l'exactitude de nos estimations.

1. Démonstration du Tableau 1.

Dans la suite nous n'observons que des ensembles α, β etc., car nous pouvons obtenir les résultats pour des ensembles α', β' etc. de la même manière.

Tout d'abord on a évidemment

$$(1) \qquad \begin{cases} \uparrow G \text{ et } \updownarrow G \in (G); & \uparrow F \text{ et } \updownarrow \underline{F} \in (F); \\ \updownarrow F_\sigma^* \in (B_{1,1}); & \updownarrow \overline{F}_\sigma \in (F_\sigma); \\ \updownarrow A_n^* \in (B_n), & \updownarrow A_n \in (A_n) \ (n = 1, 2 \cdot\cdot,); \end{cases}$$

et d'après la définition,

$$(2) \qquad \uparrow E = \alpha E.$$

Soit $r_1, r_2, \cdot\cdot, r_n, \cdot\cdot$ la suite formé de tous les nombres rationnels. En posant

$$E_n = (y > r_n) \cdot \updownarrow \{(y < r_n) \cdot E\},$$
$$E_n' = (y > r_n) \cdot \updownarrow \{(y \leqq r_n) \cdot E\} \qquad (n = 1, 2, \cdot\cdot),$$

on vérifie aisément que

$$(3) \qquad \beta E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty} E'_n.$$

Comme les ensembles $(y < a)$ et $(y \leqq a)$ sont (G) et (F) respectivement, les relations (1) et (3) impliquent facilement la validité des estimations de β du Tableau 1.

Concernant des opérateurs α, β etc. on a évidemment quatre relations suivantes :

$$(4) \qquad \alpha E = E + \beta E,$$
$$(5) \qquad \gamma E = \updownarrow E - \alpha' E,$$
$$(6) \qquad \delta E = \updownarrow E - \beta' E,$$
$$(7) \qquad \eta E = E - \beta' E.$$

L'estimations de α sont vraies pour $\overline{F}$ d'après (1) et (2), et pour les autres d'après les estimations de β et (4).

En vertu des estimation de α, β et (1), (5), (6) on obtient aisément les estimations de γ et de δ.

L'estimation de η s'obtiendra par l'estimation de β et (7). Dans ce cas pour démontrer la formule $\eta E = 0$ pour $E \in (G)$ on doit observer l'implication :

$$E \in (G) \rightarrow E \subset \beta E = \alpha E.$$

Posons à neuf $E_n = (y > n) \bullet E$ $(n = 1, 2, \cdots)$. On a $\theta E = \prod_{n=1}^{\infty} \updownarrow E_n$, et il en résulte l'estimation de θ d'après (1) et l'équivalence évidente:

$$E \in (\sim) \leftrightarrow \theta E = 0.$$

On obtient les estimations de $\updownarrow \zeta$ par (1), l'estimation de θ et les relations suivantes:

$$\updownarrow \zeta E = \updownarrow E - \theta E,$$
$$E \in (\sim) \leftrightarrow \updownarrow \zeta E = \updownarrow E.$$

Il est clair que

$$\gamma' \zeta E = \beta' E - \theta E = (\beta' E) \bullet (\updownarrow \zeta E)$$

et

$$E \in (\sim) \leftrightarrow \gamma' \zeta E = \beta' E.$$

Donc on obtient les estimations de $\gamma' \zeta$ d'après les estimation de β, θ et $\updownarrow \zeta$.

Tout revient ainsi à établir les estimations de ζ et de $\gamma\zeta$. Si l'ensemble E est $(\underline{F})$, $(\widetilde{F^*})$, (F^*), $(\widetilde{F})$ ou (F), les estimations s'obtiendront par les estimations de η et de γ en faisant usage de l'inclusion évidente

$$E \in (F) \to \zeta E = \eta E \text{ et } \gamma \zeta E = \gamma E.$$

Dans le cas général, si l'on emploie des égalités évidentes $\zeta E = \eta E + \eta' \gamma E$, $\gamma \zeta E = \beta \gamma E$ etc., on a besoin de faire usage de l'opération $\updownarrow$ deux fois, ce qui entraînera des estimations incomplètes. Nous suiverons alors la méthode de N. Lusin [5].

