Tôhoku Math. Journ.
29 (1977), 287-318.

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PROVENANT DE LA GÉNÉTIQUE DES POPULATIONS

NORIO SHIMAKURA

(Received April 19, 1976)

0. Introduction. Dans la génétique des populations, on traite souvent l'équation de Kolmogorov

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathscr{L} u = 0 \tag{0.1}$$

pour étudier le processus stochastique qui intervient, où t désigne la génération (la variable du temps) et $\mathscr{L}$ est un opérateur elliptique du second ordre des variables de l'espace d'états Ω ([2] et [5]).

Si l'on regarde un seul locus génétique dans une population des $n+1$ allèles $A_j (0 \leqq j \leqq n, n \geqq 1)$ des fréquentés x_j, les x_j sont non-négatives et liées par une seule relation $\sum_{j=0}^{n} x_j = 1$. Donc, le couple des variables spatiales est $x = (x_1, \cdots, x_n)$ qui parcourt le n-simplexe Ω de $\boldsymbol{R}^n$:

$$\Omega = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n ; x_j > 0, 0 \leqq j \leqq n\}, \text{ où } x_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j \, . \tag{0.2}$$

Sous certaines hypothèses sur sélection, mutation et migration, $\mathscr{L}$ prend la forme

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\tilde{\omega}} u = & -\sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=0}^{n} (1+\omega_k) \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ & - \sum_{j=1}^{n} (1+\omega_j) \frac{\partial u}{\partial x_j} \, , \end{aligned} \tag{0.3}$$

où $\tilde{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n)$ est le couple des $n+1$ paramètres réels ([2], [4], [5] et [6]).

Dans cette note, nous étudions les deux réalisations $L_{\tilde{\omega}}$ et $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ de $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$ comme opérateurs auto-adjoints dans un espace hilbertien $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$. Les $L_{\tilde{\omega}}$ et $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ sont définis dans le § 1. Suivant les valeurs de $\tilde{\omega}$, elles deviennent identiques ou bien distinctes. Dans le dernier cas, $L_{\tilde{\omega}}$ est la réalisation de $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$ sous la condition aux limites de Neumann, tandis que $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ est celle de Dirichlet. Nous étudions d'abord $L_{\tilde{\omega}}$ et ensuite $\Lambda_{\tilde{\omega}}$, car la première est plus fondamentale que la deuxième au point de vue technique.

Premièrement, toutes les fonctions propres de $L_{\tilde{\omega}}$ sont trouvées parmi les polynômes, et ont été déjà connues au nom des polynômes d'Appell (§§ 3 et B; [1], [3] et [4]). Nous pouvons construire les fonctions de Green $G(x, y; \lambda)$ pour $L_{\tilde{\omega}} + \lambda I$ et $Z(t; x, y)$ pour $(\partial/\partial t) + L_{\tilde{\omega}}$ et les exprimer par des fonctions spéciales plus populaires (§§ 5 et 6). Deuxièmement, grâce à une relation précise entre $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ et $L_{\tilde{\omega}'}$, nous pouvons trouver les fonctions propres de $\Lambda_{\tilde{\omega}}$, construire les fonctions de Green $\mathscr{G}(x, y; \lambda)$ pour $\Lambda_{\tilde{\omega}} + \lambda I$ et $\mathscr{Z}(t; x, y)$ pour $(\partial/\partial t) + \Lambda_{\tilde{\omega}}$ (§ 7). Et troisièmement, nous pouvons aussi résoudre le problème de Dirichlet non homogène en construisant explicitement les noyaux de Poisson (§ 8). Dans le § 9, quelques exemples très spéciaux de la résolution sont calculés.

Une fonction génératrice Ψ des fonctions propres de $L_{\tilde{\omega}}$, définie dans le § 4, simplifie des calculs des fonctions de Green. Donc, elle joue un rôle décisif dans ce mémoire.

Dans cette direction de la recherche, nous connaissons déjà des travaux, par exemple [2] et [4], où les auteurs donnent $Z(t; x, y)$ comme des sommes etendues sur les multi-indices. Nous remplaçons, autant que possible, les sommations par des intégrations (simples ou multiples) à l'aide de la fonctions génératrice Ψ. Comme il est connu dans la physique mathématique, les fonctions de Green exprimées par des intégrales sont plus commodes à évaluer que celles données par des séries.

L'auteur exprime sa reconnaissance profonde à Monsieur Takeo Maruyama du National Institute of Genetics à Mishima de discussions très fructueuses avec lui.

1. Les réalisations $L_{\tilde{\omega}}$ et $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ de $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$. Nous traitons l'opérateur $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$ défini par (0.3) dans le n-simplexe Ω de (0.2). La matrice $(\delta_{jk}x_j - x_jx_k)_{j,k=1,\cdots,n}$ est définie positive sur Ω mais elle ne l'est plus sur $\partial\Omega$, car son déterminant est égal à $x_0x_1 \cdots x_n$. $L_{\tilde{\omega}}$ est donc dégénéré partout sur $\partial\Omega$.

Munissons à Ω de l'élément de volume

$$(1.1) \qquad dx_{\tilde{\omega}} = x^{\tilde{\omega}}dx_1\wedge \cdots \wedge dx_n, \quad \text{où} \quad x^{\tilde{\omega}} = x_0^{\omega_0}x_1^{\omega_1} \cdots x_n^{\omega_n} ,$$

et désignons par $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$ l'espace hilbertien formé par toutes les fonctions complexes à carrées sommables sur Ω par rapport à $dx_{\tilde{\omega}}$ muni du produit scalaire et de la norme

$$(u, v)_{\tilde{\omega}} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx_{\tilde{\omega}} \quad \text{et} \quad \|u\|_{\tilde{\omega}} = \sqrt{(u, u)_{\tilde{\omega}}} .$$

Alors, $1 \in \mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$ (donc $C^\infty(\bar{\Omega})\subset\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$) si et seulement si

$$(1.2) \qquad \omega_j > -1 \text{ pour tout } 0 \leqq j \leqq n .$$

$\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$ est formellement auto-adjoint dans $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$, car on peut l'écrire

$$\mathscr{L}_{\tilde{\omega}} u = -x^{-\tilde{\omega}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ x^{\tilde{\omega}} (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\} . \tag{1.3}$$

Ceci nous ramène à définir un produit scalaire

$$a_{\tilde{\omega}}(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_k} + u\bar{v} \right\} dx_{\tilde{\omega}} \tag{1.4}$$

quand il a un sens. Désignons par $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}}$ (respectivement par $\mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$) le complété de $C^\infty(\bar{\Omega})$ (resp. de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à $a_{\tilde{\omega}}$. La définition de $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}}$ est possible si et seulement si (1.2) a lieu, tandis que celle de $\mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$ est toujours possible sans aucune hypothèse sur $\tilde{\omega}$.

DÉFINITION. Soit $L_{\tilde{\omega}}$ l'extension de Friedrichs de la restriction de $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$ sur $C^\infty(\bar{\Omega})$ (la définition possible sous l'hypothèse de (1.2)). Soit $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ l'extension de Friedrichs de la restriction de $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$ sur $C_0^\infty(\Omega)$.

Alors, $L_{\tilde{\omega}}$ (resp. $\Lambda_{\tilde{\omega}}$) est auto-adjoint et défini non-négatif (resp. défini positif) sur $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$ du domaine

$$D(L_{\tilde{\omega}}) = \{u \in \mathscr{V}_{\tilde{\omega}}; |a_{\tilde{\omega}}(u, v)| \leqq \text{Cte}\, \|v\|_{\tilde{\omega}} \text{ pour tout } v \in \mathscr{V}_{\tilde{\omega}}\}$$
$$(\text{resp. } D(\Lambda_{\tilde{\omega}}) = \{u \in \mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}; |a_{\tilde{\omega}}(u, v)| \leqq \text{Cte}\, \|v\|_{\tilde{\omega}} \text{ pour tout } v \in \mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}\}) .$$

Et l'on pose $L_{\tilde{\omega}} u = \mathscr{L}_{\tilde{\omega}} u$ pour $u \in D(L_{\tilde{\omega}})$ (resp. $\Lambda_{\tilde{\omega}} u = \mathscr{L}_{\tilde{\omega}} u$ pour $u \in D(\Lambda_{\tilde{\omega}})$). Le lemme suivant sera démontré dans le § A.

LEMME 1.1. *Les espaces hilbertiens $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}}$ et $\mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$ (donc les opérateurs $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ et $L_{\tilde{\omega}}$) sont les mêmes si et seulement si*

$$\omega_j \geqq 0 \text{ pour tout } 0 \leqq j \leqq n . \tag{1.5}$$

Sinon, $\mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$ est un sous-espace strict et fermé de $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}}$.

Nous donnerons une relation précise entre $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ et $L_{\tilde{\omega}'}$, avec un $\tilde{\omega}'$ convenable, dans le § 7.

Nous notons un effet par l'action d'un groupe G sur Ω. Soit G le groupe des transformations affines dans $\boldsymbol{R}^n$ qui conservent Ω. Il est fini et isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$ de toutes les permutations des $n+1$ caractères $\{0, 1, \cdots, n\}$, car chaque élément g de G se détermine si l'on désigne les images des $n+1$ sommets $P_j = (\delta_{j1}, \cdots, \delta_{jn})$ $(0 \leqq j \leqq n)$. En identifiant G avec $\mathfrak{S}_{n+1}$, chaque élément g de G s'écrit comme suit:

$$g(x) = \bar{x}, \text{ ou } \bar{x}_j = (\bar{x})_j = x_{g(j)} , \qquad 0 \leqq j \leqq n ,$$

avec la convention $\bar{x}_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j$. Introduisons $n+1$ opérateurs

$$T_0 = -\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad T_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + T_0 \qquad (1 \leqq j \leqq n) . \tag{1.6}$$

Alors nous avons $T_j(\bar{x}, \partial/\partial\bar{x}) = T_{g(j)}(x, \partial/\partial x)$. D'autre part, $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$ s'écrit

$$\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}u = -\sum_{j=0}^{n} x_j T_j^2 u - \sum_{j=0}^{n}(1+\omega_j)T_j u \,. \tag{1.7}$$

Donc, nous avons

$$\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \mathscr{L}_{g\tilde{\omega}}\left(\bar{x}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right) \quad \text{avec} \quad g\tilde{\omega} = (\omega_{g(0)}, \cdots, \omega_{g(n)}) \,.$$

Si, en particulier, tous les ω_j sont égaux, $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$ reste invariant par l'action de G sur Ω.

2. Conventions. Soit $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$ l'ensemble de tous les entiers non-négatifs. Désignons par N^n (respectivement par N^{n+1}) l'ensemble de tous les multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ (resp. $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha) = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$) de n (resp. $n+1$) composants de N. Pour chaque $\alpha \in N^n$ (resp. $\tilde{\alpha} \in \boldsymbol{R}^{n+1}$), nous nous convenons d'écrire

$$\begin{gathered} |\alpha| = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j,\ |\tilde{\alpha}| = \alpha_0 + |\alpha|;\ \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,\ \tilde{\alpha}! = \alpha_0!\ \alpha!; \\ x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},\ x^{\tilde{\alpha}} = x_0^{\alpha_0}x^{\alpha};\ \partial^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} . \end{gathered} \tag{2.1}$$

Nous pouvons traiter $\tilde{\omega}$ comme un multi-indice, bien qu'il ne le soit pas en général. Donc écrivons

$$(\tilde{\alpha} + \tilde{\omega})! = \Gamma(\alpha_0 + \omega_0 + 1) \cdots \Gamma(\alpha_n + \omega_n + 1),\ x^{\tilde{\alpha}+\tilde{\omega}} = x^{\tilde{\alpha}}x^{\tilde{\omega}} (\text{voir } (1.1)) \,. \tag{2.2}$$

Nous réservons le caractère κ uniquement pour signifier le nombre

$$\kappa = \kappa(\tilde{\omega}) = n + \sum_{j=0}^{n}\omega_j \,. \tag{2.3}$$

Avec ces notations, nous pouvons démontrer les égalites suivantes qui seront utiles dans la suite: Pour $\tilde{\alpha} \in N^{n+1}$ et $\alpha \in N^n$ quelconques,

$$\int_{\Omega} x^{\tilde{\alpha}} dx_{\tilde{\omega}} = \frac{(\tilde{\alpha} + \tilde{\omega})!}{(|\tilde{\alpha}| + \kappa)!}\,, \quad \text{sous l'hypothèse (1.2);} \tag{2.4}$$

$$\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}[x^{\tilde{\alpha}}] = \left\{|\tilde{\alpha}|(|\tilde{\alpha}| + \kappa) - \sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha_j(\alpha_j + \omega_j)}{x_j}\right\}x^{\tilde{\alpha}}; \tag{2.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &(2.6) \qquad T_j[x^{\tilde{\alpha}}] = \left(\frac{\alpha_j}{x_j} - |\tilde{\alpha}|\right)x^{\tilde{\alpha}}; \\ &(2.7) \qquad T_j(\partial^{\alpha}u) = \partial^{\alpha}(T_j u) + |\alpha|\,\partial^{\alpha}u \,. \end{aligned}\right\} \text{(voir (1.6))} \,.$$

Etant donnés α et β de N^n, la relation $\alpha \geqq \beta$ signifie que $\alpha_j \geqq \beta_j$ pour tout $1 \leqq j \leqq n$. On définit analoguement la relation $\tilde{\alpha} \geqq \tilde{\beta}$.

3. Valeurs propres et fonctions propres de $L_{\tilde{\omega}}$. Dans ce paragraphe, nous étudions $L_{\tilde{\omega}}$ sous l'hypothèse (1.2) sur $\tilde{\omega}$.

