Tôhoku Math. Journ.
34 (1982), 239-249.

# SUR L'UNICITÉ DU PROLONGEMENT DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉES

KINJI WATANABE

(Received February 19, 1981)

**1. Enoncé des résultats.** Nous nous proposons dans ce travail d'étudier la propagation des supports des solutions de quelques classes des équations du second ordre à coefficients de classe $C^\infty$ et à deux variables indépendantes.

Considérons d'abord des solutions de l'équation:

(1, 1) $\qquad L[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0 \quad \text{dans } \Omega$

où tous les coefficients sont de classes $C^\infty$ dans un domaine $\Omega$ de $R^2$. Sous les hypothèses:

(1, 2) $a, b$ et $c$ sont à valeurs réelles et pour tout $(x, y, \xi, \eta)$ dans $\Omega \times R^2$

$$a(x, y)\xi^2 + 2b(x, y)\xi\eta + c(x, y)\eta^2 \geqq 0 ,$$

(1, 3) L'algèbre de Lie engendrée par $a\,\partial/\partial x + b\,\partial/\partial y$ et $b\,\partial/\partial x + c\,\partial/\partial y$ est de rang 2 en tout point de $\Omega$,

nous avons la propriété de prolongement unique des solutions.

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses* (1, 2) *et* (1, 3), *toute solution dans* $C^\infty(\Omega)$ *de* (1, 1) *est identiquement nulle dès qu'elle est nulle au voisinage d'un point.*

Remarquons que Hörmander [3] a construit $u$ et $a$ dans $C^\infty(R^2)$ telles que

$$u_{xx} + au_y = 0 \quad \text{dans } R^2$$

et que le support de $u$ est $\{(x, y); x \geqq 0\}$. Dans le cas de $n$ $(>2)$ variables, nous nous renvoyons aux Alinhac et Zuily [1] et Roberts et Wenston [5].

Nous considérons ensiute des solutions de l'équation:

(1, 4) $\qquad X^2u + (Y_1 + \sqrt{-1}\,Y_2)u + fu = 0 \quad \text{dans } \Omega ,$

où $X$, $Y_1$ et $Y_2$ sont des champs de vecteurs à coefficients réelles et de classe $C^\infty$. Sous l'hypothèse:

(1, 5) L'algèbre de Lie engendrée par $X$ et $Y_1$ est de rang 2 en tout point de $\Omega$, nous démontrons le résultat:

THÉORÈME 2. *Sous l'hypothèse* (1, 5), *le support de toute solution dans* $C^\infty(\Omega)$ *de* (1, 4) *se propage le long de la courbe intégrale de* $X$.

Nous considérons finalement des solutions de l'équation elliptique à caractéristiques doubles:

$$(1,6) \qquad |au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}| \leqq \text{Const. } \{|u_x| + |u_y| + |u|\} .$$

Ici les coefficients $a, b, c$ sont à valeurs complexes, de classe $C^\infty(\Omega)$. En supposant que

(1, 7) Il n'existe aucun point de zero d'ordre infini de la fonction $ac-b^2$ en $(x, y)$ et pour tout $(x, y, \xi, \eta)$ dans $\Omega \times R^2 \setminus 0$

$$a(x, y)\xi^2 + 2b(x, y)\xi\eta + c(x, y)\eta^2 \neq 0 ,$$

nous démontrons le résultat:

THÉORÈME 3. *Sous l'hypothèse* (1, 7), *toute solution de classe* $C^2(\Omega)$ *de* (1, 6) *est identiquement nulle dès qu'elle est nulle au voisinage d'un point.*

Dans [7], Zuily a obtenu un résultat pareil pour des solutions de classes $C^\infty$. Le Théorème 3 se généralise à des opérateurs différentiels elliptiques à caractéristiques doubles au plus et d'ordre supérieur à 2, sous des conditions supplémentaires analogues à (1, 7).

Dans les démonstrations des Théorèmes, un rôle essentiel est joué par l'unicité des solutions du problème de Cauchy pour les surfaces initiaux non caractéristiques, contenues dans le complément d'un ensemble negligeable.

La preuve du Théorème 2 est tout à fait pareille à celle du Théorème 1 et nous allons démontrer le Théorème 1 dans § 2 et le Théorème 3 dans § 3. Les estimations du type de Carleman serons démontrées dans § 4.