Etant donné un ensemble plan E, soit E_n l'ensemble obtenu de E par le déplacement parallèle à l'axe OY par ordonnée $1/n, n = 1, 2, \cdots$, c.-à-d.,

$$E_n = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}} \left[\left(x, y - \frac{1}{n}\right) \in E \right].$$

Ceci posé, les deux ensembles E et E_n appartiennent à la même classe d'après nos opérations α, β, etc. On a évidemment

$$\zeta E = \prod_{n=1}^{\infty} \alpha' E_n - \beta' E,$$

$$\gamma \zeta E = \updownarrow E - \prod_{n=1}^{\infty} \alpha' E_n.$$

Donc on voit la validité des estimations ζ et $\gamma\zeta$ en vertu de (1) et des estimations de α et de β.

Ainsi, la validité de toutes les estimations du Tableau 1 a été complètement démontrée.

Remarque. *La projection d'un ensemble plan E qui est semi-uniforme et (B_1) est encore (B_1), donc les estimations de classes des ensembles obtenus des E par les opérations citées dans le tableau 1 sont toujours (B_1).*

2. Démonstration de l'exactitude des estimations.

Soit (Φ) une classe d'ensembles. Nous dirons que l'ensemble E est (Φ)

exactement—ou simplement $(e\Phi)$—lorsque $E \in (\Phi)$ et $E \overline{\in} (C\Phi)$ si $(\Phi) \neq (C\Phi)$ ou lorsque $E \in (\Phi)$ et E n'appartient à aucune classe inférieure si $(\Phi) = (C\Phi)$. Par exemple, il existe, comme on sait, des ensembles (eF^{ξ}), (eG^{ξ}) $(0 \leqq \xi < \Omega)$, (eA_n) et (eC_n) $(n = 1, 2, \cdot\cdot,)$. D'après W. Sierpiński [8] il existe des ensembles (eF_ρ), $(eF_{\sigma\rho})$ et $(eA_{n\rho})$ $(n = 1, 2, \cdot\cdot)$.

Si les estimations des résultats d'une opération pour deux classes (Φ_1) et $(\Phi_2) \supset (\Phi_1)$ sont égales, il nous suffit évidemment de montrer l'exactitude pour (Φ_1) seulement; par exemple, tous les résultats de l'opération α pour $\widetilde{F}^*$, F^*, $\widetilde{F}$, F, $\widetilde{F}^*_\sigma$, F^*_σ, $\widetilde{F}_\sigma$ et F_σ sont (F_σ), mais il suffit de montrer l'exactitude de l'estimation α de $\widetilde{F}^*$ seulement.

1. Soit M un ensemble (eG_δ) qui est situé sur l'axe OX. Il existe des ensembles linéaires ouverts M_n $(n = 1, 2, \cdots\cdot)$ sur l'axe OX tels que $M = \prod_{n=1}^{\infty} M_n$, $M_1 \supset M_2 \supset \cdots\cdot \supset M_n \supset \cdots\cdot$ et $M_1 = (y = 0)$. En posant $N_n = (y = 0) - M_n$ $(n = 1, 2, \cdots\cdot)$ et $N = (y = 0) - M$, on a

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} N_n, \quad N_1 \subset N_2 \subset \cdots\cdot \subset N_n \subset \cdots\cdot, \qquad N_n \in (F), \quad N \in (eF_\sigma).$$

Posons

$$M^1 = (y = 1) \cdot \updownarrow M, \qquad M^{-1} = (y = -1) \cdot \updownarrow M,$$
$$N^1 = (y = 1) \cdot \updownarrow N, \qquad N^{-1} = (y = -1) \cdot \updownarrow N.$$

