UEBER ADDIERBARE INTERVALLFUNKTIONALE

Hŭgo Hadwiger

(Received November 8, 1951)

Eine Punktmenge k-dimensionalen euklidischen Raumes, die bezogen auf ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem durch die Ungleichungen

$$\alpha_i \leq X_i \leq \beta_i, \quad \alpha_i < \beta_i\,; i = 1, 2, .., k \tag{1}$$

charakterisiert werden kann, ist ein eigentliches, abgeschlossenes und orientiertes Intervall A; im Folgenden sprechen wir nur kurz von einem *Intervall* A. Die positiven Werte $a_i = \beta_i - \alpha_i$ heissen *Kantenlängen* von A. Zwei Intervalle A und A' sind *translationsgleich*, symbolisch durch $A \cong A'$ ausgedrückt, wenn die entsprechenden Kantenlängen gleich sind, sodass $a_i = a'_i$ ausfällt. Unter einer *Zerlegung* von A verstehen wir eine Darstellung

$$A = \sum_1^n A_\nu\,; \quad (A_\nu A_\mu)^0 = 0, \quad \nu \neq \mu \tag{2}$$

des Intervalls A als Vereinigungsmenge endlich vieler Intervalle A_ν, die aber paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben, sodass der offene Kern $(A_\nu A_\mu)^0$ eines Durchschnitts $A_\nu A_\mu$ für $\nu \neq \mu$ leer ist.

Zwei Intervalle A und B heissen *zerlegungsgleich*, symbolisch durch $A \sim B$ ausgedrückt, wenn es zwei Zerlegungen gibt:

$$A = \sum_1^n A_\nu\,, \simeq B = \sum_1^n B_\nu\,; \simeq A_\nu \simeq B_\nu\,, \tag{3}$$

durch die also A und B in paarweise translationsgleiche Intervalle A_ν und B_ν zerlegt werden.

Es sei $\Phi(A)$ ein über der Klasse aller Intervalle A definiertes Funktional mit den beiden nachstehenden Eigenschaften:

$$\Phi(A) = \Phi(A') \text{ für } A \simeq A'\,; \tag{4}$$

$$\Phi(A) = \sum_1^n \Phi(A_\nu) \text{ für } A = \sum_1^n A_\nu. \tag{5}$$

$\Phi(A)$ ist also ein *translationsinvariantes* und *addierbares Intervallfunktional*. In der vorliegenden Note will ich die Mannigfaltigkeit dieser Funktionale näher beschreiben. Unser Problem soll also darin bestehen, die allgemeine Lösung von (4) und (5) zu charakterisieren; hierbei muss sich offenbar der elementare Intervallinhalt als partikuläre Lösung ergeben.

Wir gehen von einer Hamelschen Basis[1] ω_τ für die reellen Zahlen aus, wobei τ einen Hamelschen abstrakten Index bedeutet. Die gesamte bekannt-

1) G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Math. Ann. 60(1905), 459–462. Die Existenz der Hamelschen Basis setzt die Gültigkeit des Auswahlaxioms der Mengenlehre voraus!

lich überabzählbare Indexmenge wollen wir mit T bezeichnen. Es lässt sich dann jede reelle Zahl a wie bekannt auf eine und nur eine Weise in der Form

$$a = \sum_T p_\tau(a)\omega_\tau \tag{6}$$

darstellen, wobei die Entwicklungskoeffizienten $p_\tau(a)$ eindeutig durch a bestimmte rationale Zahlen sind. Die Summation erstreckt sich über die ganze Indexmenge T; da aber fast alle $p_\tau(a)$ verschwinden, reduziert sich diese effektiv nur auf eine endliche Summe.

Für ein Intervall A mit den Kantenlängen a_i bilden wir nun

$$\Phi(A) = \sum_{T_1} \cdot\cdot \sum_{T_k} C(\tau_1, \ldots, \tau_k) p_{\tau_1}(a_1) \ldots p_{\tau_k}(a_k), \tag{7}$$

wobei $C(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ eine willkürlich wählbare Funktion der k Hamelschen Indices $\tau_1, \ldots, \tau_k$ bezeichnet, die man sich als k Veränderliche denken soll. Die Summation erstreckt sich formal über die Mannigfaltigkeit aller k-Tupel $\tau_1 \in T_1, \ldots, \tau_k \in T_k$, reduziert sich aber aus den oben erörterten Gründen auf eine endliche Summe.