PROPOSITION 3.1. *Posons*

$$l_p = l_p(\tilde{\omega}) = p(p+\kappa), \quad pour\ p = 0, 1, 2, \cdots\ (voir\ (2.3))\ . \tag{3.1}$$

Elles sont distinctes, et $\{l_p\}_p^\infty = 0$ *est le spectre de* $L_{\tilde{\omega}}$ *dont chacune* l_p *est une valeur propre de multiplicité* $N_p = \binom{n+p-1}{p}$. *Soit* $E_p = E_p^{(\tilde{\omega})}$ *le sous-espace propre de* $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$ *appartenant à* l_p. *Il est engendré par certains* N_p *polynômes de degré* p. *Et, une base de toutes les fonctions propres de* $L_{\tilde{\omega}}$ *engendre tous les polynômes de* n *variables, elle est donc totale dans* $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$.

Nous remettons la preuve au § B, où nous donnerons explicitement les systèmes biorthogonaux $\{P_\alpha(x); \alpha \in N^n\}$ et $\{Q_\alpha(x); \alpha \in N^n\}$ des fonctions propres de sorte que

$$\begin{cases} \text{chacun des systèmes } \{P_\alpha\}_{|\alpha|=p} \text{ et } \{Q_\alpha\}_{|\alpha|=p} \text{ engendre } E_p\,. \\ \text{et que } (P_\alpha, Q_\beta)_{\tilde{\omega}} = \delta_{\alpha,\beta} \text{ pour tous } \alpha \text{ et } \beta \text{ de } N^n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Les $P_\alpha(x)$ et $Q_\alpha(x)$ sont appelés polynômes d'Appell (voir [1], [2], [3], [4] et [6]), et ils généralisent les polynômes de Jacobi du cas de $n = 1$.

Soient $p \geqq 0$ et $E_p = E_p^{(\tilde{\omega})}$ la projection orthogonale de $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$ sur E_p (par abus de notation). E_p est en effet un opérateur intégral à noyau $E_p(x, y)$ comme suit:

$$\begin{cases} u \in \mathscr{H}_{\tilde{\omega}} \longrightarrow E_p u = \int_\Omega E_p(\cdot, y) u(y) dy_{\tilde{\omega}}\,, \\ \text{où } E_p(x, y) = E_p^{(\tilde{\omega})}(x, y) = \sum_{|\alpha|=p} P_\alpha(x) Q_\alpha(y) = E_p(y, x)\,. \end{cases} \tag{3.3}$$

Nous allons maintenant exprimer $E_p(x, y)$ en une autre manière. Introduisons les fonctions

$$\begin{cases} F_p(x, y) = F_p^{(\tilde{\omega})}(x, y) = \sum_{|\tilde{\alpha}|=p} \dfrac{x^{\tilde{\alpha}} y^{\tilde{\alpha}}}{\tilde{\alpha}!(\tilde{\alpha}+\tilde{\omega})!} = F_p(y, x), \text{ pour } p \geqq 0\,, \\ \text{et, } F_p(x, y) = 0, \text{ pour } p < 0\,. \end{cases} \tag{3.4}$$

Voici une interprétations de $\{F_p\}_{p=0}^\infty$. Etant c un scalaire, posons

$$\mathscr{F}(c; x, y) = \mathscr{F}^{(\tilde{\omega})}(c; x, y) = \sum_{p=0}^\infty c^p F_p(x, y) = \mathscr{F}(c; y, x)\,. \tag{3.5}$$

Alors, $\mathscr{F}$ est le produit des $n+1$ fonctions de Bessel modifiées:

$$\begin{cases} \mathscr{F}(c; x, y) = \prod_{j=0}^n \mathscr{I}_{\omega_j}(c x_j y_j)\,, \\ \text{où } \mathscr{I}_\nu(Z) = Z^{-\nu/2} I_\nu(2\sqrt{Z}) = \sum_{k=0}^\infty \dfrac{Z^k}{k!(k+\nu)!}\,, \end{cases} \tag{3.6}$$

et (2.5) donnera tout de suite

$$\mathscr{L}_{\tilde{\omega}} F_p = l_p F_p - F_{p-1} , \tag{3.7}$$

où $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$ est opéré par rapport à x ou à y. La proposition suivante sera aussi démontrée dans le § B:

PROPOSITION 3.2. *Nous avons, pour* $p \geqq 0$,

$$E_p(x, y) = (2p + \kappa) \sum_{q=0}^{p} \frac{(2p - q + \kappa - 1)!}{q!} (-1)^q F_{p-q}(x, y) . \tag{3.8}$$

4. Une fonction génératrice $\Psi(t; x, y)$. Nous faisons maintenant une hypothèse sur $\tilde{\omega}$ légèrement plus forte que (1.2), c'est-à-dire,

$$\omega_j > -1, \text{ pour tout } 0 \leqq j \leqq n \text{ et } \kappa > 0 . \tag{4.1}$$

Soit $(x, y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$, et définissons

$$\begin{cases} \Psi(t; x, y) = \Psi^{(\tilde{\omega})}(t; x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{t^{2p+\kappa}}{2p + \kappa} E_p(x, y), \text{ pour } 0 < t \leqq 1 , \\ \text{et } \Psi(t; x, y) = \Psi(1/t; x, y), \text{ pour } 1 \leqq t < +\infty . \end{cases} \tag{4.2}$$

Notons que cette fonction a un sens si l'une des conditions suivantes a lieu:

$$\begin{cases} t > 0, \ t \neq 1 \text{ et } (x, y) \in \overline{\Omega \times \Omega} ; \\ \text{ou bien, } t = 1, \ (x, y) \in \overline{\Omega \times \Omega} \text{ et } x \neq y . \end{cases} \tag{4.3}$$

Notons aussi que $\Psi(t; x, y)$ est positive autant qu'elle est définie.

PROPOSITION 4.1. *Supposons* (4.1) *sur* $\tilde{\omega}$. *Alors, nous avons l'égalité suivante lorsque* (t, x, y) *vérifie* (4.3).

$$\Psi(t; x, y) = \int_0^{+\infty} \mathscr{F}(s^2; x, y) \exp\left\{ -s\left(t + \frac{1}{t}\right)\right\} s^{\kappa-1} ds . \tag{4.4}$$

PREUVE. Introduisons encore une fonction génératrice

$$\Phi(t; x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p+\kappa}}{(2p + \kappa)(2p + \kappa)!} E_p(x, y) \tag{4.5}$$

ayant un sens pour tous $t > 0$ et $(x, y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$. Utilisons la proposition 3.2 et changeons l'ordre des sommations comme on le justifie, et nous avons

$$\Phi(t; x, y) = \int_0^t \mathscr{F}(s^2; x, y) \, J_0\left(2\sqrt{s(t - s)}\right) s^{\kappa-1} ds , \tag{4.6}$$

où $J_0(2\sqrt{Z}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-Z)^k (k!)^{-2}$. Cela établie, (4.4) s'obtient par

$$\Psi(t; x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-u}\Phi(tu; x, y)du, \text{ si } 0 < t < 1 . \tag{4.7}$$

c.q.f.d.

La fonction Ψ ainsi définie et exprimée par des fonctions plus populaires jouera un rôle le plus fondamental dans la suite. Une variante de la proposition 4.1 que voici sera également utile. Nous nous rappelons de la représentation intégrale

$$\mathscr{I}_\nu(Z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \dfrac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} e^{\pm 2\sqrt{Z}\phi}(1 - \phi^2)^{\nu - 1/2} d\phi ,$$

qui est valable d'abord pour $\operatorname{Re}\nu > -1/2$ et ensuite pour ν général par la continuation analytique en ν. Alors celle-ci et (3.6) donnent la

PROPOSITION 4.2. *Sous les mêmes hypotheses qu'à la proposition* 4.1, *nous avons*

$$\begin{cases} \Psi(t; x, y) = \Gamma(\kappa) \displaystyle\int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \left(t + \frac{1}{t} - 2\sum_{j=0}^{n} \phi_j \sqrt{x_j y_j}\right)^{-\kappa} M_{\tilde{\omega}}(d\tilde{\phi}) , \\ \text{avec } M_{\tilde{\omega}}(d\tilde{\phi}) = \left\{ \displaystyle\prod_{j=0}^{n} \frac{(1 - \phi_j^2)^{\omega_j - 1/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\omega_j + \dfrac{1}{2}\right)} \right\} d\phi_0 \wedge d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_n \\ \text{et } \tilde{\phi} = (\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n) . \end{cases} \tag{4.8}$$

Il faut signaler que l'intégrale dans (4.8) est prise au sens ordinaire si et seulement si

$$\omega_j > -1/2, \text{ pour tout } 0 \leqq j \leqq n , \tag{4.9}$$

et que, sinon, elle est prise au sens de Riemann-Liouville, c'est-à-dire, au moyen de la continuation analytique en $\tilde{\omega}$. Cette proposition (vérifiée facilement) nous fait rappeler de la fonction génératrice des polynômes de Gegenbauer $\{C_q^\kappa(Z)\}_{q=0}^\infty$:

$$(t^2 - 2Zt + 1)^{-\kappa} = \sum_{q=0}^{\infty} t^q C_q^\kappa(Z), \text{ pour } |t| < 1 \text{ et } -1 \leqq Z \leqq 1 , \tag{4.10}$$

parce que, dans (4.8), nous voyons

$$\left| \sum_{j=0}^{n} \phi_j \sqrt{x_j y_j} \right| \leqq \sum_{j=0}^{n} \sqrt{x_j y_j} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} (\sqrt{x_j} - \sqrt{y_j})^2 \leqq 1 ,$$

la dernière égalité ayant lieu si et seulement si $x = y$ dans $\bar{\Omega}$. Et, remarquons aussi que la parité de q et celle de $C_q^\kappa(Z)$ comme polynôme de Z coincident. Donc, nous avons la

PROPOSITION 4.3. *Sous l'hypothèse de* (4.1), *nous avons*

$$(4.11)\quad \begin{cases} E_p(x, y) = (2p+\kappa)\Gamma(\kappa)\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} C_{2p}^{\kappa}\Big(\sum_{j=0}^{n}\phi_j\sqrt{x_j y_j}\Big)M_{\tilde{\omega}}(d\tilde{\phi})\,, \\ \textit{pour } p\geqq 0 \textit{ et } (x, y)\in\overline{\Omega\times\Omega}\,. \end{cases}$$

Nous connaissons d'autre part la majoration

$$(4.12)\quad |C_q^{\kappa}(Z)|\leqq C_q^{\kappa}(1)=\frac{\Gamma(2\kappa+q)}{\Gamma(2\kappa)q!}\quad \text{pour}\quad -1\leqq Z\leqq 1,\ \kappa>0 \text{ et } q\geqq 0\,.$$

Celle-ci combinée avec (4.11) entraîne l'énoncé suivant qui nous fournit une information sur la croissance (par rapport à p) ponctuelle des fonctions propres de $L_{\tilde{\omega}}$:

COROLLAIRE 4.3. *Supposons* (4.9) *avec les égalités comprises. Alors, nous avons*

$$(4.13)\quad |E_p(x, y)|\leqq \frac{(2p+\kappa)\Gamma(\kappa)\Gamma(2p+2\kappa)}{\tilde{\omega}!\,\Gamma(2\kappa)(2p)!}\,,\ \textit{pour},\ p\geqq 0 \textit{ et } (x, y)\in\overline{\Omega\times\Omega}\,.$$

5. Fonction de Green $G(x, y; \lambda)$ pour $L_{\tilde{\omega}}+\lambda I$. Soit $f\in\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$ donnée quelconque. Cherchons une solution $u\in D(L_{\tilde{\omega}})$ de l'équation

$$(5.1)\quad L_{\tilde{\omega}}u+\lambda u=f\,,$$

où λ est un paramètre complexe tel que $\lambda\notin\{-l_p\}_{p=0}^{\infty}$. La solution existe, elle est unique et donnée par

$$(5.2)\quad u=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda+l_p}E_pf\,.$$

Elle est de plus représentée ponctuellement (presque partout)

$$(5.3)\quad u(x)=\int_{\Omega}G(x, y; \lambda)f(y)dy_{\tilde{\omega}}\,,$$

où

$$(5.4)\quad G(x, y; \lambda)=G^{(\tilde{\omega})}(x, y; \lambda)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda+l_p}E_p(x, y)\,,$$

s'il y a un sens de la somme. Nous appelons $G(x, y; \lambda)$ la fonction de Green pour $L_{\tilde{\omega}}+\lambda I$.

THÉORÈME 5.1. *Supposons* (4.1) *sur* $\tilde{\omega}$ *et soit* $\lambda\in C\backslash\{-l_p\}_{p=0}^{\infty}$. *Alors, la fonction de Green* $G(x, y; \lambda)$ *est donnée par les formules suivantes, qui sont valables d'abord pour* $\lambda>0$ *et ensuite pour* λ *général par la continuation analytique en* λ:

$$(5.5)_1\quad G(x, y; \lambda)=2\int_{0}^{+\infty}\Psi(t; x, y)t^{2i\mu-1}dt$$

$$(5.5)_2 \qquad = 4\int_0^{+\infty} \mathscr{F}(s^2; x, y) K_{2i\mu}(2s) s^{\kappa-1} ds$$

$$(5.5)_3 \qquad = \sum_{p=0}^{\infty} \Gamma\left(p + \frac{\kappa}{2} + i\mu\right) \Gamma\left(p + \frac{\kappa}{2} - i\mu\right) F_p(x, y)$$

$$(5.5)_4 \qquad = (A\tilde{\omega}, \lambda) \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} F\left(\kappa + 2i\mu, \kappa - 2i\mu; \kappa + \frac{1}{2};\right.$$
$$\left. \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{j=0}^{n} \phi_j \sqrt{x_j y_j}\right)\right) M_{\tilde{\omega}}(d\tilde{\phi}) ,$$

où

$$(5.5)_5 \qquad \begin{cases} (x, y) \in \overline{\Omega \times \Omega},\ x \neq y;\ \mu = \sqrt{\lambda - \dfrac{\kappa^2}{4}}\ ; \\ et\ A(\tilde{\omega}, \lambda) = 2^{2-2\kappa} \sqrt{\pi}\, \Gamma(\kappa + 2i\mu) \Gamma(\kappa - 2i\mu) / \Gamma\left(\kappa + \dfrac{1}{2}\right) . \end{cases}$$

Ici, $K_{2i\mu}$ est la fonction de Bessel modifiée de Kelvin et F est la série hypergéométrique de Gauss.