On a alors M^1 et $M^{-1} \in (eG_\delta)$, N^1 et $N^{-1} \in (eF_\sigma)$. Posons encore

$$E_n = (0 < y < n) \cdot \updownarrow M_n,$$
$$E'_n = \left(0 < y < \frac{n}{n+1}\right) \cdot \updownarrow M_n \qquad (n = 1, 2 \cdots\cdot),$$
$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n, \qquad E' = \sum_{n=1}^{\infty} E'_n,$$

et soit E'_s l'ensemble symétrique à E' par rapport à l'axe OX, on voit aisément que

$$E' \text{ et } E'_s \in (\widetilde{G}), \quad E \in (G),$$
$$\text{Proj } E = \text{Proj } E' = \text{Proj } E'_s = (y = 0).$$

Comme $(y = 1) \cdot \zeta E' = M^1 \in (eG^\delta)$, on a $\zeta E' \overline{\in} (F_\sigma)$, d'autre part $\zeta E' \in (G\ )$ d'après le tableau 1, donc $\zeta E' \in (eG_\delta)$. Donc l'estimation de ζ de $\widetilde{G}$—qui est (G_δ)—est exacte.

De même d'après $E' \in (\widetilde{G})$ et $(y = 1) \cdot \gamma\zeta E' = N^1 \in (eF_\sigma)$ on vérifie l'exactitude de l'estimation de $\gamma\zeta$ de $\widetilde{G}$—qui est (F_σ).

Pour un ensemble $E \in (G)$, on a $(y = 0) \cdot \theta E = M \in (eG_\delta)$ et $(y = 0) \cdot \gamma'\zeta E = (y = 0) \cdot \updownarrow \zeta E = N \in (eF_\sigma)$. Donc les estimations de θ, $\gamma'\zeta$ et $\updownarrow\zeta$ sont exactes—(G_δ), (F_σ) et (F_σ) respectivement.

Maintenant posons

$$D_n = (y = n) \cdot \updownarrow N_n,$$
$$D'_n = (y = n/(n+1)) \cdot \updownarrow N_n \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdot);$$

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} D_n, \qquad D' = \sum_{n=1}^{\infty} D'_n + (y = 1),$$

et désignons par D_s et D'_s les ensembles symétriques aux ensembles D et D' resp. par rapport à l'axe OX. On a

$$D' \text{ et } D'_s \in (F)\,;\ D \in (\underset{\sim}{F}),\ \ D_s \in (\widetilde{F}),$$

$$\text{Proj } D' = \text{Proj } D'_s = (y = 0).$$

Et pour les ensembles D' et D'_s qui sont $(\overline{\underline{F}})$ on a

$$(y = 1) \bullet \beta D' = N^1 \in (eF_\sigma),\ \ (y = -1) \bullet \gamma'\zeta D' = N^{-1} \in (eF_\sigma),$$
$$(y = -1) \bullet \delta D'_s = (y = -1) \bullet \eta D'_s = (y = -1) \bullet \zeta D'_s = M^{-1} \in (eG_\delta).$$

Il en résulte l'exactitude des estimations de β et $\gamma'\zeta$ d'ensemble $(\overline{\underline{F}})$ — qui sont (F_σ)—et des estimations de δ, η et ζ d'ensemble $(\overline{\underline{F}})$—qui sont (G_δ).