Es gilt nun der folgende

SATZ I. *Das durch Ansatz* (7) *gebildete Funktional ist das allgemeinste translationsinvariante und addierbare Intervallfunktional.*

BEWEIS. 1. Wir zeigen zunächst, dass das Intervallfunktional (7) eine Lösung von (4) und (5) darstellt. Da diese Lösungen eine lineare Mannigfaltigkeit bilden, genügt es offenbar, zu zeigen dass dies Behauptung bereits für die partikulären Funktionale

$$\Phi(A) = p_{\tau_1}(a_1) \ldots p_{\tau_k}(a_k) \tag{8}$$

zutrifft. Die Translationsinvarianz (4) ist trivial. Die Addierbarkeit (5) ergibt sich leicht auf Grund der offenbaren Tatsache, dass für die Hamelschen Koeffizienten die Cauchysche Funktionalgleichung

$$p_\tau(a + b) = p_\tau(a) + p_\tau(b) \tag{9}$$

erfüllt ist. Für $n = 2$ wird nämlich (5) nach elementarer Erwägung direkt mit (9) ablesbar. Es sei nun $m > 2$ und die Richtigkeit von (5) sei für alle $n \leq m - 1$ schon erwiesen. Es sei jetzt $n = m$. Aus elementargeometrischen Gründen lässt sich eine Zerlegung $A = A' + A''$ so angeben, dass von den n formal gebildeten Durchschnittsintervallen $A'A_\nu = A'_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$ wenigstens ein Intervall A'_ν leer oder uneigentlich ausfällt; das analoge trifft dann notwendigerweise auch für die Durchschnittsintervalle $A''A_\nu = A''_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$ zu. Nach der induktiven Voraussetzung muss deshalb

$$\Phi(A') = \sum_1^m \Phi(A'_\nu) \text{ und } \Phi(A'') = \sum_1^m \Phi(A''_\nu)$$

gelten, da bei den beiden Zerlegungen von A' und A'' weniger als m eigentliche Teilintervalle vorkommen. Mit $A_\nu = A'_\nu + A''_\nu$ schliesst man jetzt der Reihe nach

$$\Phi(A) = \Phi(A') + \Phi(A'') = \sum_1^m [\Phi(A'_\nu) + \Phi(A''_\nu)] = \sum_1^m \Phi(A_\nu),$$

w. z. b. w.

2. Wir zeigen jetzt, dass sich jede Lösung von (4) und (5) in der Form (7) darstellen lässt. Dies ergibt sich leicht dadurch, dass man von den k Kantenlängen zunächst nur eine variabel annimmt. Es sei $\Phi(A) = f(a_1, \ldots, a_k)$ und man setze $f_i(a) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_k)$. Diese Ansätze sind im Hiblick auf (4) erlaubt. Nach (5) ergibt sich nun

$$f_i(a + b) = f_i(a) + f_i(b), \tag{10}$$

und nach der bekannten Darstellung der Cauchy-Hamelschen Lösungen dieser Funktionalgleichung gilt

$$f_i(a) = \sum_T C_i(\tau)p_\tau(a). \tag{11}$$

Die Gültigkeit von (11) für jedes $i=1, 2, \ldots, k$ impliziert die Darstellung (7), w. z. b. w.

Setzen wir speziell

$$C(\tau_1, \ldots, \tau_k) = \omega_{\tau_1} \cdots \omega_{\tau_k}, \tag{12}$$

so resultiert mit (7) im Hinblick auf (6)

$$\Phi(A) = a_1 \cdots a_k, \tag{13}$$

womit sich der elementare Intervallinhalt als spezielles translationsinvariantes und addierbares Funktional ergibt. Innerhalb der Mannigfaltigkeit aller Funktionale dieser Art ist dieses klassische Funktional stark ausgezeichnet; es lässt sich beispielsweise durch Stetigkeits- oder Beschränktheitsforderungen abgesehen von unwesentlicher Normierung leicht als einzig aussondern.