**2. Démonstration du Théorème 1.** Avant de commencer la preuve nous introduisons la propriété (U). Soit $L$ un opérateur de la forme (1, 1). On dit que $L$ vérifie la propriété (U) en un point $z_0$ si toute solution $u$ de classe $C^\infty$ de l'équation $L[u] = 0$ est identiquement nulle dans un voisinage de $z_0$ dès qu'elle est nulle d'un coté d'une surface de classes $C^\infty$, non caractéristique en $z_0$ par rapport à $L$. Alors le résultat suivant est dû à Bony [2].

LEMME 2.1. *Soit* $L$ *un opérateur de la forme* (1, 1) *satisfaisant à* (1, 2). *Si* $L$ *vérifie la propriété* (U) *en tout point, le support de toute* *solution de classes $C^\infty$ de* (1, 1) *se propage le long des courbes intégraux des champs de vecteurs appartenant à l'algèbre de Lie engendrée par* $a\,\partial/\partial x + b\,\partial/\partial y$ *et* $b\,\partial/\partial x + c\,\partial/\partial y$.

Ce Lemme dit que si $L$ vérifie (1, 2) et (1, 3), la propriété de prolongement unique des solutions est impliquée par la propriété (U) en tout point.

1ÈRE ÉTAPE DE LA PREUVE DU THÉORÈME 1. Comme (1, 2) et (1, 3) sont invariantes sous changement de variables, il s'agit d'un opérateur de la forme:

$$L[u] = u_{xx} + A_1 u_{yy} + B_1 u_x + C_1 u_y + D_1 u\ . \tag{2, 1}$$

Ici tous les coefficients sont de classe $C^\infty$ dans un ouvert $\omega$ et $A_1$ vérifie la condition:

(2, 2) $A_1 \geqq 0$ dans $\omega$ et pour tout $z_0 = (x_0, y_0)$ avec $A_1(z_0) = 0$, il existe un entier $m > 0$ tel que $\partial^{2m} A_1(z_0)/\partial x^{2m} \neq 0$.

Nous désignons par $\omega_1$ un sous-ensemble ouvert de $\omega$, constitué des points $z_0 = (x_0, y_0)$ tels que $A_1(z_0) \neq 0$ ou bien la condition suivante est vérifiée: Il existe un entier $m > 0$ et deux fonctions $\lambda$, $\mu$ à valeurs réelles, de classe $C^\infty$ dans un voisinage de $z_0$, $y_0$ respectivement tels que $\lambda(z_0) \neq 0$ et que $A_1(x, y) = \lambda(x, y)(x - \mu(y))^{2m}$ dans un voisinage de $z_0$. Alors nous avons le:

LEMME 2.2. *Si $L$ vérifie la propriété* (U) *en tout point de $\omega_1$, il la vérifie en tout point de $\omega$.*

PREUVE. Posons $S = \omega \setminus \omega_1$ et désignons par $S_j$ un sous-ensemble de $S$, constitué des points de zero, exactement d'ordre $2j$, de la fonction $A_1$. Nous avons alors $S = \bigcup_{j=1}^\infty S_j$ et nous raisonnons par récurrence sur $j$ telle que $z_0$ est dans $S_j$. Supposons que $z_0$ soit dans $S_1$. Nous obtenons alors pour un voisinage $V$ de $z_0$, $S \cap V = S_1 \cap V \subset \Gamma$. Ici $\Gamma$ est une surface définie par l'équation $\partial A_1/\partial x = 0$ lorsque $|\partial^2 A_1(z_0)/\partial x^2| + |\partial^2 A_1(z_0)/\partial x \partial y| > 0$ ou bien par l'équation $\partial A_1/\partial y = 0$ lorsque $\partial^2 A_1(z_0)/\partial y^2 \neq 0$. Comme la condition (2, 2) implique que $\Gamma \setminus S \cap V$ est dense dans $\Gamma$, nous avons la propriété (U) en $z_0$. Lorsque $z_0$ est dans $S_j$ ($j \geqq 2$), une technique pareille est encore valable.

2ÈME ÉTAPE. Comme les opérateurs elliptiques du second ordre à coefficients réels vérifie la propriété (U), il s'agit d'un opérateur de la forme:

$$L[u] = u_{xx} + (x - \mu(y))^{2m} A_2 u_{yy} + B_1 u_x + C_1 u_y, \quad A_2 > 0\ .$$

Pour obtenir la propriété (U) en tout point $(\mu(y), y)$, il suffit de démontrer la propriété (U) en tout point d'un ensemble dense dans la courbe $x = \mu(y)$. Nous choisissons un ensemble constituté des points $z_0$ tels que la condition suivante est vérifiée: Il existe deux entiers $k, n$ $(0 \leqq k, n \leqq m)$ et deux fonctions $C_2, C_3$ à valeurs réelles, de classe $C^\infty$ dans un voisinage de $z_0$ tels que

$$\operatorname{Re} C_1(x, y) = (x - \mu(y))^k C_2(x, y) \,, \quad \operatorname{Im} C_1(x, y) = (x - \mu(y))^n C_3(x, y)$$
$$C_2(z_0) \neq 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqq k < m \,, \quad C_3(z_0) \neq 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqq n \leqq k \,, \quad n < m \,.$$

Après un changement convenable de variables, nous considérons des solutions définies près de l'origine et nous peuvons supposer que $\mu(y) = y^2$ si $k \leqq n$ ou bien $n < k = m$ et que $\mu(y) = 0$ si $n < k < m$.