PREUVE. Il suffit de vérifier ces formules seulement pour $\lambda > 0$. D'abord, comparons (5.4) et (4.2). $(5.5)_1$ est obtenue par l'égalité

$$\frac{1}{\lambda + l_p} = \frac{2}{2p + \kappa} \int_0^{+\infty} \left\{ \min\left(t, \frac{1}{t}\right) \right\}^{2p+\kappa} t^{2i\mu - 1} dt .$$

Ensuite $(5.5)_1$ et (4.4) entraînnent $(5.5)_2$ par le changement d'ordre d'intégrations. $(5.5)_3$ est une conséquence de calcul d'intégration double en utilisant (3.5). Et dernièrement, $(5.5)_1$, (4.8) et

$$\int_0^{+\infty} \left(t + \frac{1}{t} - 2Z\right)^{-\kappa} t^{-2i\mu - 1} dt = \frac{\Gamma(\kappa + 2i\mu)\Gamma(\kappa - 2i\mu)}{\Gamma(2\kappa)}$$
$$\times F\left(\kappa + 2i\mu, \kappa - 2i\mu; \kappa + \frac{1}{2}; \frac{1 + Z}{2}\right)$$

établissent $(5.5)_4$. c.q.f.d.

Remarquons que $G(x, y; \lambda)$ est positive si $\lambda > 0$, parce qu'elle est la somme des termes positifs comme on le voit dans $(5.5)_3$.

EXEMPLE 5.2. Soient $n \geqq 2$ et $\tilde{\omega}$ tel que

$$(5.6) \qquad \begin{cases} \omega_j = -1/2 \text{ si } j \in J_-,\ \omega_j = 1/2 \text{ si } j \in J_+ \\ \text{et que } \{0, 1, \cdots, n\} = J_- \cup J_+ \text{ (voir aussi le § 7)} . \end{cases}$$

Alors, en désignant par $|J_\pm|$ les nombres d'éléments de $J_\pm$, nous avons

$$\mathscr{F}(s^2; x, y) = (4\pi)^{-(n+1)/2}s^{-|J_+|}\{\prod_{j\in J_+}(x_jy_j)^{-1/2}\} \times\sum_{\varepsilon}(\prod_{j\in J_+}\varepsilon_j)\exp\Big(2s\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\sqrt{x_ky_k}\Big), \text{ et} \tag{5.7}$$

$$\Psi(t; x, y) = (4\pi)^{-(n+1)/2}\Gamma\Big(\frac{n-1}{2}\Big)\{\prod_{j\in J_+}(x_jy_j)^{-1/2}\} \times\sum_{\varepsilon}(\prod_{j\in J_+}\varepsilon_j)\Big(t+\frac{1}{t}-2\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\sqrt{x_ky_k}\Big)^{-(n-1)/2}, \tag{5.8}$$

où les $\varepsilon=(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ sont les multi-signes (des composants $+1$ ou -1), et la somme s'étend sur tous les multi-signes (voir aussi (4.8)). Donc, nous avons

$$\begin{cases} G(x, y; \lambda) = \dfrac{2^{2-2n}\pi^{-n/2}\Gamma\Big(\dfrac{n-1}{2}+2i\mu\Big)\Gamma\Big(\dfrac{n-1}{2}-2i\mu\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}\Big)}\{\prod_{j\in J_+}(x_jy_j)^{-1/2}\} \\ \times\sum_{\varepsilon}(\prod_{j\in J_+}\varepsilon_j)F\Big(\dfrac{n-1}{2}-2i\mu, \dfrac{n-1}{2}-2i\mu; \dfrac{n}{2}\,;\, \dfrac{1}{2}\Big(1+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\sqrt{x_ky_k}\Big)\Big), \\ \text{avec } \mu=\sqrt{\lambda-\dfrac{1}{4}\Big(|J_+|+\dfrac{n-1}{2}\Big)^2}\,. \end{cases} \tag{5.9}$$

Si en particulier $J_-=\varnothing$, c'est-à-dire, si $\omega_j=1/2$ pour tout $0\leqq j\leqq n$,

$$\begin{cases} G(x, y; \lambda) = 2^{1-3n}\pi^{-n/2}\dfrac{\Gamma\Big(\dfrac{3n+1}{2}+2i\mu\Big)\Gamma\Big(\dfrac{3n+1}{2}-2i\mu\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{3n+2}{2}\Big)} \\ \qquad\times\displaystyle\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}F\Big(\dfrac{3n+1}{2}+2i\mu, \dfrac{3n+1}{2}-2i\mu; \dfrac{3n+2}{2}; \\ \qquad\dfrac{1}{2}\Big(1+\sum_{k=0}^{n}\theta_k\sqrt{x_ky_k}\Big)\Big)d\theta_0\wedge\cdots\wedge d\theta_n\,, \\ \text{avec } \mu=\sqrt{\lambda-\dfrac{(3n+1)^2}{16}}\,. \end{cases} \tag{5.10}$$

6. Fonction de Green $Z(t; x, y)$ pour $\partial/\partial t+L_{\tilde\omega}$. Soit $f\in\mathscr{H}_{\tilde\omega}$ donnée quelconque. Cherchons une solution $u(t)$ de l'équation d'évolution

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t)+L_{\tilde\omega}u(t)=0, \text{ pour } t>0\,, \\ u(0)=f\,. \end{cases} \tag{6.1}$$

La solution existe, elle est unique dans un espace fonctionnel convenable et donnée par

$$(6.2)\qquad u(t) = e^{-tL_{\tilde{\omega}}}f = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-tl_p}E_p f,\ t \geqq 0\ .$$

Elle est de plus représentée ponctuellement (si $t > 0$)

$$(6.3)\qquad u(t, x) = \int_{\Omega} Z(t; x, y)f(y)dy_{\tilde{\omega}}\ ,$$

où

$$(6.4)\qquad Z(t; x, y) = Z^{(\tilde{\omega})}(t; x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-l_p t}E_p(x, y)\ ,$$

la somme ayant un sens si $t>0$. Nous appelons $Z(t; x, y)$ la fonction de Green pour $\partial/\partial t + L_{\tilde{\omega}}$.

THÉORÈME 6.1. *Supposons* (4.1) *sur* $\tilde{\omega}$. *La fonction de Green* $Z(t; x, y)$ *est donnée par la formule suivante si* $t > 0$:

$$(6.5)\qquad \begin{cases} Z(t; x, y) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} U\Big(t; \sum_{j=0}^{n} \phi_j \sqrt{x_j y_j}\Big) M_{\tilde{\omega}}(d\tilde{\phi})\ , \\ \textit{avec } U(t, z) = \Gamma(\kappa)\displaystyle\sum_{q=0}^{\infty} (q + \kappa)C_q^{\kappa}(z)e^{-q(q+2\kappa)t/4}\ . \end{cases}$$

Ici, nous pouvons remplacer U *par* V *suivante*:

$$(6.6)\qquad V(t; z) = \Gamma(\kappa)\sum_{p=0}^{\infty} (2p + \kappa)C_{2p}^{\kappa}(z)e^{-p(p+\kappa)t}\ .$$

La démonstration est immédiate grâce à la proposition 4.3 et à la remarque avant elle sur la parité des $C_q^{\kappa}(z)$.

Malheureusement, ni la fonction $U(t, z)$ ni $V(t, z)$ ne sont élémentaires, aucune formule plus compacte sur ces sommes n'est connue. Donc, il n'y a qu' à nous contenter d'estimer les comportements lorsque $t \uparrow +\infty$ ou $t \downarrow 0$. Il est évident d'abord que

$$(6.7)\qquad Z(t; x, y) = \frac{\kappa!}{\tilde{\omega}!} + O(e^{-(1+\kappa)t}),\ \text{lorsque } t \uparrow +\infty\ ,$$

uniformément par rapport à $(x, y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$. Regardons ensuite $Z(t; x, y)$ en faisant $t \downarrow 0$.

PROPOSITION 6.2. *Supposons* (4.9) *sur* $\tilde{\omega}$. *Alors, la fonction de Green* $Z(t; x, y)$ *a l'estimation suivante qui est valable pour* $(x, y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$ *et* $0<t\leqq T$ (*T est arbitraire mais fini*):

$$(6.8)\quad |Z(t; x, y)| \leqq \text{Cte}\ t^{-n/2}\exp\Big\{-\frac{1}{t}\sum_{j=0}^{n} (\sqrt{x_j} - \sqrt{y_j})^2\Big\} \prod_{j=0}^{n} (t + \sqrt{x_j y_j})^{-\omega_j - 1/2}\ .$$

Si l'on fixe les x *et* y *dans l'intérieur* Ω, $Z(t; x, y)$ *admet le développe-*

ment asymptotique suivant lorsque $t \downarrow 0$:

$$(6.9)\quad \begin{cases} Z(t;x,y) \sim (4\pi t)^{-n/2} e^{-\sigma^2/4t} \left(\dfrac{\sigma}{2 \sin \dfrac{\sigma}{2}} \right)^{(n-1)/2} \prod_{j=0}^{n} (x_j y_j)^{-(\omega_j/2)-1/4}, \\ \textit{avec} \quad \cos \dfrac{\sigma}{2} = \sum_{j=0}^{n} \sqrt{x_j y_j} \quad \textit{et} \quad 0 \leqq \sigma < \pi . \end{cases}$$

Nous expliquerons dans le § C pourquoi la quantité σ paraît dans (6.9). σ est la distance géodésique entre x et y par rapport à une certaine structure riemannienne dans Ω.

Il est probable que la restriction sur $\tilde{\omega}$ ci-dessus peut être affaiblie.

La preuve de la proposition sera faite dans le § F.

7. Problèmes de Dirichlet homogènes. Partageons l'ensemble $\{0, 1, \cdots, n\}$ en trois selon les signes des ω_j:

$$(7.1)\quad J_+ = \{j; 0 \leqq j \leqq n, \omega_j > 0\},\ J_0 = \{j; 0 \leqq j \leqq n, \omega_j = 0\} \\ \text{et } J_- = \{j; 0 \leqq j \leqq n, \omega_j < 0\} .$$

Alors, $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}} \neq \mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$ si et seulement si $J_- \neq \emptyset$ (donc dans ce cas $L_{\tilde{\omega}} \neq \Lambda_{\tilde{\omega}}$). Nous supposons toujours (jusqu'au § 9) que $J_- \neq \emptyset$.

Définitions des $\tilde{\nu}$, $\tilde{\omega}'$ et κ'. Soient $\tilde{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_n)$, $\tilde{\omega}' = (\omega'_0, \omega'_1, \cdots, \omega'_n)$ et κ' tels que

$$(7.2)\quad \begin{cases} \nu_j = \begin{cases} 0, & \text{si } j \in J_+ \cup J_0, \\ -\omega_j, & \text{si } j \in J_-; \end{cases} \quad \omega'_j = \omega_j + 2\nu_j = |\omega_j|,\ 0 \leqq j \leqq n; \\ \text{et } \kappa' = n + \sum_{j=0}^{n} \omega'_j \quad (>n) . \end{cases}$$

Remarquons que

$$(7.3)\quad \frac{\kappa' - \kappa}{2} = \sum_{j=0}^{n} \nu_j > 0 \quad \text{et que} \quad \frac{\kappa' + \kappa}{2} = n + \sum_{j=0}^{n} (\omega_j + \nu_j) \geqq n ,$$

la dernière égalité ayant lieu si et seulement si $J_+ = \emptyset$.

Voici une égalité fondamentale:

$$(7.4)\quad x^{-\tilde{\nu}} \mathscr{L}_{\tilde{\omega}} [x^{\tilde{\nu}} v] = \mathscr{L}_{\tilde{\omega}'}[v] + \frac{\kappa'^2 - \kappa^2}{4} v .$$

La signification plus rigoureuse de cette formule est le lemme suivant qui sera démontré dans le § A:

Lemme 7.1. *La multiplication par* $x^{\tilde{\nu}}$ *est à la fois isomorphisme de* $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}'}$ *sur* $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$, *celui de* $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}'}$ *sur* $\mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$ *et celui de* $D(L_{\tilde{\omega}'})$ *sur* $D(\Lambda_{\tilde{\omega}})$.

Et nous avons

$$\Lambda_{\tilde\omega} u = x^{\tilde\nu}\left(L_{\tilde\omega} + \frac{\kappa'^2 - \kappa^2}{4}\right)[x^{-\tilde\nu} u], \text{ pour tout } u \in D(\Lambda_{\tilde\omega}). \tag{7.5}$$

D'où nous avons tout de suite la

PROPOSITION 7.2. *Posons*

$$\lambda_p = \lambda_p(\tilde\omega) = \left(p + \frac{\kappa' - \kappa}{2}\right)\left(p + \frac{\kappa' + \kappa}{2}\right), \quad p = 0, 1, 2, \cdots . \tag{7.6}$$

Elles sont positives et distinctes, et, $\{\lambda_p\}_{p=0}^{\infty}$ *est le spectre de* $\Lambda_{\tilde\omega}$ *dont chacune* λ_p *est une valeur propre de multiplicite* $N_p = \binom{n+p-1}{p}$. *Soit* $E'_p = E'^{(\tilde\omega)}_p$ *le sous-espace propre de* $\mathscr{H}_{\tilde\omega}$ *appartenant à* λ_p. *Chaque élément* u *de* E'_p *est tel que* $x^{-\tilde\nu} u \in E_p^{(\tilde\omega')}$, *où* $E_p^{(\tilde\omega')}$ *est le sous-espace propre de* $\mathscr{H}_{\tilde\omega'}$ *appartenant à* $l_p(\tilde\omega')$ *étudié dans le* § 3.