Eine einfache Folgerung von (4) und (5) ist offenbar

$$\Phi(A) = \Phi(B) \text{ für } A \sim B, \tag{14}$$

eine Bedingung also, welche für eine bestehende Zerlegungsgleichheit *notwendig* ist; sie ist aber auch *hinreichend*. Wir beweisen den folgenden

SATZ II. *Zwei Intervalle A und B sind dann und nur dann zerlegungsgleich, wenn für alle translationsinvarianten und addierbaren Intervallfunktionale die Bedingung* (14) *erfüllt ist.*

BEWEIS. Die Aussage "nur dann" ist trivial; es genügt die Aussage "dann" nachzuweisen. Es reicht aus, das Erfülltsein der Bedingungen (14) für die mit Ansatz (8) gegebenen partikulären Intervallfunktionale vorauszusetzen. Für die beiden Intervalle A und B mit den Kantenlängen a_i und b_i gelte also

$$p_{\tau_1}(a_1) \cdots p_{\tau_k}(a_k) = p_{\tau_1}(b_1) \cdots p_{\tau_k}(b_k). \tag{15}$$

Wir betrachten zunächst nur den Index τ_i als variabel. Setzen wir

$p_i = [p_{\tau_1}(a_1)\cdots p_{\tau_k}(a_k)]^*$ und $q_i = [p_{\tau_1}(b_1)\cdots p_{\tau_k}(b_k)]^*$, wobei der angebrachte Stern bedeuten soll, dass der Faktor zum Index i fehlen soll, so lässt sich für (15) schreiben

(16) $$p_{\tau_i}(p_i a_i) = p_{\tau_i}(q_i b_i).$$

Da dies für alle Hamelschen Indices τ_i gilt, folgt damit

(17) $$p_i a_i = q_i b_i \text{ oder } a_i/b_i = r_i \text{ (rational).}$$

Mit $r_i = n_i/m_i$, (n_i m_i natürliche Zahlen) hat man $a_i/n_i = b_i/m_i = h_i$. Durch geeignete Schnittführungen parallel zu den $(k-1)$-dimensionalen Hauptebenen des Koordinatensytems lässt sich das Intervall A in $N = n_1\cdots n_k$, und das Intervall B in $M = m_1\cdots m_k$ kleinere translationsgleiche Intervalle mit den Kantenlängen h_i zerlegen. Aus (14) folgt noch mit Einsatz von (13), dass A und B inhaltsgleich sind, sodass

(18) $$a_1\cdots a_k = b_1\cdots b_k \text{ oder } r_1\cdots r_h = 1 \quad \text{ausfällt.}$$

Hieraus folgt $N = M$ und damit $A \sim B$, w.z.b.w.

KOROLLAR 1. *Zwei Intervalle A und B mit den Kantenlangen a_i und b_i sind dann und nur dann zerlegungsgleich, wenn $a_i/b_i = r_i$ (rational) und $r_1\cdots r_k = 1$ ist.*

Dies folgt leicht aus der vorstehenden Beweisführung, denn aus einer bestehnden Zerlegungsgleichheit $A \sim B$ haben wir notwendig auf (14) und hieraus (17) und (18) geschlossen; andererseits aus (17) und (18) auf $A \sim B$.

Dieser mit Korollar 1 ausgedrückte Sachverhalt ist bekannt. Er verallgemeinert einen klassischen Satz von *M. Dehn*[2] über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke. Analoges trifft zu für die Behauptung von

KOROLLAR 2. *Ein Intervall A mit den Kantenlängen a_i lässt sich dann und nur dann in Würfel zerlegen, wenn $a_i/a_{i+1} = r_i$ (rational) und $r\cdots r_k = 1$ ist; hierbei soll $a_{k+1} = a_1$ gesetzt werden (zyklisch geordnet).*