3ÈME ÉTAPE. Nous considérons les cas de $k \leqq n$ et de $n < k = m$ et posons

$$L_{k,n}[u] = u_{xx} + (x - y^2)^{2m} A u_{yy} + \{(1 - \delta_{m,k})(x - y^2)^k B + (1 - \delta_{m,n})\sqrt{-1}(x - y^2)^n C\} u_y \,,$$

où $\delta_{m,j}$ est le delta de Kronecker, $A, B$ et $C$ sont à valeurs réelles de classe $C^\infty$ dans un voisinage de l'origine telles que $A > 0$, $B \neq 0$, et que $C \neq 0$ si $n \leqq k$. Il s'agit alors des solutions de l'inégalité dans un voisinage de l'origine:

$$|L_{k,n}[u]| \leqq \text{Const.}\ \{|u_x| + |(x - y^2)^m u_y| + |u|\} \,. \tag{2, 3}$$

Posons $\alpha(x) = x + \gamma x^2$, $\bar{\beta}(y)^2 = \bar{\alpha}(y^2)$ où $\bar{\alpha}$ est la réciproque de $\alpha$ et nous désignons par $\beta$ la réciproque de $\bar{\beta}$. Sous le changement de variables $(x, y) \to (\alpha(x), \beta(y))$ la courbe $x = y^2$ est invariante et des solutions de (2, 3) se transforment à des solutions de l'inégalité de la même forme (2, 3). De plus nous avons pour une constante convenable $\gamma$,

$$B(0, 0)B_x(0, 0) > 0 \text{ si } k = 0 \,, \quad C(0, 0)C_x(0, 0) > 0 \text{ si } n = 0 \,.$$

En choisissant des fonctions de poids $\Phi$ définies par

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= x \,, && \text{si } \min(k, n) > 0 \,, \\ &= x^\rho/\rho \,, \ (0 < \rho < 1) \,, && \text{si } 0 = k < n \,, \\ &= x - \{x^2 C_x(0, 0)/2C(0, 0)\} \,, && \text{si } n = 0 \,, \end{aligned}$$

nous avons l'estimation du type de Carleman, qui implique l'unicité des solutions de (2, 3), satisfaisant la condition: $u(x, y) = 0$ si $x < y^2$.

LEMME 2.3. *Soit* $l = \min(k, n)$. *Il existe des constantes positives* $\tau_0$, $h_0$, $M$ *telles que l'inégalité suivante est vérifiée pour tout* $\tau > \tau_0$, $0<$

$h < h_0$, $\phi$ *dans* $C^\infty(R^2)$ *satisfaisant* $\phi = 0$ *en dehors de* $\{(x, y);\ y^2 \leqq x \leqq h\}$:

$$\iint_{R^2} (x - y^2)^{-l} |L_{k,n}[\phi]|^2 e^{-2\tau\Phi(x)} dxdy$$
$$\geqq \tau M \iint_{R^2} (x - y^2)^{-l} \{|\phi_x|^2 + (x - y^2)^{2m} |\phi_y|^2 + |\phi|^2\} e^{-2\tau\Phi(x)} dxdy\ .$$

4ÈME ÉTAPE. Nous considérons le cas de $n < k < m$. Il s'agit des solutions $u$, de classe $C^\infty$ satisfaisant $u = 0$ si $x < 0$, de l'inégalité dans un voisinage de l'origine:

$$|u_{xx} + x^{2m} A_4 u_{yy} + \{x^k B_4 + \sqrt{-1} x^n C_4\} u_y| \leqq \text{Const. } \{|u_x| + |u|\}\ ,$$

où $A_4 > 0$, $B_4 C_4 \neq 0$. Nous considérons un changement de variable irrégulier $(x, y) \to ((r^2 - y^2)x, y)$. Posons $v(x, y) = u((r^2 - y^2)x, y)$ si $|y| < r$, $= 0$ si $|y| \geqq r$. Ici $r$ est une petite constante fixée. Nous avons alors que $v$ est de classe $C^\infty$ et qu'elle est une solution de l'inégalité:

$$|L_{k,n}[v]| \leqq \text{Const. } \{|v_x| + |v|\}\ , \tag{2, 4}$$

où

$$L_{k,n}[v] = v_{xx} + \{x(r^2 - y^2)\}^{2m+1} A_0 v_{xy} + x^{2m}(r^2 - y^2)^{2m+2} A v_{yy}$$
$$+ \{x^k (r^2 - y^2)^{k+2} B + \sqrt{-1} x^n (r^2 - y^2)^{n+2} C\} v_y\ .$$