Désignons par E'_p la projection orthogonale de $\mathscr{H}_{\tilde\omega}$ sur E'_p, alors

$$(E'_p u)(x) = \int_\Omega x^{\tilde\nu} y^{\tilde\nu} E_p^{(\tilde\omega')}(x, y) u(y) dy_{\tilde\omega}, \quad p \geqq 0, \tag{7.7}$$

(voir (3.3)). Signalons que $\tilde\omega'$ satisfait, à son tours, à toutes les hypothèses sur $\tilde\omega$ posées dans les paragraphes précédents. Donc, toutes les égalités et inégalités obtenues dans les §§ 3~6 sont utilisables s'il s'agit de $\tilde\omega'$ au lieu de $\tilde\omega$.

Passons maintenant aux problèmes de Dirichlet homogènes elliptique et parabolique. Commençons par le cas elliptique.

Soit $f \in \mathscr{H}_{\tilde\omega}$ donnée quelconque. La solution $u \in D(\Lambda_{\tilde\omega})$ de l'équation

$$\Lambda_{\tilde\omega} u + \lambda u = f, \text{ où } \lambda \in \boldsymbol{C} \backslash \{-\lambda_p\}_{p=0}^{\infty}, \tag{7.8}$$

existe, elle est unique et donnée par

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda + \lambda_p} E'_p f .$$

Elle est représentée ponctuellement (presque partout)

$$u(x) = \int_\Omega \mathscr{G}(x, y; \lambda) f(y) dy_{\tilde\omega} . \tag{7.9}$$

Nous appelons $\mathscr{G}(x, y; \lambda) = \mathscr{G}^{(\tilde\omega)}(x, y; \lambda)$ la fonction de Green pour $\Lambda_{\tilde\omega} + \lambda I$. (7.7) donne tout de suite le

THÉORÈME 7.3. *Soit* $\lambda \in \boldsymbol{C} \backslash \{-\lambda_p\}_{p=0}^{\infty}$. *Alors, la fonction de Green* $\mathscr{G}(x, y; \lambda)$ *est calculée par l'égalité suivante*:

$$(7.10) \qquad \mathscr{G}(x, y; \lambda) = \mathscr{G}^{(\tilde{\omega})}(x, y; \lambda) = x^{\tilde{\nu}} y^{\tilde{\nu}} G^{(\tilde{\omega}')}\left(x, y; \lambda + \frac{\kappa'^2 - \kappa^2}{4}\right),$$

où $G^{(\tilde{\omega}')}$ *est la fonction de Green étudiée dans le* § 5.

Considérons le cas parabolique. Soit également $f \in \mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$ donnée quelconque. La solution $u(t)$ de l'équation d'évolution

$$(7.11) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} u(t) + \Lambda_{\tilde{\omega}} u(t) = 0 , & \text{pour } t > 0 , \\ u(0) = f , \end{cases}$$

existe, elle est unique dans un cadre convenable et donnée par

$$u(t) = e^{-t\Lambda_{\tilde{\omega}}} f = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-t\lambda_p} E'_p f , \quad t \geqq 0 .$$

Elle est de plus représentée ponctuellement (si $t > 0$)

$$(7.12) \qquad u(t; x) = \int_{\Omega} \mathscr{Z}(t; x, y) f(y) dy_{\tilde{\omega}} .$$

Nous appelons $\mathscr{Z}(t; x, y) = \mathscr{Z}^{(\tilde{\omega})}(t; x, y)$ la fonction de Green pour $(\partial/\partial t) + \Lambda_{\tilde{\omega}}$.

THÉORÈME 7.4. *La fonction de Green* $\mathscr{Z}(t; x, y)$ *est calculée par l'égalité suivante*:

$$(7.13) \qquad \mathscr{Z}(t; x, y) = \mathscr{Z}^{(\tilde{\omega})}(t; x, y) = x^{\tilde{\nu}} y^{\tilde{\nu}} \exp\left(\frac{\kappa^2 - \kappa'^2}{4} t\right) Z^{(\tilde{\omega}')}(t; x, y) ,$$

où $Z^{(\tilde{\omega}')}$ *est la fonction de Green étudiée dans le* § 6.

Regardons (7.10) et (7.13) pour λ et $t (> 0)$ fixes. Lorsque y demeure dans Ω et x s'approche d'une point de $\partial\Omega \cap \{x_j = 0\}$ avec $j \in J_-$, $\mathscr{G}(x, y; \lambda)$ et $\mathscr{Z}(t; x, y)$ tendent vers 0, car $G^{(\tilde{\omega}')}$ et $Z^{(\tilde{\omega}')}$ restent bornées.

EXEMPLE 7.5. Nous reprenons l'exemple 5.2, c'est-à-dire, le cas où

$$(7.14) \qquad \omega_j = -1/2, \text{ si } j \in J_-, \quad \omega_j = 1/2 \text{ si } j \in J_+ \text{ et } J_0 = \varnothing .$$

Alors, une substitution de $2i\mu = |J_+| + (n-1)/2$ dans (5.10) nous donne

$$\mathscr{G}(x, y; 0) = 2^{1-3n} \pi^{-n/2} \frac{\Gamma(2n + |J_+|) \Gamma(|J_-|)}{\Gamma\left(\dfrac{3n+2}{2}\right)} \left(\prod_{j \in J_-} \sqrt{x_j y_j}\right)$$

$$\times \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} F\left(2n + |J_+|, |J_-|; \frac{3n+2}{2}; \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{j=0}^{n} \theta_k \sqrt{x_k y_k}\right)\right) d\theta_0 \wedge \cdots \wedge d\theta_n .$$

Voir aussi le § C.

8. Problème de Dirichlet non homogène elliptique. Soit S_j l'intersection de $\partial\Omega$ et de l'hyperplan $\{x_j = 0\}$:

$$S_j = \{x \in \partial\Omega;\, x_j = 0\}\,, \quad 0 \leqq j \leqq n\,, \tag{8.1}$$

elle est munie de la mesure de Lebesgue comme élément de volume:

$$dS_j(x') = \left|\frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{dx_j}\right|\,, \quad 0 \leqq j \leqq n\,. \tag{8.2}$$

Posons

$$S^- = \bigcup_{j \in J_-} S_j \tag{8.3}$$

qui n'est pas vide d'après l'hypothèse $J_- \neq \varnothing$.

Nous allons poser le problème de Dirichlet non homogène pour $L_{\tilde{\omega}}$ d'une manière grossière. Soient $f(x)$ et $g(x')$ les fonctions données dans Ω et sur S^- respectivement. La question est de chercher une fonction $u(x)$ définie sur $\Omega \cup S^-$ satisfaisant à

$$\begin{cases} L_{\tilde{\omega}} u(x) = f(x), \text{ dans } \Omega\,, \\ \text{et à } u(x') = g(x'), \text{ sur } S^-\,. \end{cases} \tag{8.4}$$

Il faudrait préciser les spaces fonctionnels auxquels les données et les solutions appartiennent pour établir la correspondance bi-univoque et continue $(f, g) \leftrightarrow u$. Mais, l'auteur n'arrive pas encore à en étudier. De toute façon, le problème (8.4) est possible pour les données suffisamment régulières, et nous pouvons espérer avoir les solutions uniques parmi les fonctions régulières.

Une telle solution $u(x)$ est exprimée au moyen des données (f, g) comme suivante:

$$u(x) = \int_\Omega \mathscr{G}(x, y) f(y) dy_{\tilde{\omega}} + \sum_{j \in J_-} \int_{S_j} \gamma_j(x, y') g(y') dS_j(y')\,, \quad \text{pour } x \in \Omega\,, \tag{8.5}$$

où $\mathscr{G}(x, y)$ est la fonction de Green pour $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ étudiée dans le § 7:

$$\mathscr{G}(x, y) = \mathscr{G}^{(\tilde{\omega})}(x, y; 0) = x^{\tilde{\nu}} y^{\tilde{\nu}} G^{(\tilde{\omega}')}\left(x, y;\, \frac{\kappa'^2 - \kappa^2}{4}\right)\,, \tag{8.6}$$

et les $\{\gamma_j(x, y')\}_{j \in J_-}$, que nous appelons les noyaux de Poisson pour $\Lambda_{\tilde{\omega}}$, sont définis par

$$\gamma_j(x, y') = \lim_{\substack{y \to y' \\ y \in \Omega}} \{y^{\tilde{\omega}} y_j T_j \mathscr{G}(x, y)\}, \text{ pour } x \in \Omega,\, y' \in S_j \text{ et } j \in J_-\,, \tag{8.7}$$

les T_j (définis par (1.6)) étant opérés par rapport à y. Alors,

PROPOSITION 8.1. *Les noyaux de Poisson $\gamma_j(x, y)$ sont également* *calculés par les formules suivantes:*

$$(8.8)\qquad \gamma_j(x, y') = \lim_{\substack{y \to y' \\ y \in \Omega}} \{\nu_j y^{\tilde{\omega}} \mathscr{G}(x, y)\}\,, \quad \textit{pour } x \in \Omega,\ y' \in S_j \textit{ et } j \in J_-\,.$$

Notons que les limites de (8.8) sont mulles si $j \in J_+ \cup J_0$. La démonstration de la proposition ainsi qu'une justification de l'égalité (8.5) sera faite dans le § D.

9. Quelques exemples des solutions du problème de Dirichlet.

9-1. Soit $\tilde{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n)$ un couple des $n+1$ nombres tels que

$$(9.1)\qquad \mathrm{Re}\, \mu_j + \omega_j + \nu_j > -1, \text{ pour tout } 0 \leqq j \leqq n\,.$$

Cherchons des solutions de l'équation

$$(9.2)\qquad \begin{cases} \mathscr{L}_{\tilde{\omega}} u(x) = x^{\tilde{\mu}}\,, \text{ dans } \Omega\,, \\ u(x') = 0\,, \text{ sur } S^-\,. \end{cases}$$

La fonction $u_{\tilde{\mu}}(x)$ que voici en est une et peut-être la seule:

$$(9.3)\qquad u_{\tilde{\mu}}(x) = \int_\Omega \mathscr{G}(x, y) y^{\tilde{\mu}} dy_{\tilde{\omega}}$$

$$= \sum_{\tilde{\alpha} \in N^{n+1}} \frac{\Gamma\left(|\tilde{\alpha}| + \frac{\kappa' - \kappa}{2}\right)\Gamma\left(|\tilde{\alpha}| + \frac{\kappa' + \kappa}{2}\right)(\tilde{\alpha} + \tilde{\mu} + \tilde{\omega} + \tilde{\nu})!}{\left(|\tilde{\alpha}| + n + \sum_{j=0}^{n} (\mu_j + \omega_j + \nu_j)\right)!\ \tilde{\alpha}!(\tilde{\alpha} + \tilde{\omega}')!} x^{\tilde{\alpha} + \tilde{\nu}}$$

(voir les conventions au § 2, surtout (2.4), et $(5.5)_3$).

Voici quelques exemples de la simplification de cette somme. Soit d'abord $\tilde{\mu} = \tilde{\nu}$. Comme $x^{\tilde{\nu}}$ est la fonction propre appartenant à λ_0, nous avons

$$(9.4)\qquad u_{\tilde{\nu}}(x) = \frac{1}{\lambda_0} x^{\tilde{\nu}}\,.$$

9-2. Posons $\tilde{\mu} = -\tilde{\omega} - \tilde{\nu}$, 0 et $-\tilde{\omega}$ dans (9.3). Alors nous avons

$$(9.5)\qquad u_{-\tilde{\omega}-\tilde{\nu}}(x) = \frac{1}{n!}\left\{\Gamma\left(\frac{\kappa' - \kappa}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\kappa' + \kappa}{2}\right)\Big/\prod_{j \in J_+ \cup J_-} \Gamma(\omega_j')\right\} x^{-\tilde{\omega}-\tilde{\nu}}$$

$$\times \prod_{j \in J_+ \cup J_-} \int_0^{x_j} \cdot u_j^{\omega_j'-1} du_j F\left(\frac{\kappa' - \kappa}{2}, \frac{\kappa' + \kappa}{2}; n+1; 1 - \sum_{j \in J_+ \cup J_-} u_j\right),$$

$$(9.6)\qquad u_0(x) = \frac{2}{\kappa' + \kappa}\left\{\Gamma\left(\frac{\kappa' - \kappa}{2}\right)\Big/\prod_{j \in J_-} \Gamma(\omega_j')\right\}$$

$$\times \prod_{j \in J_-} \int_0^{x_j} \cdot u_j^{\omega_j'-1} du_j F\left(\frac{\kappa' - \kappa}{2}, \frac{\kappa' + \kappa}{2}; \frac{\kappa' + \kappa}{2} + 1; 1 - \sum_{j \in J_-} u_j\right).$$