L'estimation de $\updownarrow\zeta$ de $\widetilde{F}$ est exacte—c.-à-d., (F_σ)—car, pour l'ensemble $D_s \in (\widetilde{F})$ on a

$$(y = 0) \bullet \updownarrow \zeta D_s = N \in (eF_\sigma).$$

Si nous posons $L = (y = 1) + D_s$ on a $\text{Proj}\, L = (y = 0)$ et $L \in (\underset{\sim}{\widetilde{F^*}})$. L'estimatoin de α de $\widetilde{F^*}$ est exacte—(F_σ)—puisque

$$(y = 0) \bullet \alpha L = N \in (eF_\sigma).$$

Tout ensemble linéaire (eA_1) $[(eA_n)$ $(n = 2, 3, \cdots)]$ dont l'existence est connue, est considéré comme la projection d'un ensemble $(\widetilde{G_\delta})$ $[(\widetilde{C_{n-1}})]$ qui est situé entre deux droites $y = 0$ et $y = -1$. Ajoutons à cet ensemble plan la droite $(y = 1)$ ou $(y = -1)$ et les désignons par X et X' respectivement, on a Proj X = Proj $X' = (y = 0)$ et $X, X' \in (\widetilde{B}^*_1)$ $[(\widetilde{B}^*_n)$ $(n = 2, 3, \cdots)]$. Les ensembles $(y = 0) \bullet \alpha X = (y = 0) \bullet \beta X$ et $(y = -1) \bullet \gamma'\zeta X'$ étant (eA_1) $[(eA_n)]$, les estimations de α, β et $\gamma'\zeta$ d'ensemble $(\widetilde{B}^*_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ sont exactes—c.-à-d., (A_n).

2. Soit M un ensemble $(eF_{\sigma\delta})$ situé sur l'axe OX, et posons

$$M^1 = (y = 1) \bullet \updownarrow M, \qquad N = (y = 0) - M, \qquad N^1 = (y = 1) \bullet \updownarrow N.$$

On a alors $M^1 \in (eF_{\sigma\delta})$ et $N^1 \in (eG_{\delta\sigma})$.

D'après W. Sierpiński [9] il existe une suite d'ensembles fermés F_n, $n = 1, 2, \cdots$, sur l'axe OX tels que

$$M = \lim\sup F_n\,,$$

où l'on peut poser $F_1 = (y = 0)$. Soient

$$E_n = (y = n) \bullet \updownarrow F_n,$$
$$E'_n = \left(y = \frac{n}{n+1}\right) \bullet \updownarrow F_n \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$
$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n, \qquad E' = \sum_{n=1}^{\infty} E'_n\,,$$

on a aisément

$$\text{Proj } E = \text{Proj } E' = (y = 0), \qquad E \in (F^*), \qquad E' \in (\widetilde{F^*_\sigma}).$$

Et comme nous avons

$$(y=0)\cdot\theta E = M \in (eF_{\sigma\delta}),$$
$$(y=0)\cdot \updownarrow \zeta E = (y=0)\cdot\gamma'\zeta E = N \in (eG_{\delta\sigma}),$$

les estimations de θ, $\updownarrow\zeta$ et $\gamma'\zeta$ d'un ensemble F^* sont exactes $(F_{\sigma\delta})$, $(G_{\delta\sigma})$ et $(G_{\delta\sigma})$ respectivement.

Les estimations de $\gamma\zeta$ et ζ de $\widetilde{F}^*_\sigma$ —qui sont $(G_{\delta\sigma})$ et $(F_{\sigma\delta})$ resp. — sont aussi exactes, on a en effet

$$(y=1)\cdot\gamma\zeta E' = N^1 \in (eG_{\delta\sigma}),$$
$$(y=1)\cdot\zeta E' = M^1 \in (eF_{\sigma\delta}).$$

3. i) Soit M un ensemble linéaire (eF_ρ) situé sur l'axe OX, il existe deux ensembles linéaires ouverts M_1 et M_2 sur le même axe tels que $M = M_1 - M_2$, $M_1 \supset M_2$. En posant $N_1 = (y=0) - M_1$, et $N_2 = (y=0) - M_2$ on a N_1 et $N_2 \in (F)$, $M = N_2 - N_1$ et $N_2 \supset N_1$.

