SUR UN THÉORÈME DE I. MIYADERA CONCERNANT LA REPRÉSENTATION DES FONCTIONS VECTORIELLES PAR DES INTÉGRALES DE LAPLACE.

SAMUEL ZAIDMAN

(Received August 16, 1959)

1. On doit à I. Miyadera [1], la suivante extension d'un théorème de D. V. Widder ([2]-pag. 315-316):

THÉORÈME. *Soit X un espace de Banach réflexif et $\vec{f}(s)$ une fonction vectorielle définie pour $s > 0$ et à valeurs dans X. Alors, pour l'existence d'une fonction vectorielle $\vec{\varphi}(t)$, définie pour $t \geqq 0$ à valeurs dans X, appartenant à la classe de Bochner $B_\infty([0, \infty]; X)$* (voir [3]-pag. 89), *et telle qu'on a la relation*

$$\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\vec{\varphi}(t)\, dt, \quad s > 0 \tag{1}$$

une condition nécessaire et suffisante est la suivante:

2) *$\vec{f}(s)$ est indéfiniment fortement dérivable pour $s > 0$.*

3) *L'ensemble des éléments de X de la forme $\frac{s^{k+1}}{k!}\vec{f}^{(k)}(s)$, $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$, $s > 0$, est borné.*

On doit aussi à Miyadera [1] un exemple d'une fonction vectorielle à valeurs dans l'espace X des transformations linéaires et bornées de $C[0,\infty]$ en soi même, qui satisfait aux conditions 2) et 3) ci-dessus et qui n'est pas la transformation de Laplace d'une fonction appartenant à $B_\infty([0, \infty]; X)$. Cela montre en particulier que l'espace X n'est pas réflexif mais ne donne pas d'autres informations sur cet espace. Le problème se pose alors si les conditions 2) et 3) ne sont néanmoins suffisantes pour avoir la représentation 1) dans les espaces de Banach qui sont faiblement complets par des suites. Dans ce qui suit nous allons montrer qu'il n'y est pas le cas.

2. Dans une annexe de [1], I. Miyadera observa qu'on peut démontrer le théorème énoncé ci-dessus en utilisant le théorème de Gelfand-Pettis sur la représentation des opérateurs linéaires et bornés de $L_1[0, \infty]$ à un espace de Banach réflexif X, par une intégrale de la forme: $Tg = \int_0^\infty g(t)\ \vec{\varphi}(t)\ dt$, où

$\vec{\varphi}(t) \in B_\infty([0, \infty]; X)$, pour toute $g \in L_1[0, \infty]$. Nous allons donner une quelque sorte de réciproque dans le suivant :

THÉORÈME 1. *Soit X un espace de Banach pour lequel les conditions 2) et 3) sont su santes pour que la fonction $\vec{f}(s)$ à valeurs dans X, qui les vérifie, soit la transformation de Laplace d'une fonction $\vec{\varphi}(t) \in B_\infty([0, \infty]; X)$ Alors, pour toute transformation linéaire et bornée de $L_1[0, \infty]$ à X, T, il existe une fonction $\vec{\varphi}(t)$ de la classe $B_\infty([0, \infty]; X)$ telle qu'on a $Tg = \int_0^\infty g(t)\, \vec{\varphi}(t)\, dt$ (intégrale de Bochner), pour toute fonction $g \in L_1[0, \infty]$.*

DÉMONSTRATION. Considérons la famille de fonctions dépendant du paramètre $s > 0$, $\{e^{-s\hat{t}}\}_{s>0}$, appartenant par rapport à $\hat{t}$ à l'espace $L_1[0, \infty]$. Soit la fonction vectorielle à valeurs dans X, qui est définie pour $s > 0$ par la formule $\vec{f}(s) = T[e^{-s\hat{t}}]$. Nous allons voir que la fonction $\vec{f}(s)$ vérifie les conditions 2) et 3). Pour cela, considérons aussi la fonction vectorielle à valeurs dans $L_1[0, \infty]$, qui est définie pour $s > 0$ par la formule $\vec{\psi}(s) \equiv e^{-s\hat{t}}$. Elle est indéfiniment *faiblement* dérivable pour $s > 0$ dans l'espace $L_1[0, \infty]$, car pour toute fonction $h(\hat{t})$ de $L_\infty[0, \infty]$ (dual de $L_1[0, \infty]$) on a $< h, \vec{\psi}(s) > = \int_0^\infty e^{-s\hat{t}} h(\hat{t})\, d\hat{t}$, qui est holomorphe dans le demi-plan réel $s > 0$ d'après le théorème classique sur l'analyticité de la transformation de Laplace. Mais un théorème de L. Schwartz et Grothendieck (voir [4]-pag. 145-147) nous donne alors que la fonction $\vec{\psi}(s)$ est aussi indéfiniment *fortement* dérivable pour $s > 0$. Vu la continuité de la transformation T, on a aussi que la fonction $\vec{f}(s) = T[\vec{\psi}(s)]$ est indéfiniment dérivable dans l'espace X, et on a $\vec{f}^{(k)}(s) = T[\vec{\psi}^{(k)}(s)]$, $s > 0$. On a aussi l'égalité : $\vec{\psi}^{(k)}(s) = (-1)^k \hat{t}^k e^{-s\hat{t}}$ car pour toute fonction $h(\hat{t}) \in L_\infty[0, \infty]$ on a :