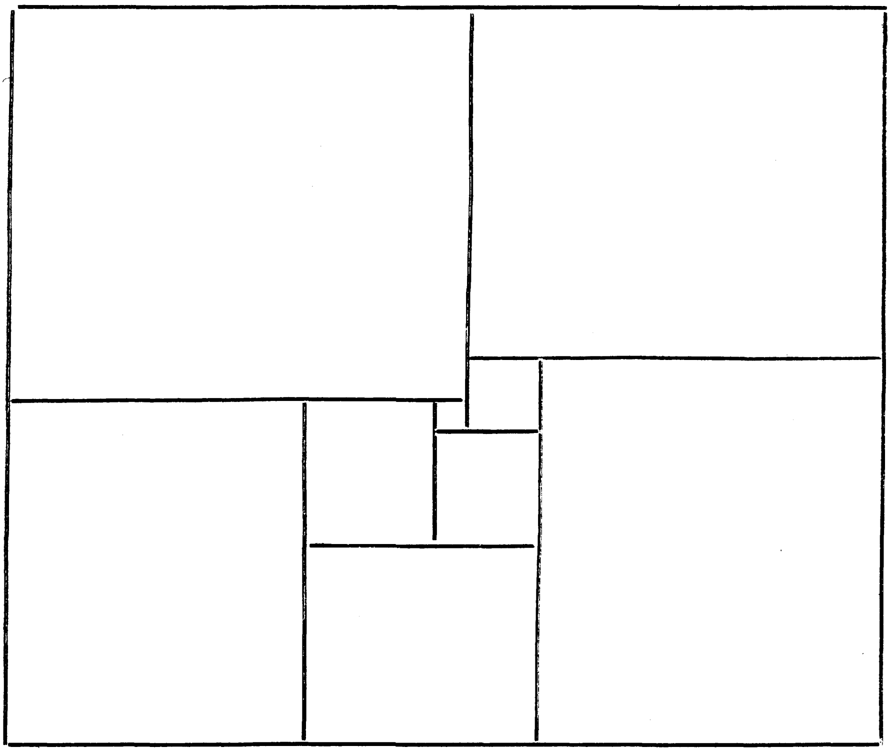
Dies folgt mühelos auf die folgende Weise: Wir betrachten eine Drehung D, welche einen Punkt P in $\bar{P}$ überführe nach der folgenden Vorschrift $\bar{x}_i = x_{i+1}$ $(x_{k+1} = x_1)$. Ein Intervall mit den Kantenlängen a_i wird durch D übergeführt in das Intervall $\bar{A}$ mit den Kantenlängen $\bar{a}_i = a_{i+1}$. Da nun aber ein Würfel durch D in sich übergeführt wird, müssen die beiden Intervalle A und $\bar{A}$ offensichtlich zerlegungsgleich sein, wenn A in Würfel zerlegt werden kann. Nach Korollar 1 muss demnach $a_i/\bar{a}_i = r_i$ sein, wo $r_1\ldots r_k = 1$ ist, w.z.b.w.

Die beiden letzten Aussagen haben die Schlussfolgerung gemeinsam, dass nicht triviale Zerlegungsverhältnisse höchstens dann möglich sind, wenn auch die entsprechenden trivialen realisierbar sind. Unsere Abbildung

2) Math. Ann. 57 (1903), 314-332. Die Beweisführungen sind kombinatorischgeometri scher Natur und relativ umständlich.

zeigt eine bekannte Zerlegung eines Rechtecks in 9 inkongruente Quadrate als Beispiel einer nicht trivialen Zerlegung. Nach dem oben gefolgerten Dehnschen Satz muss das Seitenverhältnis eines Rechtecks, das eine solche Zerlegung zulässt, rational sein; dass umgekehrt jedes Rechteck mit rationalem Seitenverhältnis eine Zerlegung in inkongruente Quadrate gestattet, wurde von *R. Sprague*[3] bewiesen. Dagegen ist für $k > 2$ eine Zerlegung eines Intervalls in inkongruente Würfel nicht mehr möglich; eine Beweisskizze dieses bekannten Sachverhaltes findet sich beispielsweise bei *L. R. rooks, C. A. BB. Smith, A. H. Stone,* und *W. T. Tutte*[4].

Abbildung



Zerlegung eines Rechtecks 61/69 in 9 Quadrate mit den Seitenlängen 2, 5, 7, 9, 16, 25, 28, 33, 36

BERN, SCHWEIZ.

3) Ueber die Zerlegung von Rechtecken in lauter verschiedene Quadrate, Journal für die reine und angewandte Math. 182 (1940), 60-64; ferner: Zur Abschätzung der Mindestzahl inkongruenter Quadrate, die ein gegebenes Rechteck ausfüllen. Math. Zeitschrift 46 (1940), 460-471.

4) The dissection of rectangles into squares, Duke Math. Journ. 7 (1940) 312-340; insb. 339/40. Eines der interessantesten Ergebnisse dieser Abhandlung ist eine Zerlegung eines Quadrates in 26 inkongruente Quadrate. R. SPRAGUE [Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in lauter verschiedene Quadrate. Math. Zeitschrift 45 (1939) 607-608] hatte eine Zerlegung in 55 Teilquadrate entdeckt.