Ici $A_0$, $A$, $B$ et $C$ sont à valeurs réelles, de classe $C^\infty$, $A > 0$, $BC \neq 0$. Nous avons alors l'estimation du type de Carleman, qui implique l'unicité des solutions de (2, 4).

LEMME 2.4. *Il existe des constantes positives* $\tau_0$, $h_0$, $M$ *telles que l'inégalité suivante est vérifiée pour tout* $\tau > \tau_0$, $0 < h < h_0$, $\phi$ *dans* $C^\infty(R^2)$ *satisfaisant* $\phi = 0$ *en dehors de* $\{(x, y);\ 0 \leqq x \leqq h,\ |y| \leqq r\}$:

$$\iint_{R^2} |L_{k,n}[\phi]|^2 x^{-2\tau-n+1} dxdy \geqq \tau M \iint_{R^2} \{|\phi_x|^2 + |\phi|^2\} x^{-2\tau-n+1} dxdy\ .$$

La preuve du Théorème 1 sera completée d'après les Lemmes 2.3 et 2.4, qui serons démontrés dans § 4.

REMARQUE. Si la condition:

> Dans $\omega$, $A_1 \geqq 0$ et il n'existe aucun point de zero d'ordre infini de $A_1$ en $(x, y)$,

est vérifiée au lieu de (2, 2), nous avons la propriété (U) des opérateurs de la forme (2, 1).

REMARQUE. Si $L$ de la forme (1, 1) satisfait (1, 2) et la condition:

L'espace linéaire engendré par $a\,\partial/\partial x + b\,\partial/\partial y$ $(=X_1)$, $b\,\partial/\partial x + c\,\partial/\partial y$

$(=X_2)$, $[[X_1, X_2], X_j]$, $(j = 1, 2)$ est de dimension 2 en tout point, nous avons la propriété (U) de $L$, même pour des solutions de classe $C^2$. Autrement dit, l'estimation du type de Carleman dans le Lemme 2.3 est vérifiée pour $\chi_h(x)u(x, y)$ où u est une solution de classe $C^2$ de (2, 3) satisfaisant $u(x, y) = 0$ si $x < y^2$ et $\chi_h$ est de classe $C^\infty$ telle que $\chi_h(x)=1$ si $|x| < h/4$, $=0$ si $|x| \geqq h/2$. Parce que $(x - y^2)^{-l-1}u_{xx}$, $(x - y^2)^{-l-2}u_x$ et $(x - y^2)^{-l-3}u$ sont bornées, nous pouvons faire l'intégration dans la preuve du Lemme 2.3.

REMARQUE DE LA PREUVE DU THÉORÈME 2. Il suffit d'établir les estimations du type de Carleman analogues à celles des Lemmes 2.3 et 2.4 pour des opérateurs des formes:

$$L[u] = u_{xx} + \{(x - \mu(y))^k B + \sqrt{-1}(x - \mu(y))^n C\}u_y \ ,$$

où $B$ et $C$ sont à valeurs réelles, $0 \leqq k$, $0 \leqq n \leqq k + 1$, $B \neq 0$ et $C \neq 0$ si $n \leqq k$. Lorsque $k = 0$, une technique utilisée dans Mizohata [4] est aussi valable.

**3. Démonstration du Théorème 3.** Considérons un sous-ensemble $\omega$ de $\Omega$, constitué des points $z_0$ tels que $a(z_0)c(z_0) - b(z_0)^2 \neq 0$ ou bien la condition suivante est vérifiée: Il existe un entier $k > 0$ et deux fonctions $\lambda$, $\mu$ ($\mu$ est à valeurs réelles) de classe $C^\infty$ tels que $\lambda(z_0) \neq 0$, grad $\mu(z_0) \neq 0$ et que

$$a(x, y)c(x, y) - b(x, y)^2 = \lambda(x, y)\mu(x, y)^k$$

dans un voisinage de $z_0$. Comme $\omega$ est connexe et dense dans $\Omega$ (pour une preuve, voir Watanabe [6]) et les opérateurs elliptiques à caractéristiques simples vérifient la propriété (U), ce Théorème se démontre par la propriété (U) des opérateurs elliptiques, dont les parties principaux sont des formes:

$$L[u] = u_{xx} + 2Au_{xy} + \{A^2 + (x - y^2)^k B\}u_{yy} \ ,$$

où $k > 0$ et $A$ et $B$ sont de classe $C^\infty$ telles que $\mathrm{Im}\, A \neq 0$, $B \neq 0$. L'estimation du type de Carleman, qui implique l'unicité exigée, est la suivante:

LEMME 3.1. *Posons $\Phi_\rho(x, y) = \{(x - y^2)^\rho + x^\rho\}/\rho$, $0 < \rho < 1$. Il existe alors des constantes $h_0$, $M > 0$ telles que l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $0 < h < h_0$, $\tau > 1$, $\phi$ dans $C^\infty$ satisfaisant $\phi = 0$ en dehors de $\{(x, y);\ y^2 \leqq x \leqq h\}$:*

$$\iint_{R^2} |L[\phi]|^2 e^{-2\tau\Phi_\rho} dxdy \geqq Mh^{\rho-2} \iint_{R^2} \{|\phi_x|^2 + |\phi_y|^2 + |\phi|^2\} e^{-2\tau\Phi_\rho} dxdy \ .$$

Ce Lemme est une conséquence du Lemme suivant.

LEMME 3.2. *Soit $C$ une fonction dans $C^1(R^2)$ telle que* $\operatorname{Im} C \neq 0$. *Il existe alors des constantes $h_0$, $M > 0$ telles que l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $0 < h < h_0$, $\tau > 1$, $\phi$ dans $C^\infty$ satisfaisant $\phi = 0$ en dehors de $\{(x, y); y^2 \leqq x \leqq h\}$:*

$$\iint_{R^2} |\phi_x + C((x-y^2)^{1/2}, y)\phi_y|^2 e^{-2\tau\Phi}\rho\, dxdy$$
$$\geqq M\iint_{R^2}\left\{\frac{1}{\tau}\{|\phi_x|^2 + |\phi_y|^2\} + \tau(x-y^2)^{\rho-2}|\phi|^2\right\}e^{-2\tau\Phi}\rho\, dxdy\,.$$

Ce Lemme sera démontré dans le paragraphe suivant.

## 4. Démonstrations des estimations du type de Carleman.

PREUVE DU LEMME 2.3. Rappelons que $m \geqq 1$, $0 \leqq k \leqq n \leqq m$ ou bien $0 \leqq n < k = m$ et que $A > 0$, $B \neq 0$,

$$C \neq 0 \text{ si } n \leqq k,\ BB_x > 0 \text{ si } k = 0,\ CC_x > 0 \text{ si } n = 0\,.$$

Pour $\phi$ dans $C^\infty$ satisfaisant $\phi = 0$ en dehors de $\{(x, y);\ y^2 \leqq x \leqq h\}$, nous posons

$$\psi(x, y) = \phi(x, y)e^{-\tau\Phi(x)},\ I_1 = \psi_{xx},\ I_2 = \tau^2\Phi_x^2\psi + \tau\Phi_{xx}\psi,\ I_3 = (x-y^2)^{2m}A\psi_{yy},$$
$$I_4 = \sqrt{-1}(x-y^2)^n C\psi_y,\ I_5 = 2\tau\Phi_x\psi_x,\ I_6 = (x-y^2)^k B\psi_y,$$
$$J_{i,j} = 2\operatorname{Re}\iint_{R^2}(x-y^2)^{-l}(I_i, I_j)dxdy,$$
$$J_1 = \iint_{R^2}(x-y^2)^{-l}\left|\sum_{j=2}^{3} I_j + (1-\delta_{m,n})I_4\right|dxdy\,,$$
$$J_2 = \iint_{R^2}(x-y^2)^{-l}|I_5 + (1-\delta_{m,k})I_6|^2dxdy\,.$$

Nous allons démontrer pour $h_0$ et $1/\tau_0$, assez petits

$$\iint_{R^2}(x-y^2)^{-l}|L_{k,n}[\phi]|^2e^{-2\tau\Phi(x)}dxdy$$
$$= J_1 + J_2 + \sum_{i=1}^{3}\{J_{i,5} + (1-\delta_{m,k})J_{i,6}\} + (1-\delta_{m,n})J_{4,5}$$
$$\geqq \left\{\sum_{i=1}^{3} J_{i,5} + J_2\right\}\Big/2$$
$$\geqq M\iint_{R^2}(x-y^2)^{-l}\{\tau|\psi_x|^2 + \tau(x-y^2)^{2m}|\psi_y|^2 + \tau^3|\psi|^2\}dxdy\,.$$

Ici $M$ est une constante positive et nous allons désigner dans la suite par la même lettre $M$ une constante positive indépendante de $\tau$, $h$, $\phi$.