$$< h, \vec{\psi}^{(k)}(s) > = \frac{d^k}{ds^k} < h, \vec{\psi}(s) > = \frac{d^k}{ds^k} \int_0^\infty h(\hat{t}) e^{-s\hat{t}}\, d\hat{t} =$$

$$\int_0^\infty h(\hat{t})\, (-1)^k \hat{t}^k e^{-s\hat{t}}\, dt = < h, (-1)^k \hat{t}^k e^{-s\hat{t}} >$$

et donc $\vec{\psi}^{(k)}(s) = (-1)^k \hat{t}^k e^{-s\hat{t}}$.

Nous avons obtenu donc que $\vec{f}(s) = T[e^{-s\hat{t}}]$ vérifie la condition 2) et qu'on a les relations : $\vec{f}^{(k)}(s) = T[(-1)^k \hat{t}^k e^{-s\hat{t}}]$. Maintenant, pour montrer que $\vec{f}(s)$

vérifie aussi la condition 3), c'est-à-dire que l'ensemble $\frac{s^{k+1}}{k!}\vec{f}^{(k)}(s)$, $s>0$, $k=0,1,\ldots\ldots$ est borné dans X, il sera suffisant, vu la continuité de T, démontrer que l'ensemble des éléments appartenant a $L_1[0,\infty]$

$$\frac{s^{k+1}}{k!}\vec{\psi}^{(k)}(s),\ k=0,1,\ldots\ldots,s>0$$

est borné dans cet espace. Mais cela résulte aisément car on a :

$$\frac{s^{k+1}}{k!}\vec{\psi}^{(k)}(s)=\frac{s^{k+1}}{k!}(-1)^k\hat{t}^k e^{-s\hat{t}}$$

et donc

$$\left\|\frac{s^{k+1}}{k!}\vec{\psi}^{(k)}(s)\right\|_{L_1[0,\infty]}=\int_0^\infty\frac{s^{k+1}}{k!}\hat{t}^k e^{-s\hat{t}}\,d\hat{t}=1.$$

Donc, la fonction $\vec{f}(s)=T[e^{-s\hat{t}}]$ vérifie les conditions 2) et 3). En utilisant l'hypothèse du théorème on obtient alors l'existence d'une fonction $\vec{\varphi}(t)\in B_\infty([0,\infty];X)$ telle que

$$T[e^{-s\hat{t}}]=\vec{f}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,\vec{\varphi}(t)\,dt \qquad \text{(intégrale de Bochner).}$$

Soit maintenant l'opérateur U défini sur $L_1[0,\infty]$ par l'égalité :

$$Ug=\int_0^\infty g(t)\,\vec{\varphi}(t)\,dt \qquad \text{(intégrale de Bochner).}$$

Il est linéaire et borné et coïncide avec T sur l'ensemble fondamental dans $L_1[0,\infty]$ des fonctions e^{-nt}, $n=1,2,\ldots\ldots$, et on a donc : $Tg=\int_0^\infty g(t)\,\vec{\varphi}(t)\,dt$, pour toute $g(t)\in L_1[0,\infty]$. Notre théorème se trouve ainsi démontré.

COROLLAIRE. *Dans l'espace* $X\equiv L_1[0,\infty]$ *les conditions* 2) *et* 3) *ne sont pas suffisantes pour avoir la représentation* 1) *pour toute fonction* $\vec{f}(s)$ *qui les vérifie.*

OBSERVATION. $L_1[0,\infty]$ est un espace faiblement complet par des suites.

DÉMONSTRATION. En utilisant le théorème 1, il sera suffisant de montrer que l'opérateur identique de $L_1[0,\infty]$ en soi même n'est pas représentable par une intégrale :

$$g=Ig=\int_0^\infty g(t)\,\vec{\varphi}(t)\,dt, \qquad \text{avec } \vec{\varphi}(t)\in B_\infty([0,\infty]);X)$$

Soit la fonction vectorielle a valeurs dans $L_1[0,\infty]$ qui est définie pour $t\geqq 0$

par la relation :

$$\vec{\alpha}(t) \equiv K(s, t) = \begin{cases} 1, \text{ si } 0 \leqq s < t \\ 0, \text{ si } s \geqq t. \end{cases}$$