Et, si $J_+ \neq \varnothing$,

$$(9.7)\quad u_{-\tilde{\omega}}(x) = \left\{\Gamma\left(\frac{\kappa' - \kappa}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\kappa' + \kappa}{2}\right)\Big/\left(\left(n + \frac{\kappa' - \kappa}{2}\right)!\ \prod_{j \in J_+} \Gamma(\omega_j)\right)\right\} x^{-\tilde{\omega}}$$
$$\times \prod_{j \in J_+} \int_0^{x_j} \cdot u_j^{\omega_j - 1} du_j F\left(\frac{\kappa' - \kappa}{2},\ \frac{\kappa' + \kappa}{2};\ n + \frac{\kappa' - \kappa}{2} + 1;\ 1 - \sum_{j \in J_+} u_j\right).$$

9-3. Pour être plus précis le résultat, simplifions encore la forme de $u_0(x)$ lorsque

$$(9.8)\qquad \omega_j = -1, \text{ pour tout } 0 \leqq j \leqq n\,,$$

c'est-à-dire, $u_0(x)$ est la solution de l'équation

$$(9.9)\qquad \begin{cases} -\sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = 1, \text{ dans } \Omega \\ \text{et } u(x') = 0, \text{ sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

(9.6) signifie alors que

$$(9.10)\qquad u_0(x) = (n-1)! \int_0^{x_0} \cdots \int_0^{x_n} \left(\sum_{j=0}^{n} u_j\right)^{-n} du_0 \wedge \cdots \wedge du_n$$
$$= \sum_{\substack{K \subset \{0,1,\cdots,n\} \\ K \neq \varnothing}} (-1)^{|K|} \left(\sum_{k \in K} x_k\right) \log\left(\sum_{k \in K} x_k\right),$$

où la dernière somme s'étend sur tous les sous-ensembles non-vides de $\{0, 1, \cdots, n\}$ et $|K|$ est le nombre d'elements de $|K|$. Cette solution prend son maximum au centre de gravitation $x^G = (1/(n+1), \cdots, 1/(n+1))$ de Ω:

$$(9.11)\qquad u_0(x^G) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} j \log j\,.$$

9-4. En passant maintenant au problème non homogène, nous démontrons l'égalité suivante:

$$(9.12)\qquad \sum_{j \in J_-} \int_{S_j} \gamma_j(x, y') dS_j(y') \equiv 1, \text{ dans } \Omega\,.$$

Celle-ci est évidente grâce au principe du maximum. Mais, nous allons la réaffirmer en calculant chaque terme à gauche

$$(9.13)\qquad U_j(x) = \int_{S_j} \gamma_j(x, y') dS_j(y'),\ x \in \Omega \text{ et } j \in J_-\,.$$

Si J_- ne contient qu'un seul élément, la vérification de $U_j(x) \equiv 1$ est simple. On y utilise (8.8), (8.6), $(5.5)_1$, (4.4) et (2.4).

9-5. Supposons maintenant que J_- contienne $m+1$ éléments. Soit par exemple

(9.14) $$J_- = \{0, 1, \cdots, m\} \text{ avec } 1 \leqq m \leqq n .$$

Considerons le m-simplexe Ω_m dans $\boldsymbol{R}^m$:

(9.15) $$\Omega_m = \{v = (v_1; \cdots, v_m);\ v_k > 0,\ 0 \leqq k \leqq m\}, \text{ où } v_0 = 1 - \sum_{k=1}^{m} v_k .$$

Alors, un donné de $x \in \Omega$ divise Ω_m en $m+1$ parties disjointes:

(9.16) $$D_{m,j}(x) = \left\{v \in \Omega_m;\ \frac{v_k}{x_k} \leqq \frac{v_j}{x_j},\ 0 \leqq k \leqq m\right\},\ 0 \leqq j \leqq m .$$

Et, nous avons l'expression de $U_j(x)$ définie par (9.13) comme suit:

(9.17) $$U_j(x) = \left\{\Gamma\left(\sum_{k=0}^{m} \omega'_k\right) \Big/ \prod_{k=0}^{m} \Gamma(\omega'_k)\right\} \int_{D_{m,j}(x)} \left(\prod_{k=0}^{m} v_k^{\omega'_k - 1}\right) dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_m ,$$
$$\text{pour } x \in \Omega \text{ et } 0 \leqq j \leqq m ,$$

ce qui prouve (9.12), parce que

(9.18) $$\int_{\Omega_m} \left(\prod_{k=0}^{m} v_k^{\omega'_k - 1}\right) dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_m = \left\{\prod_{k=0}^{m} \Gamma(\omega'_k)\right\} \Big/ \Gamma\left(\sum_{k=0}^{m} \omega'_k\right) .$$

9-6. Soient en particulier

(9.19) $$\omega_j = -1, \text{ pour tout } 0 \leqq j \leqq n .$$

Dans ce cas, les $U_j(x) (0 \leqq j \leqq n)$ sont les solutions de

(9.20) $$\begin{cases} -\sum_{p,q=1}^{n} (\delta_{pq} x_p - x_p x_q) \dfrac{\partial^2 U_j}{\partial x_p \partial x_q} = 0, \text{ dans } \Omega ; \\ U_j(x') = 1, \text{ sur } S_j; \text{ et } U_j(x') = 0, \text{ sur } \partial\Omega \backslash S_j;\ 0 \leqq j \leqq n . \end{cases}$$

(9.17) signifie alors que

(9.21) $$U_j(x) = \frac{\text{vol. } D_j(x)}{\text{vol. } \Omega}, \text{ où } D_j(x) = \left\{y \in \Omega;\ \frac{y_k}{x_k} \leqq \frac{y_j}{x_j},\ 0 \leqq k \leqq n\right\},$$
$$\text{pour } x \in \Omega \text{ et } 0 \leqq j \leqq n ,$$

les volumes des $D_j(x)$ et Ω sont pris au sens ordinaire (les mesures de Lebesgue).

Les démonstrations des (9.5) $\sim$ (9.7) et (9.17) seront données dans le § E.

A. Preuves des lemmes 1.1 et 7.1. Commençons par la preuve du lemme 1.1, qui se divise en quelques étapes.

(1°) $\mathring{\mathscr{V}}_{\omega}^{\sim} = \mathscr{V}_{\omega}^{\sim}$ *si et seulement si* $1 \in \mathring{\mathscr{H}}_{\omega}^{\sim}$.

Montrons que $1 \in \mathring{\mathscr{V}}_{\omega}^{\sim}$ implique $\mathring{\mathscr{V}}_{\omega}^{\sim} = \mathscr{V}_{\omega}^{\sim}$ (l'implication d'autre sens étant évidente). Soit $\{\varphi_N(x)\}_{N=1}^{\infty}\subset C_0^\infty(\Omega)$ une suite tendant vers 1 avec $N\to\infty$. Il suffit de verifier, pour chaque $u\in C^\infty(\Omega)$ fixe, que $\varphi_N u$ tend vers u avec $N\to\infty$. Mais ceci est evident, parce que l'on a $a(\varphi_N u-u, \varphi_N u-u)\leqq Ca(\varphi_N-1, \varphi_N-1)$, où

$$C=C_u=2\sup_{x\in\Omega}\left\{\sum_{j,k=1}^{n}(\delta_{jk}x_j-x_jx_k)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k}+u\bar{u}\right\}<+\infty .$$

(2°) $1\in\overset{\circ}{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$ *si* (1.5) *a lieu.*

Soit $\zeta(t)$ une fonction $\in C^\infty(\boldsymbol{R})$ qui vaut 1 pour $t\geqq 0$ et vaut 0 pour $t\leqq -1$, et posons, pour $N=1, 2, \cdots$,

$$\text{(A.1)}\qquad \varphi_N(x)=\prod_{j=0}^{n}\zeta\left(\frac{\xi_j+N}{N}\right),\ \text{où } \xi_j=\log x_j,\ 0\leqq j\leqq n.$$

Alors $\varphi_N\in C_0^\infty(\Omega)$ et il est facile de voir que $\varphi_N\to 1$ dans $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}}$.

(3°) $1\notin\overset{\circ}{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$ *si* $\omega_1<0$.

Si $\omega_1\leqq -1$, alors $1\notin\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$ donc $1\notin\overset{\circ}{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$ non plus. Soit maintenant $-1<\omega_1<0$. Posons $J_1=[0,\delta](0<\delta<1)$ et $J'=\prod_{j=2}^{n}[a_j, b_j](0<a_j<b_j<1, 2\leqq j\leqq n)$ avec $\delta+\sum_{j=2}^{n}b_j<1$. Alors, le produit $J=J_1\times J'$ est contenu dans $\bar{\Omega}\backslash\{x_0=0\}$. Dans J, la matrice $(\delta_{jk}x_j-x_jx_k)_{j,k=1,\cdots,n}$ équivaut diag. $(x_1, 1, \cdots, 1)$ et le poid $x^{\tilde{\omega}}$ équivaut $x_1^{\omega_1}$. Il suffit donc de vérifier qu'il n'existe pas de suite $\{\varphi_N\}_{N=1}^{\infty}\subset C^\infty(J)$ s'annulant à des voisinages (dépendents de N) de $x_1=0$ telle que

$$\text{(A.2)}\quad \int_{J'}dx_2\cdots dx_n\int_{J_1}\left\{x_1\left|\frac{\partial\varphi_N}{\partial x_1}\right|^2+\sum_{j=2}^{N}\left|\frac{\partial\varphi_N}{\partial x_j}\right|^2+|\varphi_N-1|^2\right\}x_1^{\omega_1}dx_1\to 0 .$$

Posons $y_1=y_1(x_1)=-x_1^{-\omega_1}/\omega_1$ et $\delta'=y_1(\delta)$. Alors, (A.2) signifie que

$$\begin{cases}\text{(A.3)}\quad \displaystyle\int_{J'}dx_2\cdots dx_n\int_0^{\delta'}\left|\frac{\partial\varphi_N}{\partial y_1}\right|^2dy_1\equiv\varepsilon_N\to 0, \text{ et que ,}\\ \text{(A.4)}\quad \displaystyle\int_{J'}dx_2\cdots dx_n\int_0^{\delta'}|\varphi_N-1|^2y_1^{-(1/\omega_1)-2}dy_1\to 0 .\end{cases}$$

Montrons que (A.4) est en contraction avec (A.3). En effet, $\varphi_N(x)=\int_0^{y_1}(\partial\varphi_N/\partial y_1)dy_1$ et (A.3) impliquent $\int_0^{\delta'}|\varphi_N|^2y_1^{-(1/\omega_1)-2}dy_1\leqq\text{Cte}\int_0^{\delta'}|\partial\varphi_N/\partial y_1|^2dy_1$, d'où $\int_{J'}dx_2\cdots dx_n\int_0^{\delta'}|\varphi_N|^2y_1^{-(1/\omega_1)-2}dy_1=O(\varepsilon_N)\to 0$. Ceci n'est pas compatible avec (A.4). La preuve du lemme 1.1 est terminée.

Démontrons ensuite le lemme 7.1. Il est d'abord évident que $x^{\tilde{\nu}}\cdot$ est une isométrie de $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}'}$ sur $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$. Introduisons maintenant des nouveaux produits scalaire $b_{\tilde{\omega}'}$ sur $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}'}$ et $b_{\tilde{\omega}}$ sur $\overset{\circ}{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$:

$$(\mathrm{A}.5)\qquad \begin{aligned} b_{\tilde{\omega}'}(u, v) &= a_{\tilde{\omega}'}(u, v) + \frac{\kappa'^2}{4}(u, v)_{\tilde{\omega}'}, \text{ et },\\ b_{\tilde{\omega}}(u, v) &= a_{\tilde{\omega}}(u, v) + \frac{\kappa^2}{4}(u, v)_{\tilde{\omega}} . \end{aligned}$$

Alors, l'espace $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}'}$ (resp. $\mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$) muni de $b_{\tilde{\omega}'}$ (resp. $b_{\tilde{\omega}}$) est isomorphe à $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}'}$ (resp. $\mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$) original, et de plus, nous avons

$$(\mathrm{A}.6)\qquad b_{\tilde{\omega}'}(x^{-\tilde{\nu}}u, x^{-\tilde{\nu}}v) = b_{\tilde{\omega}}(u, v) \text{ pour } u \text{ et } v \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

qui signifie que

(4°) $x^{-\tilde{\nu}}\cdot$ *est une isométrie de* $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}'}$ *(muni de* $b_{\tilde{\omega}'}$*) dans* $\mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$ *(muni de* $b_{\tilde{\omega}}$*).*

D'autre part un raisonnement analogue au (2°) montre que

(5°) $x^{\tilde{\nu}} \in \mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$.

Ceci et un raisonnement analogue au (1°) entraînnent que

(6°) $x^{\tilde{\nu}}\cdot$ *est une isométrie de* $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}'}$ *dans* $\mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$.

Par (4°) et (6°), l'image de $\mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$ par $x^{-\tilde{\nu}}$ est fermé dans $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}'}$, mais elle est dense dans $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}'}$, car $C_0^\infty(\Omega) = x^{-\tilde{\nu}}C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$ et dans $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}'}$. Donc, cet image occupe $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}'}$ tout entier, c'est-à-dire, $x^{-\tilde{\nu}}\cdot$ est une isométrie surjective.

Dernièrement, (7.5) est une conséquence des définitions mêmes des $L_{\tilde{\omega}'}$ et $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ et de l'isométrie ci-dessus entre $\mathscr{V}_{\tilde{\omega}'}$ et $\mathring{\mathscr{V}}_{\tilde{\omega}}$.

Le lemme 7.1 est donc établi.