Par l'intégration par partie nous obtenons si $l = \min(k, n) > 0$

$$J = \sum_{i=1}^{3} J_{i,5} \geqq M \iint_{R^2} \tau\{(x - y^2)^{-l-1} |\psi_x|^2 + (x - y^2)^{2m-l-1} |\psi_y|^2\} + \tau^3 (x - y^2)^{-l-1} |\psi|^2 dxdy$$

si $n = 0$, du fait que $\Phi_{xx}(x) = -C_x(0, 0)/C(0, 0) < 0$,

$$J \geqq M \iint_{R^2} \tau\{|\psi_x|^2 + (x - y^2)^{2m-1} |\psi_y|^2\} + \tau^3 |\psi|^2 dxdy ,$$

et si $k = 0 < n$

$$J_{1,5} + J_{2,5} = \iint_{R^2} 2\tau(1-\rho) x^{\rho-2} |\psi_x|^2 + \{6\tau^3 (1-\rho) x^{3\rho-4} - 2\tau^2 (1-\rho)(3-2\rho) x^{2\rho-4}\} |\psi|^2 dxdy .$$

En utilisant

$$2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} 2\sqrt{3}\, x^{2\rho-3} (\psi_x, \psi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2\sqrt{3}\, (3 - 2\rho) x^{2\rho-4} |\psi|^2 dx ,$$

si $k = 0 < n$, nous avons:

$$J \geqq M \iint_{R^2} \tau\{x^{\rho-2} |\psi_x|^2 + (x - y^2)^{2m-1} x^{\rho-1} |\psi_y|^2\} + \{\tau^3 x^{3\rho-4} + \tau^2 x^{2\rho-4}\} |\psi|^2 dxdy .$$

Lorsque $k < m$,

$$J + J_2 \geqq \frac{M}{\tau} \iint_{R^2} (x - y^2)^{2k-l} |\psi_y|^2 dxdy .$$

Pour achever la preuve nous démontrons par l'intégration par partie et l'inégalité de Schwarz les majorations suivantes.

$$|J_{2,6}| + |J_{3,6}| \leqq J/10 ,$$

$$|J_{1,6}| \leqq \text{Const.} \iint_{R^2} |\psi_x|^2 + |\psi_x| |\psi_y| dxdy \leqq \{J + J_2\}/10 , \quad \text{si} \quad 0 < k < m .$$

$|J_{4,5}|$ est majoré par

$$\text{Const.} \iint_{R^2} \tau x^{\rho-1} |\psi| \{|\psi_x| + |\psi_y|\} dxdy , \quad \text{si} \quad 0 = k < n ,$$

$$\text{Const.} \iint_{R^2} \tau |\psi| \{|\psi_x| + |\psi_y|\} dxdy , \quad \text{si} \quad 0 < k < m,\ 0 < n ,$$

ce qui sont aussi majorés par $\{J + J_2\}/10$. Il reste à estimer $J_{1,6}$ dans le cas de $k = 0$ et $J_{4,5}$ dans les cas de $n = 0$ et de $0 < n < k = m$. Si $k = 0$, nous obtenons du fait que $\Phi_x > 0$, $BB_x > 0$,

$$J_{1,6} = \operatorname{Re} \iint_{R^2} (\psi_x, -B_x B^{-1} \{I_5 + I_6\} + 2\tau B_x B^{-1} \Phi_x \psi_x + B_y \psi_x) dxdy \geqq -\{J + J_2\}/10 .$$

Si $n = 0$ ou bien $0 < n < k = m$, nous avons

$$J_{4,5} = \mathrm{Re} \iint_{R^2} (x - y^2)^{-n} \Big(2\tau\psi, \ -(\Phi_x C)_x C^{-1} \Big\{ \Big( \sum_{j=1}^{4} I_j \Big) - \Big( \sum_{j=1}^{3} I_j \Big) \Big\} + \sqrt{-1}(x - y^2)^n \Phi_x C_y \psi_x \Big) dxdy \geqq -\{J + J_1\}/10 .$$

Ici nous avons utilisé le fait que $(\Phi_x C)_x(0, 0) = 0$ si $n = 0$.

