SUR LA LIMITATION DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS INTÉGRALES DE VOLTERRA

TOKUI SATŌ

(Received July 20, 1952)

Récemment MM. Z. Butlewski et T. Wazewski[1] ont obtenu des résultats intéressants relatifs à la limitation des intégrales d'équations différentielles linéaires. On peut aisément étendre ceux de M. Z. Butlewski à un système d'équations intégrales de Volterra, c'est ce que nous allons montrer.

LEMME. *Soient $\bar{\omega}(x)$ et $f(x)$ des fonctions dérivables dans l'intervalle I: $a \leq x < +\infty$*[2] *et $K(x,t,u)$ une fonction continue dans un domaine $\mathfrak{D}$ des variables x, t, u, sa dérivée partielle $K_x'(x,t,u)$ étant continue et ≥ 0 dans le même domaine. Supposons que l'on ait les inégalités*

$$K_x'(x,t,u) \leq K_x'(x,t,\bar{u})$$

pour $u < \bar{u}$, (x,t,u), $(x,t,\bar{u}) \in \mathfrak{D}$, et

$$\bar{\omega}'(x) > f'(x) + K(x,x,\bar{\omega}(x)) + \int_a^x K_x'(x,t,\bar{\omega}(t))\,dt \tag{1}$$

dans I.

Si l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t,u(t))\,dt$$

admet une solution $u = u(x)$ dans I, l'inégalité

$$\bar{\omega}(a) > f(a), \tag{2}$$

entraîne l'inégalité

$$\bar{\omega}(x) > u(x) \tag{3}$$

dans I.

L'inégalité (2) entraîne (3) dans un intervalle assez petit $a \leq x \leq a+\delta$. Si l'on n'avait pas l'inégalité (3) dans I, il existerait une valeur $\Delta\,(<+\infty)$ telle que (3) subsiste dans $a \leq x < \xi$ et

$$\bar{\omega}(\xi) = u(\xi) \qquad (\xi = a + \Delta).$$

On aurait donc

---

1) Z. BUTLEWSKI, Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles linéaires ordinaires, Studia Math., 10(1948), 40-47.

T. WAZEWSKI, Sur la limitation des intégrales des systèmes d'équations différentielles lineares ordinaires, ibid. 48-58.

2) On peut remplacer I par $I_r : a \leqq x \leqq a + r$.

$$\omega'(\xi) \leq u'(\xi) = f'(\xi) + K(\xi, \xi, \bar{\omega}(\xi)) + \int_a^\xi K'_x(\xi, t, u(t))dt$$

contrairement à (1). C. Q. F. D.

Considérons le système des équations intégrales linéaires

$$u_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x a_{jk}(x,t) u_k(t) dt + b_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

où les fonctions $a_{jk}(x,t)$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$ sont continues dans le domaine $D: a \leq t \leq x < +\infty$, et $b_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ bornées et continues dans I. D'après le théorème d'existence le système (4) admet une seule solution $u_j = u_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ dans I.

Posons

$$\max_{j,k} |a_{jk}(x,t)| \leq A(x, t), \qquad \sum_{j=1}^{n} |b_j(x)| \leq B, \tag{5}$$

ou les fonctions $A(x, t)$ ainsi que $A'_x(x, t)$ sont continues et non négatives dans D, et B une constante. On a alors

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j(x)| \leq B + \int_a^x A(x, t) \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j(t)| \right) dt.$$

$\sum_{j=1}^{n} |u_j(x)|$ est donc une solution continue dans I de l'inéquation intégrale

$$U(x) \leq B + \int_a^x A(x, t) U(t) dt.$$

D'après les théorèmes de comparaison[3], on a l'inégalité

$$U(x) \leq \bar{U}(x)$$

dans I, $\bar{U} = \bar{U}(x)$ étant la solution de l'équation intégrale linéaire

$$\bar{U}(x) = B + \int_a^x A(x, t) \bar{U}(t) dt.$$

Soit r une constante positive donnée à l'avance. Posons

$$\bar{\omega}_\varepsilon(x) = (B + \varepsilon) \exp\left(\int_a^x (A(x, t) + \varepsilon)\, dt \right),$$

ε étant une constante positive arbitraire. On a alors

$$\bar{\omega}_\varepsilon(a) > B,$$

$$\bar{\omega}'_\varepsilon(x) = (A(x, x) + \varepsilon)\, \bar{\omega}_\varepsilon(x) + \bar{\omega}_\varepsilon(x) \int_a^x A'_x(x, t)\, dt$$

3) Je publierai un autre mémoire : Sur l'équation intégrale non linéaire de Volterra, dans lequel je démontrerai ces théorèmes.

dans l'intervalle $I_r : a \leq x \leq a + r$. D'après le lemme on a

$$\bar{U}(x) < \bar{\omega}_\varepsilon(x)$$

dans I_r. ε étant arbitraire, on a

$$\bar{U}(x) \leq B \exp\left(\int_a^x A(x,t)\, dt\right)$$

dans I_r, d'ou l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j(x)| \leq B \exp\left(\int_a^x A(x,t)\, dt\right) \tag{6}$$

dans I_r. Comme r est une constante positive arbitraire l'inégalité (6) subsiste dans I.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant.

THÉORÈME. *Soient* $a_{jk}(x,t)$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$ *des fonctions continues dans* D, *et* $b_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *des fonctions bornées et continues dans* I. *Supposons que les inégalités* (5) *subsistent respectivement dans* D *et dans* I, *où* $A(x,t)$ *et sa dérivée partielle* $A'_x(x,t)$ *sont continues et non négatives dans* D *et* B *désigne une constante. Alors on a l'inégalité* (6) *dans* I, $u_j = u_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *désignant la solution de l'équation intégrale linéaire* (4).

Remarquons enfin que si l'on a en outre l'inégalité

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \int_a^x A(x,t)dt < +\infty,$$

la solution considérée est bornée.

5 mai, 1952,
L'UNIVERSITÉ DE KÔBE.