B. Démonstrations des propositions 3.1 et 3.2. Nous annonçons tout d'abord les deux bases $\{P_\alpha(x);\, \alpha \in N^n\}$ et $\{Q_\alpha(x);\, \alpha \in N^n\}$ ayant la propriété (3.2) comme suit: Soit $\alpha \in N^n$. Avec les conventions au § 2, nous posons $\breve{\alpha} = (|\alpha|, \alpha) \in N^{n+1}$. Alors,

$$(\mathrm{B}.1)\qquad P_\alpha(x) = x^{-\tilde{\omega}}\partial^\alpha(x^{\check{\alpha}+\tilde{\omega}}), \text{ et },$$

$$(\mathrm{B}.2)\qquad Q_\alpha(x) = \frac{(|\breve{\alpha}| + \kappa)!}{(\breve{\alpha} + \tilde{\omega})!\ \alpha!\,(-1)^{|\alpha|}}\{x^\alpha + \sum_{\substack{\beta \leqq \alpha\\ \beta \neq \alpha}} C_{\alpha,\beta}x^\beta\}\,.$$

Nous expliquons ensuite d'où viennent ces bases.

(1°) *Les* l_p *sont des valeurs propres de* $L_{\tilde{\omega}}$.

Supposons qu'un polynôme $u(x)$ d'ordre p soit une fonction propre de $L_{\tilde{\omega}}$ appartenant à une valeur propre λ. Ecrivons-la

$$(\mathrm{B}.3)\qquad u(x) = \sum_{q=0}^{n} u_q(x), \text{ avec } u_p(x) \neq 0\,,$$

où u_q est la partie homogène d'ordre q de u. D'autre part, $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$ s'écrit

(B.4) $$\mathscr{L}_{\tilde{\omega}} = \mathscr{L}^0 + \mathscr{L}^1, \text{ avec } \mathscr{L}^0 = T_0^2 - \kappa T_0 \text{ (voir (1.6))} .$$

Alors, $\mathscr{L}^0 u_q = l_q u_q$ (par l'égalité d'Euler), et $\mathscr{L}^1 u_q$ est homogène d'ordre $q-1$ (et nul si $q=0$). Donc, nous avons, par l'équation $L_{\tilde{\omega}} u = \lambda u$,

(B.5) $$\begin{cases} (\lambda - l_p)u_p = 0 , \\ \text{et } (\lambda - l_q)u_q = \mathscr{L}^1 u_{q+1}, \text{ pour } 0 \leqq q \leqq p-1 . \end{cases}$$

Comme u_p est non nul, λ doit être égal à l_p par la première équation de (B.5). Une fois qu'on choisit une u_p, les autres u_q se déterminent successivement par la deuxième équation de (B.5), car l_q sont distinctes. Le choix $u_p(x) = x^\alpha$ avec $|\alpha| = p$ donne $Q_\alpha(x)$ ci-dessus au facteur multiplicatif près. Donc (1°) est démontré.

(2°) *$\{l_p\}_{p=0}^\infty$ est le spectre entier de $L_{\tilde{\omega}}$.*

Le système $\{Q_\alpha(x); \alpha \in N^n\}$ est complet dans $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$, car il engendre tous les polynômes. Donc (2°) est démontré et de plus chaque l_p a la multiplicité $N_p = \binom{n+p-1}{p}$ qui est égal au nombre des multi-indices α avec $|\alpha| = p$.

(3°) *$P_\alpha(x)$ est une fonction propre appartenant à $l_{|\alpha|}$.*

Posons $|\alpha| = p$, $v = \partial^\alpha w$ et $w = x^{\check{\alpha}+\tilde{\omega}}$. Pour vérifier l'équation $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}} P_\alpha = l_p P_\alpha$, il suffit de voir que

(B.6) $$\mathscr{L}_{-\tilde{\omega}} v = (p+n)(p+\kappa-n)v \text{ (voir (7.4))} .$$

Mais (2.7) et (1.7) donnent

(B.7) $$\mathscr{L}_{-\tilde{\omega}} v = \partial^\alpha[\{\mathscr{L}_{-\tilde{\omega}} + pT_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j T_j + p(p+\kappa-2n)\}w] .$$

Et (2.5) et (2.6) entraînnent que la fonction entre [ ] est égale à

$(p+n)(p+\kappa-n)w$, d'où (B.6).

(4°) *Preuve de la relation biorthogonale* (3.2).

(3.2) pour $|\alpha| = |\beta|$ se voit par les définitions mêmes des P_α et Q_β et par intégrations par parties. Pour $|\alpha| \neq |\beta|$, (3.2) est vraie, parce que P_α et Q_β appartiennent aux valeurs propres distinctes. Donc, (3.2) est établie. Elle signifie aussi la totalité de $\{P_\alpha; \alpha \in N^n\}$ dans $\mathscr{H}_{\tilde{\omega}}$.

La proposition 3.1 est démontrée. Passons maintenant à la vérification de la proposition 3.2.

D'après (3.7), chaque membre u de (3.8) satisfait à l'équation $L_{\tilde{\omega}} u = \lambda_p u$ par rapport à x et à y. Ensuite, par le développement, nous voyons que les parties homogènes d'ordre p en x et d'ordre p en y des deux côtés de (3.8) sont les mêmes. Donc, par un raisonnement analogue à celui au (1°) enfin donne l'égalité (3.8).

C. Interprétation de $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$ sur la sphère unitaire S^n. Soit Ω le n-simplexe dans $\boldsymbol{R}^n$ comme toujours, et considérons de nouveau la sphère unitaire S^n dans $\boldsymbol{R}^{n+1}$:

$$S^n = \{Y = {}^t(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n) \in \boldsymbol{R}^{n+1}; \sum_{j=0}^{n} Y_j^2 = 1\} .$$

Nous désignons par x (resp. X) un point fixe quelconque de Ω (resp. S^n) et par y (resp. Y) le point variable de Ω (resp. S^n). Soit Σ une 2^{n+1}-ième de S^n définie par

$$\text{(C.1)} \qquad \Sigma = \{Y \in S^n;\ Y_j > 0 \ \ (0 \leqq j \leqq n)\} .$$

Nous définissons alors un difféomorphisme $\Psi\colon \Omega \longrightarrow \Sigma$ par

$$\text{(C.2)} \qquad Y_j = (\Psi(y))_j = \sqrt{y_j} \text{ (de même } X_j = (\Psi(x))_j = \sqrt{x_j}\text{), pour } 0 \leqq j \leqq n .$$

Ω est ainsi plongé dans S^n par Ψ qui est singulier sur $\partial\Omega$.

Soit ensuite Γ le groupe commutatif fini des difféomorphismes sur S^n engendré par les $g_0, g_1, \cdots, g_n$ dont chacun g_j est, par définition, la symmétrie par rapport à l'hyperplan $Y_j = 0$. S^n est donc couverte par $\{g(\bar{\Sigma}); g \in \Gamma\}$ sauf répétition des images de $\partial\Sigma$.

Soit maintenant $(g_{jk}(y))_{j,k=1,\cdots,n}$ l'inverse de la matrice formée par les coefficients des termes d'ordre 2 de $L_{\tilde{\omega}}$:

$$\text{(C.3)} \qquad g_{jk}(y) = \frac{\delta_{jk}}{y_j} + \frac{1}{y_0}, \text{ pour } 1 \leqq j, k \leqq n .$$

Celle-ci nous ramène à définir une métrique riemannienne sur Ω:

$$\text{(C.4)} \qquad d\sigma^2 = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}(y) dy_j dy_k = \sum_{j=0}^{n} \frac{(dy_j)^2}{y_j} = 4 \sum_{j=0}^{n} (dY_j)^2, \text{ si } Y = \Psi(y) ,$$

où $(1/4)d\sigma^2$ n'est autre que la métrique riemannienne naturelle sur S^n restreinte à Σ. Et, l'élément de volume sur Ω induit par cette métrique est

$$\text{(C.5)} \qquad \left(\prod_{j=0}^{n} y_j^{-1/2}\right) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

qui est égal d'une part à $dy_{\tilde{\omega}}$ avec $\omega_j = -1/2$ $(0 \leqq j \leqq n)$ et d'autre part à 2^n fois de l'élément de volume naturelle sur Σ.

Cela posé, nous cherchons ensuite la forme générale des courbes géodésiques sur Ω. Comme il est évident, les courbes géodésiques sur

S^n émergeant d'un point X sont les grands cercles passant par X et elles se paramétrisent comme suit:

$$\text{(C.6)} \qquad Y = \left(\cos\frac{\sigma}{2}\right)X + \left(\sin\frac{\sigma}{2}\right)\Xi, \text{ avec } \quad \sigma \geqq 0\ ,$$

où $\Xi = {}^t(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ parcourt la grande shère Σ'_X orthogonale à X:

$$\text{(C.7)} \qquad \Sigma'_X = \left\{\Xi \in S^n;\ \sum_{j=0}^{n} X_j\xi_j = 0\right\} \approx S^{n-1}\ .$$

Soit $X = \Psi(x)$ avec $x \in \Omega$, et prenons un grand cercle C passant par X. En le pliant dans $\bar{\Sigma}$ au moyen des éléments de Γ, nous obtenons une courbe brisée et fermée C' dans $\bar{\Sigma}$. Son image réciproque $\Psi^{-1}(C')$ sur $\bar{\Omega}$ est alors une courbe géodésique dans Ω en passant par x. Autrement dit, toutes les ellipses dans $\bar{\Omega}$ qui touchent une fois à chaque hyperplan $y_j = 0$ $(0 \leqq j \leqq n)$ sont des courbes géodésiques dans $\bar{\Omega}$. Elles se paramétrisent donc

$$\text{(C.8)} \qquad \pm\sqrt{y_j} = \sqrt{x_j}\cos\frac{\sigma}{2} + \xi_j \sin\frac{\sigma}{2}\ , \quad 0 \leqq j \leqq n\ ,$$

où l'on prend l'un des signes à gauche conformément au signe du droit, et σ donne exactement la distance entre x et y le long de cette courbe.

Maintenant, étant donnés des deux points x et y de Ω en positions générales, il existe exactement 2^n courbes géodésiques dans $\bar{\Omega}$ qui passent par x et y, parce que nous devons tenir compte de tous les grands cercles sur S^n dont chacun passe par X et $g(Y)$ pour certain $g \in \Gamma$ et que $g(Y)$ et $-g(Y)$ sont situés sur un même grand cercle. Parmi ces 2^n courbes, celle qui atteint la distance minimale entre x et y se détermine de la manière unique. Elle est l'ellipse qui lie x et y avant toucher aux hyperplans $y_j = 0\,(0 \leqq j \leqq n)$. Par conséquent, la distance minimale entre x et y est donnée par la formule suivante:

$$\text{(C.9)} \quad \sigma = \sigma(x, y) = \sigma(y, x) = 2\,\mathrm{Cos}^{-1}\left(\sum_{j=0}^{n} \sqrt{x_j y_j}\right), \text{ avec } 0 \leqq \sigma < \pi\ .$$

C'est par cette raison que la quantité σ paraît dans le dévelopement asymptotique (6.9) de $Z(t; x, y)$.

Soient, en particulier,

$$\text{(C.10)} \qquad \omega_j = -1/2 \text{ pour tout } 0 \leqq j \leqq n\ .$$

Dans ce cas, l'explication géometrique ci-dessus est très convenable pour interpréter $L_{\tilde{\omega}}$ sur S^n. Désignons par $\triangle$ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^n. Alors, les réalisations $L_{\tilde{\omega}}$ et $\Lambda_{\tilde{\omega}}$, qui sont toutes les deux possibles, sont exactement les $(1/4)\triangle|\Sigma$ réalisés par les conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet respectivement. En connaissant la fonction de Green pour $(1/4)\triangle + \lambda I$ sur S^n toute entière, nous pouvons écrire les fonctions de Green pour $L_{\tilde{\omega}} + \lambda I$ et pour $\Lambda_{\tilde{\omega}} + \lambda I$ au moyen des symmétries. Ce résultat classique a été redémontré comme les formules (5.9) et (7.15).

D. Démonstrations de la proposition 8.1 et de (8.5). Nous ecrivons simplement $G^{(\tilde{\omega}')}(x, y; (\kappa'^2 - \kappa^2)/4) = \mathscr{G}(x, y)$, donc

$$\text{(D.1)} \qquad \mathscr{G}(x, y) = x^{\tilde{\nu}} y^{\tilde{\nu}} G(x, y), \text{ et } G(x, y) = 2\int_0^\infty \Psi^{(\tilde{\omega}')}(t; x, y) t^{-\kappa-1} dt .$$

Utilisons (2.6) (avec $\tilde{\nu}$ au lieu de $\tilde{\alpha}$) pour avoir

$$\text{(D.2)} \qquad y^{\tilde{\omega}} y_j T_j \mathscr{G}(x, y) = x^{\tilde{\nu}} y^{\tilde{\nu}+\tilde{\omega}} \left\{ \nu_j G(x, y) - y_j \left(\sum_{k=0}^n \nu_k \right) G(x, y) + y_j T_j G(x, y) \right\} .$$

Le point x est toujours fixe dans Ω et $y \in \Omega$ est voisin d'un point y' de $\partial\Omega$.

(1°) *$G(x, y)$ reste bornée lorsque $y \to y' \in \partial\Omega$.*

Tous les ω_j' étant $\geqq 0$, il existe une constante $C = C(\tilde{\omega})$ telle que $\mathscr{F}^{(\tilde{\omega}')}(s^2; x, y) \leqq C \exp(2s \sum_{j=0}^n \sqrt{x_j y_j})$. Et de plus, comme x et y sont loins de l'un de l'autre, il existe un $\delta > 0$ tel que $\sum_{j=0}^n \sqrt{x_j y_j} \leqq 1 - \delta$. Donc, par (4.4) et (D.1), nous avons

$$|G(x, y)| \leqq \mathrm{Cte} \cdot \int_0^\infty t^{-\kappa-1} dt \int_0^\infty s^{\kappa'-1} \exp\left\{ -s\left(t + \frac{1}{t} - 2 + \delta \right) \right\} ds$$
$$\leqq \mathrm{Cte} \cdot \left(\int_0^1 t^{\kappa'-\kappa-1} dt + \int_1^\infty t^{-\kappa'-\kappa-1} dt \right) = \mathrm{Cte} \cdot < +\infty ,$$

car $\kappa' > \pm\kappa$. D'où l'assertion. Il existe de plus la limite $G(x, y')$.