Preuve du Lemme 2.4. Rappelons que $0 \leqq n < k < m$ et que $A > 0$, $BC \neq 0$ et posons pour $\phi$ dans $C^\infty(R^2)$ satisfaisant $\phi = 0$ en dehors de $\{(x, y);\ 0 \leqq x \leqq h,\ |y| \leqq r\}$

$$\psi(x, y) = \phi(x, y)x^{-\tau},\ I_1 = \psi_{xx},\ I_2 = (\tau^2 - \tau)x^{-2}\psi,\ I_3 = \{x(r^2 - y^2)\}^{2m+1}A_0\psi_{xy},$$
$$I_4 = x^{2m}(r^2 - y^2)^{2m+2}A\psi_{yy},\ I_5 = \sqrt{-1}x^n(r^2 - y^2)^{n+2}C\psi_y,\ I_6 = 2\tau x^{-1}\psi_x,$$
$$I_7 = \tau x^{2m}(r^2 - y^2)^{2m+1}A_0\psi_y,\ I_8 = x^k(r^2 - y^2)^{k+2}B\psi_y,$$

$$J_{i,j} = 2\,\mathrm{Re} \iint_{R^2} x^{-n+1}(I_i, I_j)dxdy ,$$

$$J_1 = \iint_{R^2} x^{-n+1} \Big| \sum_{j=1}^{5} I_j \Big|^2 dxdy , \quad J_2 = \iint_{R^2} x^{-n+1} \Big| \sum_{j=6}^{8} I_j \Big|^2 dxdy .$$

Nous allons démontrer pour $h_0$ et $1/\tau_0$, assez petits

$$\iint_{R^2} |L_{k,n}[\phi]|^2 x^{-2\tau-n+1} dxdy = J_1 + J_2 + \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=6}^{8} J_{i,j}$$

$$\text{(4, 1)} \qquad \geqq \{J_2 + J_{2,6} + J_{4,6} + J_{1,8}\}/2$$

$$\text{(4, 2)} \qquad \geqq M \iint_{R^2} \tau\{x^{-n-1}|\psi_x|^2 + x^{2m-n-1}(r^2 - y^2)^{2m+2}|\psi_y|^2\} + \tau^3 x^{-n-3}|\psi|^2 dxdy .$$

Ici $M$ est une constante positive et nous allons désigner par même $M$ une constante positive indépendante de $\tau$, $h$, $\phi$.

De l'intégration par partie et du fait que $k - n + 1 + xB_xB^{-1} > 0$ dans le support de $\psi$, nous avons les estimations:

$$J_{2,6} = 2(n + 2)\tau^2(\tau - 1) \iint_{R^2} x^{-n-3}|\psi|^2 dxdy ,$$

$$J_{4,6} \geqq \tau M \iint_{R^2} x^{2m-n-1}(r^2 - y^2)^{2m+2}|\psi_y|^2 - \mathrm{Const.}\ x^{2m-n}(r^2 - y^2)^{2m+1}|\psi_x||\psi_y| dxdy ,$$

$$J_{1,8} = \mathrm{Re} \iint_{R2} x^{-n+1} \Big(x^{-1}\psi_x,\ -(k - n + 1 + xB_xB^{-1}) \Big\{ \Big( \sum_{j=6}^{8} I_j \Big) - I_6 - I_7 \Big\} + x^{k+1}((r^2 - y^2)^{k+2}B)_y\psi_x \Big) dxdy \geqq -J_2 + M \iint_{R^2} \tau x^{-n-1}|\psi_x|^2 - \mathrm{Const.}\ \{x^{-n-1}|\psi_x|^2 + \tau x^{2m-n}(r^2 - y^2)^{2m+1}|\psi_x||\psi_y|\} dxdy ,$$

ce qui entrainent l'inégalité (4, 2). D'autre part nous obtenons les majorations:

$$J_{5,6} = \mathrm{Re} \iint_{R^2} x^{-n+1} \Big(2\tau x^{-1}\psi,\ -C_x C^{-1}\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{5} I_j\Big) - \Big(\sum_{j=1}^{4} I_j\Big)\Big\}$$

$$+ \sqrt{-1}(x^n(r^2 - y^2)^{n+2}C)_y \psi_x\Big) dxdy$$

$$\geqq -J_1 - \text{Const.} \iint_{R^2} \tau\{x^{-n}|\psi_x|^2 + x^{2m-n}(r^2-y^2)^{2m+2}|\psi_y|^2\} + \tau^3 x^{-n-2}|\psi|^2 dxdy$$

$$\geqq -J_1 - \{J_2 + J_{2,6} + J_{4,6} + J_{1,8}\}/10 ,$$

$$J_{1,6} + J_{3,6} + \sum_{i=1}^{5} J_{i,7} + \sum_{i=2}^{5} J_{i,8} \geqq -\{J_2 + J_{2,6} + J_{4,6} + J_{1,8}\}/10 ,$$

et nous avons donc l'inégalité (4, 1).