Posons

$$E_1 = (-2<y<-1)\cdot\updownarrow M_1, \qquad E_2 = (1<y<2)\cdot\updownarrow M_2,$$
$$D_1 = (y=1)\cdot\updownarrow N_1, \qquad D_2 = (y=-1)\cdot\updownarrow N_2,$$
$$E = E_1 + E_2, \qquad D = D_1 + D_2,$$

on a $E \in (\widetilde{G})$ et $D \in (\widetilde{F})$. D'autre part on voit aisément que

$$(y=0)\cdot\gamma E = (y=0)\cdot\delta E = (y=0)\cdot\gamma D = (y=0)\cdot\gamma\zeta D = M \in (eF_\rho).$$

il en résulte l'exactitude des estimations de γ, δ de $\widetilde{G}$ et celle de γ, $\gamma\zeta$ de $\widetilde{F}$—qui sont tous (F_ρ).

ii). De la même manière on conduit l'exactitude des estimations de γ, δ et $\gamma\zeta$ d'ensemble $(\widetilde{F})$—qui sont $(F_{\sigma\rho})$—ainsi que celle d'ensemble $(\widetilde{B}_n)$— qui sont $(A_{n\rho})$. Nous ne le montrerons que pour $\widetilde{F}$ puisqu'il est évident pour $\widetilde{B}_n$. Soit M un ensemble $(eF_{\sigma\rho})$ situé sur l'axe OX. Il existe deux ensembles M_1 et M_2 tels que $M = M_1 - M_2$, $M_1 \supset M_2$, $M_1 \in (F_\sigma)$ et $M_2 \in (F_\sigma)$. S'il existe deux ensembles $(\widetilde{F})$ E_1 et E_2 dans les semi-plans $(y \leqq -1)$ et $(y \geqq 1)$ respectivement tels que Proj $E_1 = M_1$ et Proj $E_2 = M_2$, alors il ne faut que considérer l'ensemble $(\widetilde{F})$ $E = E_1 + E_2$ par la méthode précédente. Tout revient donc à démontrer que tout ensemble (F_σ), soit N, est une projection d'un ensemble $(\widetilde{F})$ situé dans le semi-plan $(y \geqq 1)$ [$(y \leqq -1)$].

En effet, il existe, d'après W. Sierpiński [9], une suite d'ensembles fermés F_n situés sur l'axe OX telle que $N = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$ et que chaque point de N est contenu dans au plus deux F_n de la suite. Pour cette suite posons

$$D_n = (y=n)\cdot\updownarrow F_n \qquad [D_n = (y=-n)\cdot\updownarrow F_n] \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$
$$D = \sum_{n=1}^{\infty} D_n.$$

On a $D \subset (y \geqq 1)$ [$D \subset (y \leqq -1)$], Proj $D = N$ et $D \in (F)$. Pour tout point x sur l'axe OX l'ensemble $D\cdot P_x$ contient au plus deux points, donc on a $D \in (\widetilde{F})$, c. q. f. d.

iii) Soit $\{r_n\}$ une suite formée de tous les nombres rationnels. Désignons par R l'ensemble de tous les points $(r_n,\ 0)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, et par E_1 celui de tous les points $(r_n,\ n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Posons

$$E = E_1 + (y = -1),\ J = (y = 0) - R,\ J^{-1} = (y = -1) \cdot \updownarrow J.$$

On a facilement $R \in (eF_\sigma), J \in (eG_\delta), J^{-1} \in (eG_\delta)$, Proj $E = (y = 0)$ et $E \in (\widetilde{F^*})$. En vertu de la relation facile

$$(y = 0) \cdot \gamma E = (y = 0) \cdot \gamma\zeta E = J \in (eG_\delta).$$

on vérifie l'exactitude des estimations de γ, $\gamma\zeta$ d'ensemble $\widetilde{F^*}$—c. -à-d., (G_δ).

De même, en considérant la relation $(y = -1) \cdot \eta E = J^{-1}$ on peut prouver l'exactitude de l'estimations de η d'ensemble $\widetilde{B}^*_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$—qui est (C_n).