(2°) *$T_j G(x, y)$ reste bornée lorsque $y \to y' \in S_j$.*

Nous avons

$$\text{(D.3)} \qquad T_j \mathscr{F}^{(\tilde{\omega}')}(s^2; x, y) = s^2 x_j \mathscr{F}_j^{(\tilde{\omega}')}(s^2; x, y) - \frac{s}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mathscr{F}^{(\tilde{\omega}')}(s^2; x, y) ,$$

où $\mathscr{F}_j^{(\omega')}$ est la fonction $\mathscr{F}^{(\tilde{\omega}')}$ mais avec $(\omega_0', \cdots, \omega_{j-1}', 1+\omega_j', \omega_{j+1}', \cdots, \omega_n')$ au lieu de $\tilde{\omega}$. Dans la représentation intégrale de $T_j G$, le terme contenant $(\partial/\partial s)\mathscr{F}^{(\tilde{\omega}')}$ est traité par intégration par parties en s. Alors, une majoration analogue au (1°) nous montre l'assertion.

Nous avons demontré donc, pour $y' \in S_j$,

$$\text{(D.4)} \qquad \lim_{\substack{y \to y' \\ y \in \Omega}} \{ y^{\tilde{\omega}} y_j T_j \mathscr{G}(x, y) \} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{y \to y' \\ y \in \Omega}} \{ \nu_j y^{\tilde{\omega}} \mathscr{G}(x, y) \}, & \text{si } j \in J_- , \\ 0 & , \text{ si } j \in J_+ \cup J_0 , \end{cases}$$

ce qui établit la proposition 8.1.

Nous passons maintenant à (8.5). Soit $u(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et posons $f(x) = \mathscr{L}_{\tilde{\omega}} u(x)$ et $g(x') = u(x')$. Nous justifions (8.5) pour ce couple de (u, f, g). D'abord $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}}$ (par rapport à y) s'écrit

(D.5) $$\mathscr{L}_{\tilde{\omega}} u = - y^{-\tilde{\omega}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} (y^{\tilde{\omega}} y_j T_j u) ,$$

et nous avons

(D.6) $$\begin{aligned}&\{(\mathscr{L}_{\tilde{\omega}} u)(y) \cdot \overline{v(y)} - u(y)\overline{(\mathscr{L}_{\tilde{\omega}} v)(y)}\} dy_{\tilde{\omega}} \\ &\quad = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} [y^{\tilde{\omega}} y_j \{u(y) \cdot (T_j \bar{v})(y) - (T_j u)(y) \cdot \overline{v(y)}\}] dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n .\end{aligned}$$

Nous l'appliquons pour u ci-dessus et pour $\overline{v(y)} = \mathscr{G}(x, y)$, où $x \in \Omega$ fixe.

Nous utilisons la paramétrisation autour de $y = x$ étudiée dans le § C:

(D.7) $$\sqrt{y_j} = \sqrt{x_j} \cos \frac{\sigma}{2} + \xi_j \sin \frac{\sigma}{2} , \quad 0 \leqq j \leqq n, \sigma \geqq 0 \text{ et } \Xi \in \Sigma'_X .$$

Ceci nous permet de choisir un voisinage $V_\varepsilon(x)$ de x:

(D.8) $$V_\varepsilon(x) = \{y \in \bar{\Omega}; 0 \leqq \sigma < \varepsilon\} , \quad 0 < \varepsilon \ll 1 ,$$

de sorte que $\overline{V_\varepsilon(x)} \subset \Omega$. Intégrons chaque côté de (D.6) sur $\Omega \backslash V_\varepsilon(x)$ pour avoir

(D.9) $$\begin{aligned}&\int_{\Omega \backslash V_\varepsilon(x)} \mathscr{G}(x, y) f(y) dy_{\tilde{\omega}} + \sum_{j \in j_-} \int_{S_j} \gamma_j(x, y') g(y') dS_j(y') \\ &\qquad = I_\varepsilon(x) \ (= \text{une intégrale sur } \partial V_\varepsilon(x)),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (D.4) et le fait $\mathscr{L}_{\tilde{\omega}} \mathscr{G}(x, y) = 0$ pour $x \neq y$. Lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, le premier membre à gauche tend vers $\int_\Omega \mathscr{G}(x, y) f(y) dy_{\tilde{\omega}}$, car $\mathscr{G}(x, y)$ est presque partout positive et intégrable sur Ω (voir par exemple (9.3) et (D.11) ci-dessous). Il faut maintenant établir

(D.10) $$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_\varepsilon(x) = u(x) .$$

Une majoration (pas difficile) donne

(D.11) $$\mathscr{G}(x, y) = \begin{cases} O\left(\log \dfrac{1}{\sigma}\right), & \text{si } n = 2 , \\ O(\sigma^{2-n}), & \text{si } n \geqq 3 . \end{cases} \qquad \text{lorsque } y \to x ,$$

Et, $|x - y| (\partial \mathscr{G} / \partial y_j)(x, y)$ $(1 \leqq j \leqq n)$ ont les mêmes estimations. Donc, un calcul explicite de $T_j G$ et (D.2) nous donnent

$$\text{(D.12)}\qquad \left| I_\varepsilon(x) + x^{\tilde{\omega}'}u(x)\int_{\partial V_\varepsilon(x)} W(x, y)\right| = \begin{cases} O\left(\varepsilon \log \dfrac{1}{\varepsilon}\right), & \text{si } n = 2\,, \\ O(\varepsilon), & \text{si } n \geqq 3\,, \end{cases}$$

où $W(x, y)$ est $(n-1)$-forme en y définie par

$$\text{(D.13)}\qquad W(x, y) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} y_j T_j G(x, y) dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_j} \wedge \cdots \wedge dy_n\,.$$

La question est maintenant de vérifier

$$\text{(D.14)}\qquad \int_{\partial V_\varepsilon(x)} W(x, y) \longrightarrow -x^{-\tilde{\omega}'}, \text{ lorsque } \varepsilon \downarrow 0\,.$$

Dans la paramétrisation (D.7), soit $dv(\xi)$ l'élément de volume sur Σ'_X induit par la métrique riemannienne $\sum_{j=0}^{n}(d\xi_j)^2$. Alors, nous voyons

$$\text{(D.15)}\qquad \left\{\left(\prod_{j=0}^{n} y_j^{-1/2}\right) W(x, y)\right\}\Big|_{\partial V_\varepsilon(x)} = \left(2\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-1} \frac{\partial}{\partial \sigma} G(x, y)\Big|_{\sigma=\varepsilon} dv(\xi)\,.$$

Et dernièrement, (4.8) et (D.1) entraînnent

$$\text{(D.16)}\qquad \varepsilon^{n-1}\int_{\partial V_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial \sigma} G(x, y)\Big|_{\sigma=\varepsilon} dv(\xi) \longrightarrow -x^{-\tilde{\omega}'}\left(\prod_{j=0}^{n} x_j^{-1/2}\right).$$

(vérification omise). Les (D.15) et (D.16) impliquent (D.14), d'où (D.10).
La formule (8.5) est donc justifiée.

E. Démonstrations des (9.5), (9.6), (9.7) et (9.17). Commençons par les trois premières. Soit H un sous-ensemble de $\{0, 1, \cdots, n\}$ ayant la propriété que

$$\text{(E.1)}\qquad \omega_j \neq 0\,, \text{ si } j \in H\,.$$

Posons alors

$$\text{(E.2)}\qquad \begin{cases} U_H(x) = \left(\prod_{j\in H} x_j^{\omega'_j}\right) \sum_{\tilde{\alpha}\in N^{n+1}} C_H(\tilde{\alpha}) x^{\tilde{\alpha}}, \\ \text{où } C_H(\tilde{\alpha}) = \dfrac{\Gamma\left(|\tilde{\alpha}| + \dfrac{\kappa'-\kappa}{2}\right)\Gamma\left(|\tilde{\alpha}| + \dfrac{\kappa'+\kappa}{2}\right)}{(|\tilde{\alpha}| + \kappa'(H))!}\left(\prod_{j\in H}\dfrac{1}{(\alpha_j+\omega'_j)!}\right)\left(\prod_{k\in H^c}\dfrac{1}{\alpha_j!}\right), \\ \text{avec } \kappa'(H) = n + \sum_{k\in H^c} \omega'_k\,. \end{cases}$$

Les membres à gauche des trois formules s'écrivent

$$\text{(E.3)}\qquad u_{\tilde{\mu}}(x) = x^{\tilde{\nu}}\left(\prod_{j\in H} x_j^{-\omega'_j}\right) U_H(x)$$

avec $H = J_+ \cup J_-$ pour (9.5), $H = J_-$ pour (9.6) et $H = J_+$ pour (9.7) si

$J_+ = \emptyset$ (la formule (9.4) correspond au cas $H = \emptyset$). Maintenant H n'est pas vide, supposons donc, sans perdre rien,

$$H = \{0, \cdots, h\}, \text{ avec } 0 \leqq h \leqq n . \tag{E.4}$$

Notons que

$$\frac{x_j^{\alpha_j + \omega'_j}}{(\alpha_j + \omega'_j)!} = \frac{1}{\alpha_j! \; \Gamma(\omega'_j)} \int_0^{x_j} u_j^{\omega'_j - 1}(x_j - u_j)^{\alpha_j} du_j, \text{ si } \omega'_j > 0 , \tag{E.5}$$

et que, si $v = (v_0, v_1, \cdots, v_n)$, $\sum_{|\tilde{\alpha}|=p} v^{\tilde{\alpha}}/\tilde{\alpha}! = (\sum_{j=0}^n v_j)^p/p!$. En utilisant ces deux faits, nous avons

$$\begin{aligned} U_H(x) = & \left\{\Gamma\left(\frac{\kappa' - \kappa}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\kappa' + \kappa}{2}\right)\Big/\kappa'(H)!\right\}\left\{\prod_{j=0}^h \frac{1}{\Gamma(\omega'_j)}\right\}\int_0^{x_0} \cdots \int_0^{x_h} \\ & \times F\left(\frac{\kappa' - \kappa}{2}, \frac{\kappa' + \kappa}{2}; \; \kappa'(H) + 1; 1 - \sum_{j=0}^h u_j\right)\left(\prod_{j=0}^h u_j^{\omega'_j - 1}\right) du_0 \wedge \cdots \wedge du_h . \end{aligned} \tag{E.6}$$

Celle-ci liée avec (E.3) donne (9.5), (9.6) et (9.7).

Démontrons (9.17). Soit J_- comme dans (9.14) et calculons $U_0(x)$. Par $(5.5)_3$ et (8.8), nous avons

$$\begin{cases} \gamma_0(x, y') = \left(\prod_{j=0}^m x_j^{\omega'_j}\right)\left(\prod_{k=m+1}^n y_k^{\omega_k}\right) \sum_{\alpha \in N^n} \dfrac{\Gamma\left(|\alpha| + \frac{\kappa' - \kappa}{2}\right)\Gamma\left(|\alpha| + \frac{\kappa' + \kappa}{2}\right)}{\alpha! \; (\alpha + \omega')! \; \Gamma(\omega'_0)} x^\alpha y'^\alpha , \\ \text{avec } \omega' = (\omega'_1, \cdots, \omega'_n), \; y' = (y_1, \cdots, y_n) \text{ et } \sum_{j=1}^n y_j = 1 . \end{cases} \tag{E.7}$$

Et $dS_0(y') = |dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{n-1}|$ sur S_0, donc par (2.4),

$$U_0(x) = \left(\prod_{j=0}^m x_j^{\omega'_j}\right) \sum_{\alpha \in N^n} \frac{\Gamma\left(|\alpha| + \frac{\kappa' - \kappa}{2}\right)}{\Gamma(\omega'_0)} \left\{\prod_{j=1}^m \frac{1}{(\alpha_j + \omega'_j)!}\right\}\left\{\prod_{k=m+1}^n \frac{1}{\alpha_k!}\right\} x^\alpha .$$

Appliquons ici (E.5) pour $1 \leqq j \leqq m$, alors, après la sommation, nous avons

$$\begin{aligned} U_0(x) = x_0^{\omega'_0} & \left\{\prod_{j=0}^m \frac{1}{\Gamma(\omega'_j)}\right\}\Gamma\left(\sum_{j=0}^m \omega'_j\right)\int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_m}\left(x_0 + \sum_{j=1}^m u_j\right)^{-\zeta} \\ & \times\left(\prod_{j=1}^m u_j^{\omega'_j - 1}\right) du_1 \wedge \cdots \wedge du_m, \text{ où } \zeta = \sum_{j=0}^m \omega'_j . \end{aligned}$$

Nous passons maintenant aux coordonnées homogènes $(v_0, v_1, \cdots, v_m)$ telles que $v_j > 0$ $(0 \leqq j \leqq m)$ et $\sum_{j=0}^m v_j = 1$ liees avec $(u_1, \cdots, u_n)$ par $u_j = x_0 v_j / v_0$ $(1 \leqq j \leqq m)$. L'intégrale ci-dessus est enfin égale à celle de (9.17), car $|dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_m| = |\sum_{j=0}^m (-1)^j v_j \, dv_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dv_j} \wedge \cdots \wedge dv_m|$.