Preuve du Lemme 3.2. Etant donnée $\phi$ dans $C^\infty(R^2)$ satisfaisant $\phi = 0$ en dehors de $\{(x, y); y^2 \leqq x \leqq h\}$, nous posons

$$\mathrm{Re}\, C((x - y^2)^{1/2}, y) = c_1(x, y),\ \mathrm{Im}\, C((x - y^2)^{1/2}, y) = c_2(x, y)$$

$$\psi(x, y) = \phi(x, y)e^{-\tau\Phi(x,y)},\ \Phi = \Phi_\rho,\ I_1 = \psi_x,\ I_2 = c_1\psi_y,\ I_3 = \sqrt{-1}\tau\Phi_y c_2\psi,$$

$$I_4 = \tau\Phi_x\psi,\ I_5 = \tau\Phi_y c_1\psi,\ I_6 = \sqrt{-1}c_2\psi_y ,$$

$$J_{i,j} = 2\,\mathrm{Re} \iint_{R^2} (I_i, I_j) dxdy,\ J_1 = \iint_{R^2} \Big|\sum_{j=1}^{3} I_j\Big|^2 dxdy,\ J_2 = \iint_{R^2} \Big|\sum_{j=4}^{6} I_j\Big|^2 dxdy.$$

Nous allons démontrer pour $h$ assez petit et pour $\tau > 1$

$$\iint_{R^2} |\phi_x + C((x - y^2)^{1/2}, y)\phi_y|^2 e^{-2\tau\Phi(x,y)} dxdy = J_1 + J_2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{6} J_{i,j}$$

$$\geqq \{J_1 + J_2 + J_{1,4}\}/2 \tag{4, 3}$$

$$\geqq M \iint_{R^2} \frac{1}{\tau}\{|\psi_x|^2 + |\psi_y|^2\} + (x - y^2)^{\rho-2}|\psi|^2 dxdy . \tag{4, 4}$$

Ici $M$ est une constante positive indépendante de $\tau$, $h$, $\phi$.

Il est aisé de voir que $J_{2,6} = J_{3,4} = J_{3,5} = 0$ et que

$$J_{1,4} \geqq \tau(1 - \rho) \iint_{R^2} (x - y^2)^{\rho-2}|\psi|^2 dxdy .$$

Du fait que $c_2 \neq 0$, nous avons l'inégalité (4, 4). D'autre part

$$J_{1,6} \geqq -\text{Const.} \iint_{R^2} (x - y^2)^{-1/2}|\psi|\{|\psi_x| + |\psi_y|\} dxdy ,$$

$$J_{1,5} + J_{2,4} + J_{2,5} + J_{3,6}$$

$$\geqq -\text{Const.} \iint_{R^2} \tau\{|y|(x - y^2)^{\rho-2} + (x - y^2)^{\rho-3/2}\}|\psi|^2 dxdy$$

d'où nous obtenons

$$J_{1,6} + J_{1,5} + J_{2,4} + J_{2,5} + J_{3,6} \geqq -\{J_1 + J_2 + J_{1,4}\}/10 ,$$

ce qui démontre le Lemme.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC ET C. ZUILY, Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles, Comm. In Partial Differential Equations, 6 (1981), 799–828.

[2] J. -M. BONY, Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérées, Inst. Fourier, Grenoble, 19, 1 (1969), 277–304.

[3] L. HÖRMANDER, Linear partial differential operators, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[4] S. MIZOHATA, Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 31 (1959), 219–239.

[5] G. B. ROBERTS AND P. R. WENSTON, Uniqueness of the Cauchy problem for weakly hyperbolic operators not satisfying Levi conditions, Journal of Differential Equations, 40 (1981), 7–36.

[6] K. WATANABE, A unique cintinuation theorem for an elliptic operator of two independent variables with non-smooth double characteristics, Osaka J. Math., 10 (1973), 243–246.

[7] C. ZUILY, Second order elliptic operators with non smooth characteristics and the uniqueness of the Cauchy problem, à paraître dans le Bulletin de la societe mathematiques bresilienne.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES,
UNIVERSITÉ ÉDUCATIONNELLE D'HYOGO,
942-1, SHIMOKUME, YASHIRO-CHO
KATO-GUN, HYOGO 673-14
JAPON