Si nous posons $D = \{\updownarrow (y = 0)\} - \uparrow E_1$ l'ensemble D est (G) et il jouit des relations: $\theta D = \updownarrow J \in (eG_\delta)$, $\zeta D = E_1 \in (F)$, $\gamma'\zeta D \in (eF_\sigma)$ et $\updownarrow \zeta D \in (eF_\sigma)$.

iv). Soit M un ensemble $(eF_{\sigma\rho})$ situé sur l'axe OX. dont l'existence a été montrée par W. Sierpiński [8]. Il existe deux ensembles M_1 et M_2 qui sont (F_σ) et situés sur le même axe tels que $M = M_1 - M_2$, $M_1 \supset M_2$. Soit maintenant $E = \{(y = 1) \cdot \updownarrow M_2\} + M_1 + (y = -1)$, on a aisément Proj $E = (y = 0)$ et $E \in (\widetilde{F^*_\sigma})$. L'ensemble $M = (y = 0) \cdot \eta E$ étant $(eF_{\sigma\rho})$, l'esitmation de η d'ensemble $\widetilde{F}^*_\sigma$— qui est $(F_{\sigma\rho})$—est exacte. De même on voit l'exactitude de l'estimation de η d'ensemble $\widetilde{A}^*_n$—qui est $(A_{n\rho})$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

4. Soit M un ensemble $(eA_{1\rho})$ situé sur l'axe OX (Voir [8]). Il existe deux ensembles M_1 et M_2 qui sont (A_1) et tels que $M = M_1 - M_2, M_1 \supset M_2$. On voit facilement que les ensembles M_1 et M_2 sont (eA_1).

Soient E^n_1 $(n = 1, 2, \cdots)$ des ensembles plans (G_δ) quis ont contenus dans le domaine $\left(-\frac{1}{n} < y < -\frac{1}{n+1}\right)$ et dont les projections coïncident avec M_1. Soient E^n_2 $(n = 1, 2, \cdots)$ des ensembles plans (G_δ) qui sont contenus dans $(n < y < n + 1)$ et dont les projections coïncident avec M_2. Posons

$$E^0 = E^1_1 + \sum_{n=1}^{\infty} E^n_2, \qquad E^2 = (y = -1) + E^0,$$

$$E^1 = (y = -1) + \sum_{n=1}^{\infty} E^n_1 + E^1_2,$$

on a alors

$$\text{Proj } E^1 = \text{Proj } E^2 = (y = 0),$$
$$E^0 \in (G_\delta), \qquad E^1 \in (\widetilde{B}^*_1), \qquad E^2 \in (B^*_1).$$

Si nous supposons que l'ensemble M est $(eA_{n\rho})$ $(n = 2, 3, \cdots)$ au lieu de $(eA_{1\rho})$, les ensembles M_1 et M_2 sont (eA_n), et

$$E^n_1 \in (C_{n-1}),\ E^n_2 \in (C_{n-1}),$$
$$E^0 \in (C_{n-1}),\ E^1 \in (\widetilde{B}^*_n)\ E^2 \in (B^*_n), \qquad (n = 2, 3, \cdots).$$

Pour deux ensembles $E^0 \in (B_n)$ et $E^1 \in (\widetilde{B}^*_n)$ on a

$$(y = 0) \cdot \updownarrow \zeta E^0 = (y = 0) \cdot \zeta E^1 = M \in (eA_{n\rho}),$$

donc les estimations de $\updownarrow\zeta$ de B_n et ζ de $\widetilde{B}_n^*$ — qui sont $(A_{n\rho})$ — sont exactes $(n = 1, 2, \cdots\cdot)$.