F. Démonstration de la proposition 6.2. Nous admettons pour le moment le lemme F ci-dessous sur le comportement asymptotique lorsque

$t \downarrow 0$ de la fonction $U(t, z)$, c'est-à-dire,

$$\text{(F.1)} \qquad \begin{cases} U(t, z) = \Gamma(\kappa)\sum_{q=0}^{\infty}(q+\kappa)e^{-q(q+2\kappa)t/4}C_q^{\kappa}(z) , \\ \text{avec } t > 0, \ -1 \leqq Z = \cos\theta \leqq 1, \ 0 \leqq \theta \leqq \pi \text{ et } \kappa > 0 , \end{cases}$$

pour achever la démonstration de la proposition 6.2.

Il s'agit maintenant de

$$\text{(F.2)} \qquad Z = \cos\theta = \sum_{j=0}^{n}\phi_j\sqrt{x_jy_j} \quad \text{avec} \quad \tilde{\phi} = (\phi_0, \cdots, \phi_n) \in [-1, 1]^{n+1} .$$

Donc Z (par conséquent θ aussi) est la fonction de $(x, y, \tilde{\phi})$. D'abord, remarquons que $\theta^2 \geqq (2\sin(\theta/2))^2 = 2(1-\cos\theta)$ donc que

$$\text{(F.3)} \qquad \theta^2 \geqq \sum_{j=0}^{n}(\sqrt{x_j}-\sqrt{y_j})^2 + 2\sum_{j=0}^{n}(1-\phi_j)\sqrt{x_jy_j} .$$

Il nous convient de distinguer quelques cas suivants

(α) $x_jy_j > 0$ pour tout $0 \leqq j \leqq n$,

(β) $x_jy_j = 0$ pour tout $0 \leqq j \leqq n$,

(γ) cas intermédiaire, par exemple,

$$x_jy_j > 0 \text{ pour tout } 0 \leqq j \leqq m \text{ et } x_jy_j = 0 \text{ pour } m+1 \leqq j \leqq n .$$

Quand on estime l'intégrale à droite de (6.5), le cas (γ) se réduit au premier cas (α), parce que, dans ce cas-là, Z contient seulement $(\phi_0, \cdots, \phi_m)$ ce qui nous permet d'intégrer d'abord en $(\phi_{m+1}, \cdots, \phi_n)$ et ensuite d'utiliser le résultat pour le cas (α). Il suffit donc d'étudier les deux premiers (l'un des x et y se trouve sur $\partial\Omega$ si (β) ou (γ) a lieu).

Cas (β): $Z \equiv 0$ et $\theta \equiv \pi/2$, donc $Z(t; x, y) = \text{Cte}\cdot U(t, 0)$. Mais, pour $U(t, 0)$, le point (i) du lemme F sert à établir (6.8) (d'après (F.3)).

Cas (α): Soit $0 < \delta \ll 1$ et partageons $[-1, 1]^{n+1}$ en deux

$$\text{(F.4)} \qquad [-1, 1]^{n+1} = J_0 \cup J_1 \text{ (somme disjointe) avec } J_0 = [1-\delta, 1]^{n+1} .$$

Donc, le membre à droite de (6.5) est la somme des

$$\text{(F.5)} \qquad I_j = \int\cdots\int_{J_j} U(t, z)M_{\tilde{\omega}}(d\tilde{\phi}) \quad (j = 0, 1) .$$

Premièrement, il est facile de voir que $I_1 = o(I_0)$ lorsque $t \downarrow 0$ et que $I_1 \leqq \text{Cte}\, I_0$ uniformément en (t, x, y). Evaluons maintenant I_0.

Pour $\tilde{\phi} \in J_0$, posons $1-\phi_j = u_j$ $(0 \leqq j \leqq n)$, alors par l'hypothèse (4.9) sur $\tilde{\omega}$, nous avons

$$
(\text{F.6})\quad \begin{cases} I_0 \leqq \text{Cte}\cdot t^{-\kappa-(1/2)} e^{-r^2/t} \prod_{j=0}^{n} \left(\int_0^{\delta} e^{-a_j u_j/t} u_j^{\omega_j-(1/2)} du_j \right), \\ \text{avec } r^2 = \sum_{j=0}^{n} (\sqrt{x_j} - \sqrt{y_j})^2 \text{ et } a_j = 2\sqrt{x_j y_j} \ (0 \leqq j \leqq n), \end{cases}
$$

où nous avons utilisé (i) du lemme F et (F.3). Dans le produit des integrales dans (F.6), chaque terme se majore par $(1 + a_j/t)^{-\omega_j-(1/2)}$, donc nous avons (6.8).

Pour établir (6.9) (pour le cas (α)), il suffit d'appliquer un lemme de Watson et le point (i) du lemme F à I_0 en remarquant que

$$
\frac{\partial}{\partial u_j}(\theta^2) = -\frac{\partial}{\partial \phi_j}(\theta^2) = 2\sqrt{x_j y_j}\,\theta/\sin\theta .
$$

La preuve de la proposition 6.2 est terminée sous la réserve du lemme suivant:

LEMME F. *Prenons un ε quelconque tel que $0 < \varepsilon < \pi$. Alors,*

(i) *Si $0 \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$, (t, z) admet le développement asymptotique suivant (lorsque $t \downarrow 0$) valable uniformément en θ:*

$$
(\text{F.7})\qquad U(t, z) \sim 2\sqrt{\pi}\, t^{-\kappa-(1/2)} \left(\frac{\theta}{\sin\theta} \right)^{\kappa} e^{-\theta^2/t} \sum_{j=0}^{\infty} t^j u_j(\theta) ,
$$

où les $\{u_j(\theta)\}_{j=0}^{\infty}$ sont des fonctions indéfiniment différentiables de θ, pour $0 \leqq \theta < \pi$, déterminées par les formules récurrentes:

$$
(\text{F.8})\quad \begin{cases} u_0(\theta) \equiv 1 , \\ 4u_{j+1}(\theta) = \theta^{-j-1} \int_0^{\theta} \phi^j \left\{ u_j''(\phi) + \dfrac{2\kappa}{\phi} u_j'(\phi) + \Psi(\phi) u_j(\phi) \right\} d\phi, \ j \geqq 0 , \\ \textit{avec } \Psi(\theta) = \kappa^2 + (\kappa - \kappa^2) \left(\dfrac{1}{\sin^2\theta} - \dfrac{1}{\theta^2} \right) . \end{cases}
$$

(ii) *Si $\pi - \varepsilon \leqq \theta \leqq \pi$, $U(t, z)$ se majore uniformément comme suit:*

$$
(\text{F.9})\qquad |U(t, z)| \leqq \text{Cte}\cdot \exp(-A\pi^2/t), \ \textit{lorsque } t \downarrow 0 ,
$$

où A est une constante arbitraire si $0 < \pi^2 A < (\pi - \varepsilon)^2$.

DÉMONSTRATION. Au lieu de U, nous traitons

$$
(\text{F.10})\qquad \bar{U}(t, z) = \{2\sqrt{\pi}\, \Gamma(\kappa)\}^{-1} U(t, z) e^{-\kappa^2 t/4}, \text{ et}
$$

$$
(\text{F.11})\qquad \mathscr{U}(\lambda, z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda/t} \bar{U}(t, z) \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad \text{pour } \operatorname{Re}\lambda > 0 .
$$

Alors, l'inversion de Laplace

$$
(\text{F.12})\qquad t^{3/2} \bar{U}(t, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda/t} \mathscr{U}(\lambda, z) d\lambda, \ c > 0 ,
$$

nous permettera d'évaluer $\bar{U}$.

D'abord, par (4.10), nous avons

$$(\text{F.13})\qquad \mathscr{U}(\lambda, z) = 2^{-\kappa}(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda} - z)^{-\kappa} = \left(4 \operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda} + i\theta}{2} \operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda} - i\theta}{2}\right)^{-\kappa} .$$

Ici, il faut noter que

$$(\text{F.14})\qquad \begin{cases} 4 \operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{\lambda} + i\theta}{2} \operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{\lambda} - i\theta}{2} = \dfrac{\zeta \sin\theta}{\theta}\, v(\zeta, \theta) \text{ avec } \zeta = \lambda + \theta^2 \text{ et} \\ v(\zeta, \theta) = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1 + \frac{\zeta}{4(\pi^2 k^2 - \theta^2)}\left(2 + \frac{\zeta}{4\pi^2 k^2}\right)\right\}; \text{ et que ,} \end{cases}$$

$$(\text{F.15})\qquad \begin{cases} \operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{\lambda} + i\theta}{2} \operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{\lambda} - i\theta}{2} = \cos\dfrac{\phi + i\sqrt{\lambda}}{2} \cos\dfrac{\phi - i\sqrt{\lambda}}{2} \\ \qquad\qquad = 4(\xi^2 - \phi^2) w(\xi, \phi) , \\ \text{avec } \pi - \theta = \phi,\ \lambda + \phi^2 + \pi^2 = 2\pi\xi \text{ et} \\ w(\xi, \phi) = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\left(1 + \frac{2\xi - \pi}{(2k+1)^2\pi}\right)^2 - \frac{4\phi^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right\} . \end{cases}$$

(i) Nous avons, par (F.12) et (F.14),

$$(\text{F.16})\qquad t^{3/2}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^{\kappa} e^{\theta^2/t}\, \bar{U}(t, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\zeta/t}\zeta^{-\kappa} v(\zeta, \theta)^{-\kappa} d\zeta .$$

Il est maintenant évident, par le lemme de Watson, que $U(t, z)$ admet un développement comme (F.7). En remplaçant v par 1, le membre à droite de (F.16) se comporte comme $t^{1-\kappa}/\Gamma(\kappa)$, d'où $u_0(\theta) \equiv 1$.

Pour avoir les autres $u_j(\theta) (j \geqq 1)$, remarquons que U satisfait à

$$(\text{F.17})\qquad 4\frac{\partial U}{\partial t} = (\sin\theta)^{-2\kappa}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{(\sin\theta)^{2\kappa}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right\} .$$

Nous y substituons le membre à droite de (F.7). Après les différentiations terme à terme, égalons les mêmes puissances de t et obtenons enfin

$$(\text{F.18})\qquad 4\left(\theta\frac{d}{d\theta} + j + 1\right) u_{j+1}(\theta) = \left\{\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{2\kappa}{\theta}\frac{d}{d\theta} + \Psi(\theta)\cdot\right\} u_j(\theta),\ j \geqq 0 ,$$

ce qui donne (F.8) par intégration (signalons que les $u_j(\theta)$ ont les dérivées d'ordres impairs nulles à $\theta = 0$).

(ii) Utilisons (F.12) et (F.15) (où $0 \leqq \phi \leqq \varepsilon$). Alors,

$$(\text{F.19})\qquad t^{3/2}\exp\left(\frac{\phi^2 + \pi^2}{t}\right)\bar{U}(t, z) = \text{Cte.}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{2\pi\xi/t}(\xi^2 - \phi^2)^{-\kappa} w(\xi, \phi)^{-\kappa} d\xi ,$$

$(c>0)$. La dernière intégrale est majorée par $\text{Cte}\cdot\exp[2\pi(\phi+\delta)/t]$, quel que soit $\delta>0$, d'où (F.9).

Le lemme F est étable.

REMARQUE. Le lemme F devient plus précis, si κ est entier >0. Posons de nouveau, pour $\kappa>0$ entier ou non-entier,

$$W_\kappa(t, z) = 2^\kappa e^{-(\kappa^2/4)t}U(t, z) = 2^\kappa\Gamma(\kappa)\sum_{q=0}^{\infty}(q+\kappa)e^{-(q+\kappa)^2t/4}C_q^\kappa(z)\ . \tag{F.20}$$

Premièrement, nous avons

$$W_{\kappa+1}(t, z) = \frac{\partial}{\partial z}W_\kappa(t, z),\ \text{si}\ \kappa>0,\ -1<z<1\ \text{et}\ t>0\ . \tag{F.21}$$

Deuxièmement, ce qui est important, nous voyons qu'il existe la limite de W_κ lorsque $\kappa\downarrow 0$, que nous notons par $W_0(t, z)$,

$$W_0(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-(m^2t/4)+im\theta}\ . \tag{F.22}$$

Troisièmement, la relation (F.21) reste vrai pour $\kappa=0$:

$$W_1(t, z) = \frac{\partial}{\partial z}W_0(t, z),\ \text{pour}\ -1<z<1\ \text{et}\ t>0\ . \tag{F.23}$$

Si donc $\kappa=$ entier>0, nous avons

$$W_\kappa(t, z) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\kappa W_0(t, z),\ \text{pour}\ -1<z<1\ \text{et}\ t>0\ . \tag{F.24}$$

Et dernièrement, d'après la formule de sommation de Poisson, nous avons

$$W_0(t, z) = 2\sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-(\theta+2m\pi)^2/t},\ \text{pour}\ -1\leqq z\leqq 1\ \text{et}\ t>0\ . \tag{F.25}$$

Alors, nous obtenons (F.7) en prenant la contribution par le seul terme avec $m=0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. APPELL ET J. KAMPÉ DE FÉRIET, Fonctions hypergéométriques et géométriques et hypersphériques, Polynômes d'Hermite. Gauthiers-Villars.

[2] J. CROW ET M. KUMURA, Some genetic problems in natural populations. Proc. 3rd Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., Vol. IV (1956), 1-22.

[3] A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER ET F. TRICOMI, Higher transcedental functions, Vol. 2. McGraw-Hill.

[4] E. FACKEREL ET R. LITTLER, Transition densities for neutral multi-allele diffusion models. Biometrics, 31 (1975), 117-123.

[5] W. FELLER, Diffusion process in genetics. Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.

(1951), 227-246.
[6] F. STEWART, Variability in the amount of heterozygosity maintained by neutral mutations. Preprint.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
KYOTO UNIVERSITY
KYOTO, JAPAN