Elle est à variation forte bornée dans toute intérvalle fini $[0, R]$, $R > 0$ (voir pour la définition : [3]-déf. 3. 2. 4), comme on peut voir aisément car $\|\vec{\alpha}(t_{i+1}) - \vec{\alpha}(t_i)\|_{L_1[0,\infty]} = t_{i+1} - t_i$. Soit maintenant $\varphi(t)$ une fonction quelconque appartenant à l'intersection $L_1[0, \infty] \cap C[0, \infty]$. Alors, pour tout $R > 0$, l'intégrale de Riemann-Stieltjes $\int_0^R \varphi(t)\, d\vec{\alpha}(t)$ existe. Nous allons montrer que la limite forte dans $L_1[0, \infty]$, pour $R \to \infty$, existe aussi, et qu'on a la relation :

$$\varphi(.) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \varphi(t)\, d\,\vec{\alpha}(t) = \int_0^\infty \varphi(t)\, d\,\vec{\alpha}(t).$$

Soit $R > 0$ fixé et la fonction $\varphi_R(s) = \begin{cases} 0, \text{ pour } s > R, \\ \varphi(s), \text{ pour } 0 \leqq s \leqq R. \end{cases}$

Alors on a la relation : $\int_0^R \varphi(t)\, d\,\vec{\alpha}(t) = \varphi_R(\,.\,)$.

En effet, soit $h(t)$ une fonction de $L_\infty[0, \infty]$ (dual fort de $L_1[0, \infty]$). On a :

$$\begin{aligned} < h, \int_0^R \varphi(t)\, d\,\vec{\alpha}(t) > &= \int_0^R \varphi(t)\, d < h, \vec{\alpha}(t) > \\ &= \int_0^R \varphi(t)\, d_t \int_0^\infty h(s)\, K(s, t)\, ds = \int_0^R \varphi(t)\, d_t \int_0^t h(s)\, ds \\ &= \int_0^R \varphi(t)\, h(t)\, dt = \int_0^\infty h(t)\, \varphi_R(t)\, dt = < h, \varphi_R > \end{aligned}$$

et donc $\int_0^R \varphi(t)\, d\,\vec{\alpha}(t) = \varphi_R(\,.\,)$ pour tout $R > 0$ fixé.

Mais on a $\|\varphi_R(.) - \varphi\,(.)\|_X = \int_R^\infty |\varphi(s)|\, ds$ qui tend vers 0 avec $1/R$, et l'égalité $\varphi(.) = \int_0^\infty \varphi(t)\, d\,\vec{\alpha}(t)$ se trouve ainsi démontrée.

Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe une fonction vectorielle $\vec{\beta}(t) \in B_\infty([0, \infty]; X)$ $(X \equiv L_1[0, \infty])$, telle que : $\varphi(.) = \int_0^\infty \varphi(t)\, \vec{\beta}(t)\, dt$, pour toute fonction $\varphi(t) \in X$. Supposons de plus que $\varphi(t)$ appartienne aussi à $C[0, \infty]$; alors on a, si on désigne avec $\vec{\gamma}(t)$ l'intégrale de Bochner $\int_0^t \vec{\beta}(s)\, ds$, l'égalité suivante :

$$\int_0^\infty \varphi(t)\ \vec{\beta}(t)\ dt = \int_0^\infty \varphi(t)\ d\ \vec{\gamma}(t).$$

On a obtenu donc en définitif, l'égalité :

$$\int_0^\infty \varphi(t)\ d\ \vec{\alpha}(t) = \varphi(.) = \int_0^\infty \varphi(t)\ d\ \vec{\gamma}(t)$$

pour toute fonction $\varphi(t) \in L_1[0, \infty] \cap C[0, \infty]$.

On peut voir aisément que les fonctions vectorielles $\vec{\alpha}(t)$ et $\vec{\gamma}(t)$ sont continues pour tout $t \geqq 0$. Alors, si on prenne $\varphi_s(t) = e^{-st}$, $s > 0$, qui appartienne à $L_1[0, \infty]$ on a :

$\int_0^\infty e^{-st}\ d\ \vec{\alpha}(t) = \int_0^\infty e^{-st}\ d\ \vec{\gamma}(t)$, $s > 0$. Le théorème d'unicité pour les transformations de Laplace-Stieltjes vectorielles, nous donne alors, vu la continuité de $\vec{\alpha}(t)$ et $\vec{\gamma}(t)$, l'égalité $\vec{\alpha}(t) = \vec{\gamma}(t)$, $t \geqq 0$. Mais cette égalité n'est pas possible, car tandis que la fonction $\vec{\gamma}(t)$ est fortement dérivable presque-partout, la fonction $\vec{\alpha}(t)$ n'est pas même faiblement dérivable nule part, comme on voit aisément.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. MIYADERA, On the representation theorem by the Laplace-transformation of vector-valued functions. Tôhoku Math. J., (2)8, (1956), 170–180.

[2] D. V. WIDDER, The Laplace transform, Princeton University Press, 1946.

[3] E. HILLE-R. S. PHILIPS, Functional Analysis and Semi-Groups, (second revised edition), Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1957.

[4] L. SCHWARTZ, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, Journal d'Analyse Mathématique, 4(1954-55), 88-148.

BUCAREST, ROUMANIE.