Pour l'ensemble $E^2 \in (B_n^*)$, on voit facilement que

$$(y = 0) \cdot \theta E^2 = M_2 \in (eA_n),$$
$$(y = 0) \cdot \updownarrow\zeta E^2 = (y = 0) - M_2 \in (eC_n),$$
$$(y = -1) \cdot \gamma'\zeta E^2 = (y = -1) \cdot \updownarrow M \in (eA_{n\rho}).$$

Il en résulte que les estimations de θ, $\updownarrow\zeta$ et $\gamma'\zeta$ d'ensemble (B_n^*)—(A_n), (C_n) et $(A_{n\rho})$ resp. —sont exactes $(n = 1, 2, \cdot\cdot)$.

5. Désignons par E la courbe définie par l'équation $y = \tan x$ $\left(-\pi/2 < x \leqq 0\right)$, et soit

$$M = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}\left[-\frac{\pi}{2} < x \leqq 0,\ y = 0\right].$$

Évidemment on a $E \in (\widetilde{F}^*)$. $M \overline{\in} (G)$ et $M \overline{\in} (F)$. Comme

$$(y = 0) \cdot \updownarrow\zeta E = M,$$

on peut affirmer l'exactitude de l'estimation de $\updownarrow\zeta$ d'ensemble $\widetilde{F}^*$— c.-à-d., $(B_{1,1})$.

Ainsi l'exactitude de tous les estimations de notre tableau est complètement démontrée.

REMARQUE. M^elle^ S. Braun [1] a construit un ensemble S qui est (K) et possède deux points communs avec P_r pour tout nombre rationnel r, $0 \leqq r \leqq 1$, et un seul point commun avec P_j pour tout nombre irrationnel j, $0 < j < 1$, et tel qu'aucun uniformisateur n'est (F_σ), donc il est (eG_δ). Posons

$$T = \updownarrow S - \uparrow S - P_0 - P_1.$$

Il est évident que $T \in (\widetilde{G})$. Chacun des deux ensembles $\zeta S = \eta S = S \cdot \delta S$ et $\zeta' S$—dont le dernier s'obtient en ajoutant deux points à ζT—est un uniformisateur de l'ensemble S. Donc trois ensembles $\zeta S\ (= \eta S)$, δS et ζT sont (eG_δ). De même $\delta' S \in (eG_\delta)$. Comme on a $\beta S = \updownarrow S - \delta' S$ et $\updownarrow S \in (F)$, l'ensemble βS appartient à la classe (eF_σ), et les ensembles βS et $\gamma\zeta T$ ne diffèrent que deux semi-droites qui sont situées respectivement sur P_0 et P_1, on a donc $\gamma\zeta T \in (eF_\sigma)$. De même on a $\beta' S \in (eF_\sigma)$, mais cet ensémble n'est autre chose que l'ensemble $\gamma'\zeta S$. Ainsi on voit que les ensembles donnés par M^elle^ S. Braun forment des exemples intéressants qui montrent l'exactitude des estimations de β, δ, η, ζ et $\gamma'\zeta$ d'ensemble (K) ou $(\overline{F})$, et des estimations de ζ et $\gamma\zeta$ d'ensemble $(\widetilde{G})$.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. BRAUN. Sur l'uniformisation des ensembles fermés, Fund. Math., 28 (1937), 214-218.
[2] F. HAUSDORFF, Mengenlehre, (1935).
[3] N. LUSIN, Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles, C. R. Acad. Sci. Paris, 190 (1930), 349-351.
[4] N. LUSIN, Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles,

Mathematica, 4 (1930), 54–66.
[5] N. LUSIN, Quelques remarques sur les ensembles qui sont des complémentaires analytiques, Mathematica, 10(1935), 70–80.
[6] N. LUSIN, Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris (1930).
[7] S. MAZURKIEWICZ, Sur une propriété des ensembles $C(A)$, Fund. Math., 10(1927), 172–174.
[8] W. SIERPIŃSKI, Sur l'existence de diverses classes d'ensembles, Fund. Math., 14 (1929) 82–91.
[9] W. SIERPIŃSKI, Sur une propriété des ensembles $F_{\sigma\delta}$, Fund. Math., 6(1924), 21-23.

L'INSTITUT de MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ de TÔHOKU, SENDAI.